

Partie II : Oscillateur à pont de Wien

Partie I

I-A- Pour que l'équation soit homogène, il est nécessaire que

$$\dim\left(\frac{d^2V}{dt^2}\right) = \dim(V) \cdot T^{-2} = \dim\left(b\omega \frac{dV}{dt}\right) = \dim(\omega^2 V) \text{ soit } \boxed{\begin{matrix} \dim(\omega) = T^{-1} \\ \dim(b) = 1 \end{matrix}}$$

I-B-1- L'amplitude de la réponse est croissante ; on peut la supposer exponentiellement croissante, signe d'un système instable. Les coefficients dans le membre de gauche de l'équation différentielle n'ont donc pas tous le même signe et ainsi $\boxed{b < 0}$.

La réponse est pseudo oscillante est donc $\boxed{\Delta < 0}$; or $\Delta = \omega^2 (b^2 - 4)$ et donc $\boxed{-2 < b < 0}$

A l'instant initial, le système amorcera ses oscillations sur du bruit : donc avec des valeurs de V et $\frac{dV}{dt}$ très faibles (mais non rigoureusement nulles)

I-B-2- En supposant b faible (ce que suggère le texte et ce dont on peut se convaincre en constatant que de nombreuses oscillations sont visibles pendant le temps caractéristique de l'augmentation de l'amplitude des oscillations), on peut assimiler la pseudo pulsation à la pulsation propre ω .

Ainsi : on mesure 12 pseudo oscillations en 0,076 s soit $\boxed{\omega = 12 \cdot \frac{2\pi}{0,076} = 1,0 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1}}$

Le terme exponentiel dans l'enveloppe du signal sera de la forme $e^{-\frac{b}{2}\omega t}$. De plus $t \approx 0,044\text{s}$, on mesure une amplitude de $V_{1\max} = 1\text{V}$ et à $t \approx 0,094\text{s}$ soit 9 pseudo oscillations plus tard, on mesure $V_{2\max} = 11\text{V}$.

$$\text{Soit } -\frac{b}{2} \cdot 9 \cdot 2\pi = \ln\left(\frac{V_{2\max}}{V_{1\max}}\right) \quad \boxed{b = -\frac{1}{9\pi} \ln\left(\frac{V_{2\max}}{V_{1\max}}\right) = -\frac{1}{9\pi} \ln\left(\frac{11}{1}\right) = -9 \cdot 10^{-2}}$$

Remarque, on peut éventuellement donner ici la forme exacte des solutions :

$$V = V_0 e^{-\frac{b}{2}\omega t} \cos\left(\omega \sqrt{1 - \frac{b^2}{4}} t + \varphi\right) ; \text{ la remarque du texte incitant à négliger } b^2 \text{ devant } 1 \text{ revient}$$

à assimiler la pseudo pulsation à la pulsation propre.

I-C- Le régime est cette fois apériodique, toujours instable (le résultat prend la forme d'une exponentielle croissante). Donc $\boxed{\Delta > 0 \text{ et } b < 0 \text{ donc } b < -2}$.

La valeur initiale de V est toujours très faible (devant 1V).

I-D- Le système semble maintenant stable ($V(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$) donc $\boxed{b > 0}$.

Le régime est apériodique. Donc $\boxed{\Delta \geq 0 \text{ donc } b \geq 2}$.

Le système ne peut plus démarrer « sur du bruit » (ou la tension V resterait à des valeurs très faibles). Ici $\boxed{V(0^+) = 1,5\text{V} \text{ et } \frac{dV}{dt}(0^+) > 0}$

Partie II : montage de base

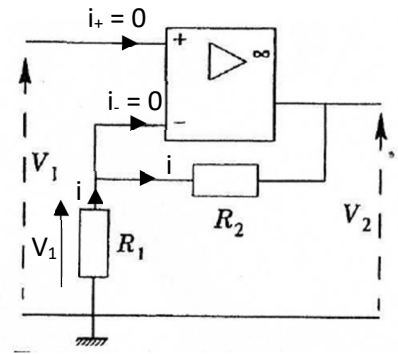
II-A-1- $i_+ = i_- = 0$ donc la même intensité i traverse les deux résistance R_1 et R_2 (qui sont donc branchées en série).

