DEVOIR SURVEILLÉ n°1
CORRECTION

Partie I : Filtrage d'un signal sonore.

Tous les raisonnements sont basés sur l'idée suivante : le filtrage du signal d'entrée par le circuit signifie que chaque composante de Fourier du signal d'entrée, de pulsation $(2k+1)\omega_1$, est amplifiée / atténuée d'un facteur $G\,[(2k+1)\omega_1]$ et déphasée de $\Phi\,[(2k+1)\omega_1]$ où G et Φ sont les module et argument de la transmittance complexe $\underline{H}$ du filtre : la valeur moyenne est amplifiée, quant à elle, du facteur $G_0 = \lim\limits_{\omega\to 0}\left(\underline{H}(\omega)\right)$.

Ceci se traduit mathématiquement par les relations suivantes :

$$\text{si} \qquad V_e(t) = V_0\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{k\to\infty}\frac{1}{2k+1}\sin\left((2k+1)\omega_1 t\right)\right)$$

$$\text{alors :} \quad V_s(t) = V_0\left(\frac{1}{2}\times G_0 + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{k\to\infty}\frac{1}{2k+1}G\left((2k+1)\omega_1\right)\times\sin\left((2k+1)\omega_1 t + \Phi\left((2k+1)\omega_1\right)\right)\right)$$

1- La composante continue du signal d'entrée est purement et simplement **coupée par le filtre car le gain de ce dernier est nul à fréquence nulle** (contrairement à ce que donnerait un filtre passe-bas).

2- Si le passe-bande a un **facteur de qualité suffisamment grand** alors, lorsque sa pulsation centrale ω_0 coïncide avec une des pulsations $(2k+1)\omega_1$, seule la composante spectrale de pulsation $(2k+1)\omega_1$ garde une amplitude notable en sortie ; autrement dit, **toutes les autres harmoniques sont bien en dehors de la bande passante du filtre et donc totalement atténuées**. Le signal de sortie est alors quasi-sinusoïdal de pulsation $\omega_0 = (2k+1)\omega_1$.

3-a- D'après l'oscillogramme fourni, la pulsation du signal de sortie est la même que celle du signal d'entrée, donc c'est le fondamental qui a été transmis. Comme par ailleurs le filtre présente un gain maximal à la pulsation ω_0 et que toute variation de fréquence du signal d'entrée fait chuter l'amplitude du signal de sortie, on en déduit que l'on a fixé précisément $\omega_0 = \omega_1$

$\boxed{\omega_0 = \omega_1 = 2\pi/T_1}$ où T_1 est la période des signaux.

AN : $T_1 = 5$ carreaux × 50 µs/carreau = 250 µs d'où $\boxed{\omega_0 = 2{,}5\ 10^4\ \text{rad.s}^{-1}}$.

3-b- Compte tenu de la formule générale écrite en préambule et de ce qui a été dit, le signal de sortie s'écrit ici :

$$V_s(t) \approx \frac{2V_0}{\pi}\times G(\omega_1)\times\sin\left(\omega_1 t + \Phi(\omega_1)\right) = \frac{2V_0}{\pi}\times\underbrace{G(\omega_0)}_{|F_0|}\times\sin\left(\omega_1 t + \underbrace{\Phi(\omega_0)}_{\substack{0 \text{ si } F_0>0\\ \pi \text{ si } F_0<0}}\right)$$

L'absence de « décalage temporel » entre les signaux d'entrée et de sortie montre que le fondamental de V_e et V_s sont en phase, donc que $F_0 > 0$. On a ainsi :

$$F_0 = |F_0| = \frac{V_s^{max}}{\frac{2}{\pi}V_0} = \frac{3 \text{ carreaux} \times 2 \text{ V/carreau}}{\frac{2}{\pi}\times 2 \text{ carreaux} \times 0{,}5 \text{ V/carreau}} = \frac{6\text{ V}}{0{,}64\text{ V}}(\text{ou} = 3\pi) = \boxed{9{,}4}$$

4-a- Le comportement intégrateur a lieu lorsque la transmittance du filtre est quasiment proportionnelle à $1/j\omega$, ce qui se produit à haute fréquence :

$$\omega \gg \omega_o \quad \text{et} \quad \omega \gg \frac{\omega_o}{Q} \quad \Rightarrow \quad \underline{F}(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} \approx \boxed{\frac{F_o}{jQ\dfrac{\omega}{\omega_o}}}$$

Rq : l'oscillogramme relatif à la 2ème expérience montre une fréquence du signal d'entrée 10 fois supérieure à celle de la 1ère expérience, donc 10 fois supérieure à la fréquence propre du filtre. Si $Q > 1$, les 2 conditions ci-dessus seront donc bien vérifiées.