$$V_+ = V_- = V_1$$

Donc en utilisant une formule pont diviseur de

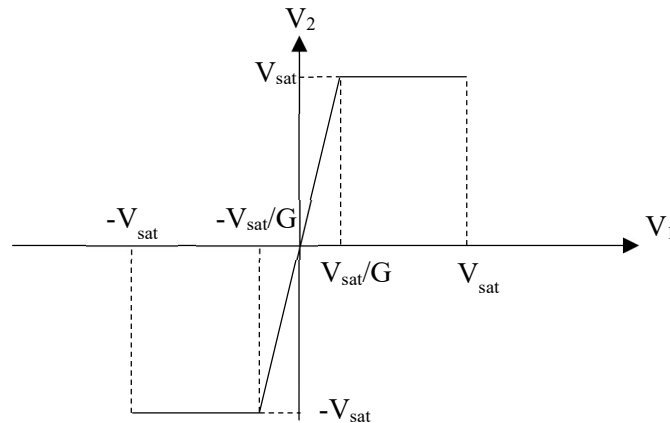
$$\text{tension : } V_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_2$$

$$\text{soit } V_2 = \underbrace{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)}_G V_1$$



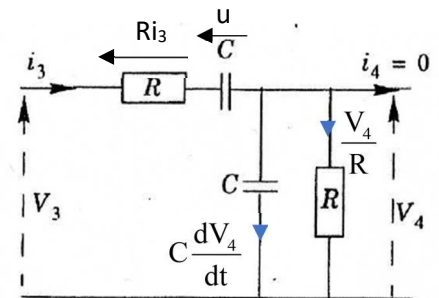
II-A-2- En régime linéaire on doit avoir $|V_2| \leq V_{\text{sat}}$ donc $|V_1| \leq \frac{V_{\text{sat}}}{G} = V_{\text{IC}}$

II-A-3- On en déduit la courbe suivante :



II-B-1- $i_3 = \frac{V_4}{R} + C \frac{dV_4}{dt}$

II-B-2-



$$\begin{cases} V_3 = Ri_3 + u + V_4 \\ i_3 = \frac{V_4}{R} + C \frac{dV_4}{dt} \\ i_3 = C \frac{du}{dt} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \frac{dV_3}{dt} = R \frac{d}{dt} \left(\frac{V_4}{R} + C \frac{dV_4}{dt} \right) + \frac{1}{C} \left(\frac{V_4}{R} + C \frac{dV_4}{dt} \right) + \frac{dV_4}{dt}$$

$$\text{donc } \frac{dV_3}{dt} = RC \frac{d^2V_4}{dt^2} + 3 \frac{dV_4}{dt} + \frac{1}{RC} V_4$$

$$\text{De la forme demandée avec } \boxed{\omega_0 = \frac{1}{RC} \quad \text{et} \quad \alpha = 3}$$

II-C-1- On se retrouve bien dans le cadre d'utilisation de la question précédente car l'intensité sortante du pont de Wien est ici $i_- = 0$. La tension d'entrée sera ici $V_3 = V_2$ et la tension de

$$\text{sortie } V_4 = V_1 \text{ soit } \omega_0 \frac{dV_2}{dt} = \frac{d^2V_1}{dt^2} + 3\omega_0 \frac{dV_1}{dt} + \omega_0^2 V_1$$

II-C-2- Si $|V_1| < V_{IC}$, $V_2 = GV_1$ et donc $\omega_0 G \frac{dV_1}{dt} = \frac{d^2V_1}{dt^2} + 3\omega_0 \frac{dV_1}{dt} + \omega_0^2 V_1$ soit

$$\boxed{0 = \frac{d^2V_1}{dt^2} + (3 - G)\omega_0 \frac{dV_1}{dt} + \omega_0^2 V_1} \quad \text{donc } \boxed{b_1 = 3 - G}$$

Si $V_1 > V_{IC}$, $V_2 = V_{sat}$ et donc $0 = \frac{d^2V_1}{dt^2} + 3\omega_0 \frac{dV_1}{dt} + \omega_0^2 V_1$ et si $V_1 < -V_{IC}$, $V_2 = -V_{sat}$ et on obtiendra la même équation donc $\boxed{b_2 = 3}$

II-C-3- V_1 est la tension aux bornes de C et donc V_1 est continue.

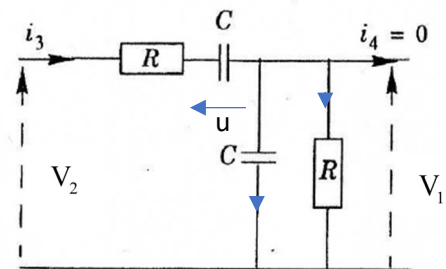
De plus la relation de la question II-A-3- indique que si V_1 est continu, V_2 l'est.

u aux bornes de C (cf schéma ci-contre) est

$$\text{nécessairement continue et donc } i_3 = \frac{V_2 - u - V_1}{R}$$

l'est également. Enfin

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{1}{C} \left(i_3 - \frac{V_1}{R} \right) \text{ l'est.}$$



Remarque : la continuité de la tension aux bornes des condensateurs est liée au fait que l'énergie emmagasinée par les condensateurs $\frac{1}{2}Cu^2$ ne peut évoluer que continument.

II-C-4- La question peut paraître ambiguë. « Faire fonctionner l'oscillateur » signifie avoir des oscillations d'amplitude non négligeable en l'absence de générateur.

Cela suppose que les oscillations qui vont a priori « démarrer sur du bruit » cad avec des

valeurs initiales de V_1 et $\frac{dV_1}{dt}$ non nulles mais très faibles soient amplifiées. Il faut donc un

système « instable » dans un premier temps au moins et donc un coefficient $b_1 < 0$

$$\text{Il faut donc } \boxed{G > G_0 = 3}$$

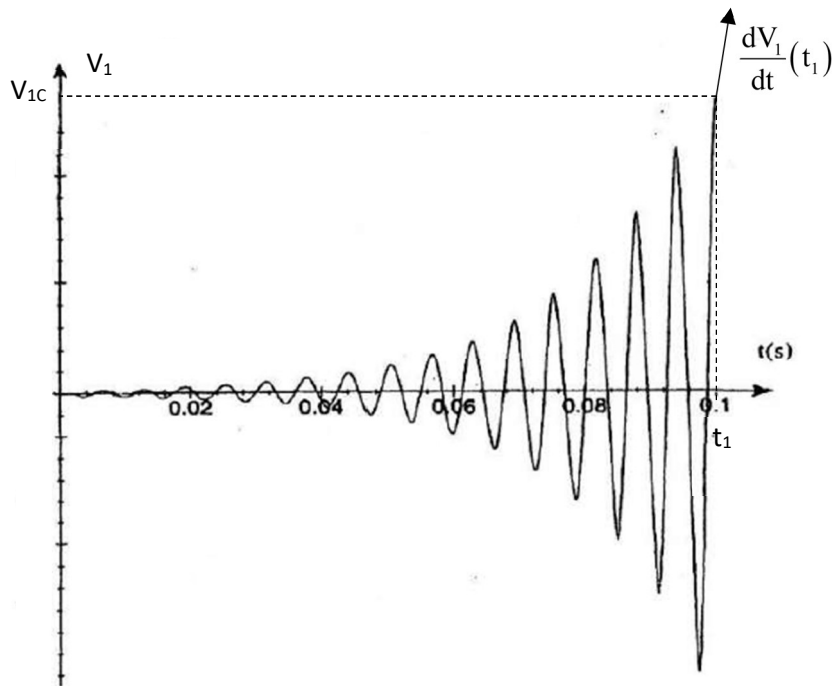
II-D- $G = 3,1$: on est bien dans le cadre défini à la question précédente.

II-D-1- Aux instants « immédiatement » après $t = 0$, le système est régi par l'équation

$$0 = \frac{d^2V_1}{dt^2} + b_1\omega_0 \frac{dV_1}{dt} + \omega_0^2 V_1 \text{ avec } b_1 = -0,1 \in]-2, 0[, \text{ on a donc comme dans la première}$$

partie un régime pseudo oscillant amplifié tant que $|V_1| \leq V_{IC} = \frac{V_{sat}}{G} = \frac{14}{3,1} = 4,5 \text{ V}$

Supposons qu'à $t_1 |V_1|$ atteigne cette valeur critique. Sans restreindre la généralité de l'étude, nous pouvons supposer que $V_1(t_1) = +V_{1c}$ et donc $\frac{dV_1}{dt}(t_1) > 0$ (cf schéma ci-dessous)