4-b- Analysons la situation : la fonction de transfert précédente équivaut bien, pour un signal purement sinusoïdal, à une intégration : $\left(dV_s/dt\right)(t) = \left(F_o\omega_o/Q\right)\times V_e(t)$. Toutefois, pour le signal V_e étudié ici, toutes les composantes de Fourier sont intégrées, sauf le fondamental qui est coupé (cf. question 1), et on a donc :

$$\boxed{\frac{dV_s(t)}{dt} = \frac{F_o\omega_o}{Q}\left(V_e(t) - \left\langle V_e \right\rangle\right)}$$

Ainsi, le filtre réalise ici l'intégration d'un créneau **symétrique d'amplitude V_0/2** et conduit à un signal triangulaire formé de droites dont les pentes sont égales à : $\pm\dfrac{F_o\omega_o}{Q}\dfrac{V_0}{2}$

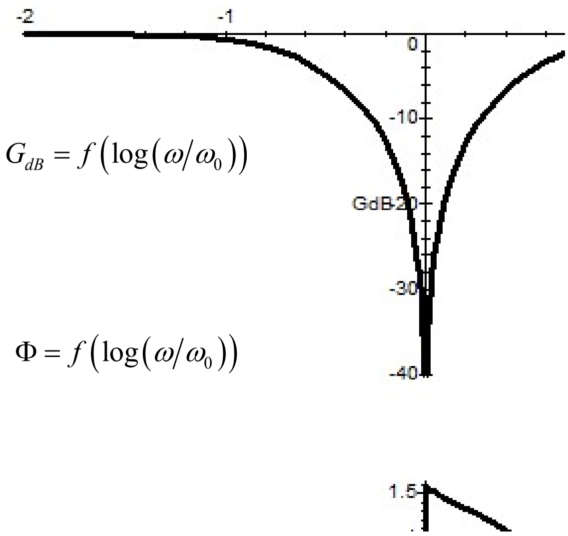
AN : $\dfrac{F_o.\omega_o}{Q}\dfrac{V_0}{2} = \dfrac{V_{s,pp}}{T/2} = \dfrac{6 \text{ carreaux} \times 0{,}2 \text{ V/carreau}}{2{,}5 \text{ carreaux} \times 5\ \mu\text{s/carreau}} = \dfrac{1{,}2}{12{,}5}\text{V}/\mu\text{s} = 9{,}6.10^4\ \text{V/s}$ d'après le 2nd oscillogramme.

Or, dans cette 2nde situation on a V_0 = 2 carreaux × 2 V/carreau = 4 V d'où :

$$\boxed{\frac{F_o.\omega_o}{Q} = 4{,}8\ 10^4\,\text{s}^{-1}}$$

F_0 et ω_0 ayant été précédemment calculés on en déduit : $\boxed{Q = 4{,}9}$.

5-a-Il s'agit d'un filtre **coupe-bande** (ou réjecteur de bande) car le gain tend vers 1 à BF et HF et s'annule pour $\omega = \omega_0$.



Ce filtre permet **d'atténuer fortement un bruit quasi harmonique** (i .e. dont le spectre serait centré sur ω_0) et viendrait polluer un enregistrement (un ronronnement de machine, un sifflement…).
L'allure des diagrammes de Bode (voir ci-contre) s'obtient à partir d'une étude asymptotique et, *si on a le temps*, en calculant la valeur du gain et de la phase pour quelques valeurs de ω/ω_0 (voir **tableau** ci-dessous) ; c'est une particularité du coupe-bande : les asymptotes ne permettent pas à elles seules de tracer l'allure du diagramme (cf. tableau synoptique du poly de cours sur les filtres).