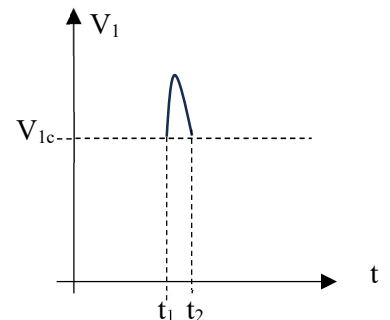


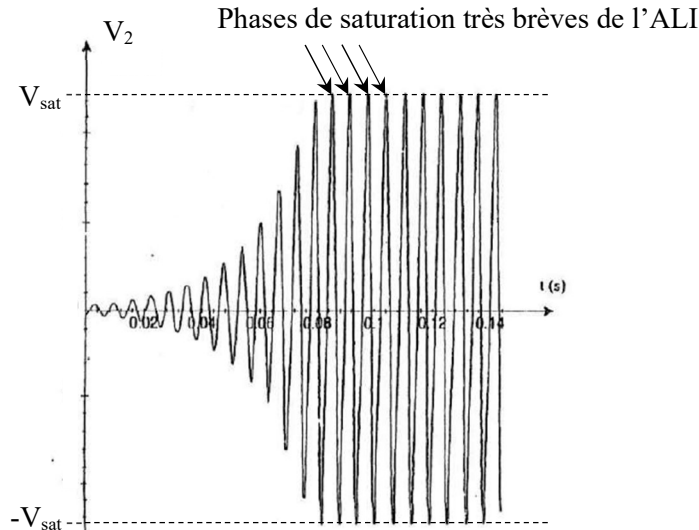
Après t_1 ; l'équation différentielle devient $0 = \frac{d^2V_1}{dt^2} + 3\omega_0 \frac{dV_1}{dt} + \omega_0^2 V_1$, amorti et apériodique (mais avec une tangente « initiale » croissante). On observera donc un début d'évolution similaire à celle du graphique 3 : croissance initiale suivi d'une décroissance jusqu'à ce que V_1 redevienne inférieure à V_{1c} à l'instant t_2 . On aura donc l'évolution ci-contre.

Ensuite après t_2 reprendra le régime pseudo périodique amplifié et en moins d'une pseudo oscillation, on réattendra la valeur V_{1c}

En conclusion, on atteint un régime permanent où les oscillations existent comme dans le régime pseudopériodique amplifié mais où l'amplitude des oscillations stagne légèrement au dessus de 4,5V car dès que $|V_1| > 4,5V$ de brèves phases apériodiques amorties ramènent V_1 dans l'intervalle $[-V_{1c} ; V_{1c}]$. C'est la non linéarité de l'ALI (saturation en tension) qui limite l'amplitude des oscillations.

II-D-2- La seule difficulté est de savoir quelle est la durée des phases de saturation relativement à la période des oscillations. Or puisqu'on lit que le graphe 4 $V_{1,max} \approx V_{1c} = 4,5V$, on peut conclure que la phase de saturation est très brève. Ceci sera confirmé à la question suivante D'où le graphe ci-dessous.





II-D-3- On mesure $T = \frac{0,06}{10} = 6 \cdot 10^{-3}$ s soit

$$\omega = \frac{2\pi}{6 \cdot 10^{-3}} = 1 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1} \approx \omega_0 = \frac{1}{RC} = 1,0 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$$

Attention dans l'interprétation à bien distinguer les deux phases

- Puisque $b_2^2 = (-0,1)^2 \ll 1$, il est prévisible que la pseudo pulsation du régime (linéaire) amplifié soit proche de ω_0
- La fait que la pseudo pulsation du régime établi soit proche de ω_0 est moins évident et **prouve que la durée de la phase non linéaire saturée ($t \in [t_1; t_2]$) est négligeable devant la pseudo période des oscillations linéaires.**

II-E-1- Le raisonnement est le même mais la valeur de $b_1 = 3 - G = -7$

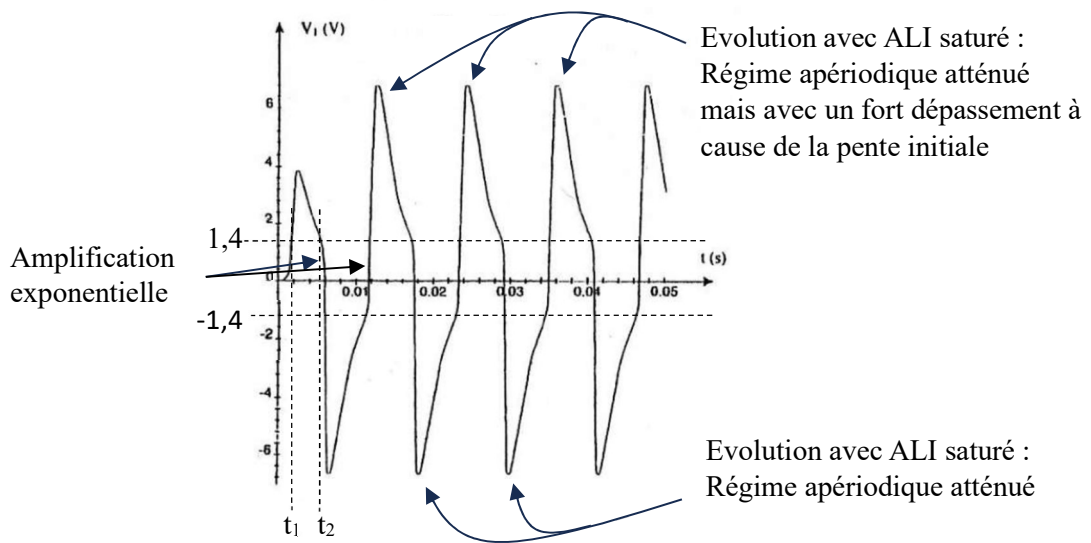
- La croissance de V_1 en régime linéaire est aperiodique et très brutalement croissante ($e^{-\frac{7\omega t}{2}}$ à comparer à $e^{-\frac{0,1\omega t}{2}}$)

- V_{1C} est beaucoup plus faible : $V_{1C} = \frac{V_{sat}}{G} = 1,4 \text{ V}$

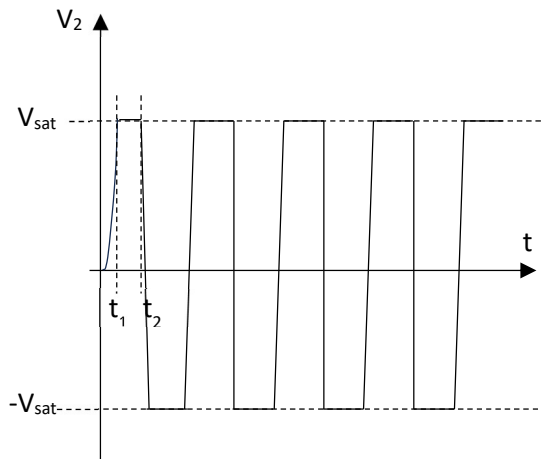
- A t_1 tel que $V_1(t_1) = V_{1C}$, la dérivée $\frac{dV_1}{dt}(t_1)$ est beaucoup plus élevée que

précédemment (toujours) à cause de l'exponentielle brutalement croissante ; donc la phase « en saturation » aperiodique amortie est beaucoup plus longue et se détache nettement de la phase amplifiée par une rupture de pente (à t_2)

- Le régime transitoire existe toujours (on n'atteint jamais instantanément un régime établi) mais il est beaucoup plus bref (car la croissance est plus brutale lors de la phase amplifiée)



II-E-2- Même raisonnement qu'au D-2- mais la phase apériodique est plus longue.



II-E-3- On mesure $T = \frac{0,041 - 0,06}{3} = 12 \text{ ms}$

$T > T_0 = 6,3 \text{ ms}$ mais le régime amplifié n'est plus pseudo périodique de période T_0 . **Ce temps est essentiellement fixé par la durée du régime apériodique.**

II-E-4- On peut retrouver G_2 à partir de la valeur V_{1C} mesurée sur le graphe : $G_2 = \frac{V_{\text{sat}}}{V_{1C}}$

Or le graphe montre une rupture de pente entre le régime apériodique amorti et le régime amplifié et cette rupture ne peut correspondre qu'à $V_1 = V_{1C}$. On lit (déjà signalé plus haut

$V_{1C} \approx 1,4 \text{ V}$ puis $G_2 = \frac{14}{1,4} \approx 10$

II-F- L'amplitude des oscillations n'est pas contrôlable indépendamment de ω_0 puisque :

• si $|b_2| \ll 1$ l'amplitude de V_1 est $V_{1C} = \frac{V_{\text{sat}}}{G}$ et $G = 3$ d'où $V_1 \approx 4,5 \text{ V}$ • si $|b_2|$ est élevé l'amplitude de V_1 dépend de la phase apériodique de façon complexe et incontrôlable.