Le paramètre α est l'inverse du facteur de qualité Q du filtre. Pour le voir, il suffit de réécrire la transmittance en faisant apparaître le dénominateur usuel caractéristique des filtres du 2nd ordre et d'identifier avec la forme canonique :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + j\alpha\dfrac{\omega/\omega_0}{1-\omega^2/\omega_0^2}} = \frac{1-\omega^2/\omega_0^2}{1-\omega^2/\omega_0^2 + j\underline{\underline{\alpha\dfrac{\omega}{\omega_0}}}} \equiv \frac{1-\omega^2/\omega_0^2}{1-\omega^2/\omega_0^2 + j\underline{\underline{\dfrac{\omega}{Q\omega_0}}}}$$

$x = \omega/\omega_0$	**1**	**2**	**3**	**4,2**	**10**	**100**
$\log(\omega/\omega_0)$	0	0,30	0,48	**0,63**	1	2
$G_{dB} = -10\log\left(1+\left(\alpha\dfrac{\omega/\omega_0}{1-\omega^2/\omega_0^2}\right)^2\right)$	$-\infty$	–9,1	–5,1	**–3 (coupure)**	–0,66	–0,0007
$\Phi_{(rad)} = -\arctan\left(\alpha\dfrac{\omega/\omega_0}{1-\omega^2/\omega_0^2}\right)$	$\pi/2$ = 1,57	1,21	0,98	0,78	0,38	0,04

Rq 1 : si on calcule 1 – $\underline{H}$ on obtient logiquement la transmittance d'un passe-bande !

Rq 2 : vous n'avez pas pensé à faire cette mise sous forme canonique du dénominateur ou vous avez oublié cette forme ? Une autre façon de prendre le problème (qui revient au même…) est de remonter à l'équation différentielle régissant $V_e(t)$ et $V_s(t)$ et faire une identification avec la forme canonique du membre de gauche (que vous connaissez par cœur obligatoirement !!) :

$$\underline{\underline{\frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}}}} = \frac{1-\omega^2/\omega_0^2}{1-\omega^2/\omega_0^2 + j\alpha\dfrac{\omega}{\omega_0}} \quad\rightarrow\quad \left(1-\omega^2/\omega_0^2 + j\alpha\frac{\omega}{\omega_0}\right)\underline{V_s} = \left(1-\omega^2/\omega_0^2\right)\underline{V_e}$$

d'où : $V_s + 1/\omega_0^2\,\ddot{V}_s + \dfrac{\alpha}{\omega_0}\dot{V}_s = V_e + 1/\omega_0^2\,\ddot{V}_e$ i.e. $\ddot{V}_s + \underline{\underline{\alpha\omega_0}}\,\dot{V}_s + \omega_0^2\,V_s = \ddot{V}_e + \omega_0^2\,V_e$ CQFD

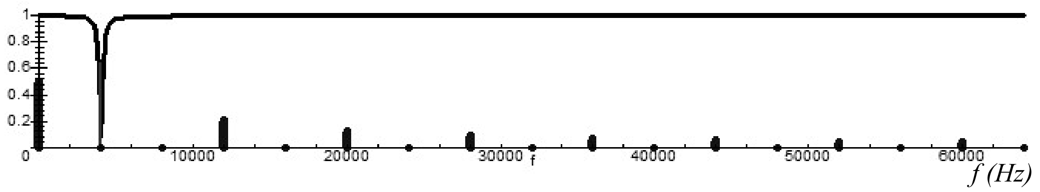
Rq 3 : En dernier recours, on pourrait calculer la largeur $\Delta\omega$ de la bande passante ou rejetée, et poser $\boxed{Q = \omega_0/\Delta\omega}$ mais c'est plus long ! **Cette relation peut d'ailleurs servir de définition de *Q* lors de l'étude d'un filtre d'ordre quelconque avec un transmittance qu'on ne sait pas mettre sous forme canonique ; elle sert également à définir *Q* de manière purement expérimentale si on nous fournit une courbe de résonance.**

5-b- On remarque que **f_0 = 4 000 Hz correspond exactement à la fréquence fondamentale de $V_e(t)$!** ainsi :

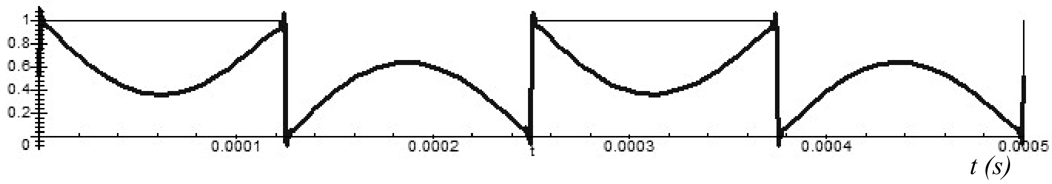
• **Si α = 0,1 donc Q = 10**, le filtre est très sélectif et coupe donc uniquement le fondamental de V_e, les harmoniques étant transmises sans déphasage (cf. diagramme de Bode de la phase) et avec un gain unité, de même que la moyenne de V_e.

On a donc : $\boxed{V_s(t) \approx V_e(t) - \dfrac{2V_0}{\pi}\sin(\omega_1 t)}$ qui est « simple » à représenter :

Spectre et gain



Signaux

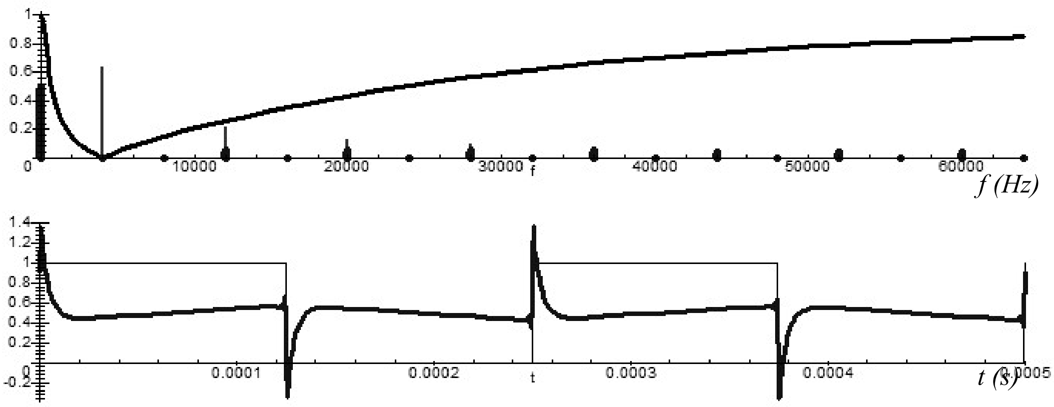


Complément pour info :

- **Si $\alpha = 10$ donc $Q = 0{,}1$**, le filtre est très peu sélectif, la bande rejetée est très large et quasiment toutes les harmoniques utiles de V_e sont fortement atténuées ; il ne reste quasiment dans le spectre de V_s que le terme à fréquence nulle et les harmoniques de haut rang. On obtient donc quasiment un signal limité à sa valeur moyenne, égale à celle de V_e soit $V_0/2$ car le gain vaut 1 à fréquence nulle, et à des discontinuités qui sont exactement de même amplitude que celles de V_e.

Spectre et gain

Signaux



- **Si $\alpha = 4$ donc $Q = 1/4$**, la situation est intermédiaire entre les 2 précédentes (c'est la plus difficile à représenter) ; la bande rejetée est de largeur $\Delta f = f_0/Q = 4f_0$ (attention : elle n'est pas symétrique autour de f_0 !!) donc, outre le fondamental qui est coupé, l'harmoniques de rang 3 (et dans une moindre mesure celle de rang 5) est fortement impactées par le filtre. L'allure de $V_s(t)$ est proche de celle du cas $\alpha = 0{,}1$ mais « déformée » (ou si vous voulez, intermédiaire entre les cas $\alpha = 0{,}1$ et $\alpha = 10$).

Spectre et gain

Signaux