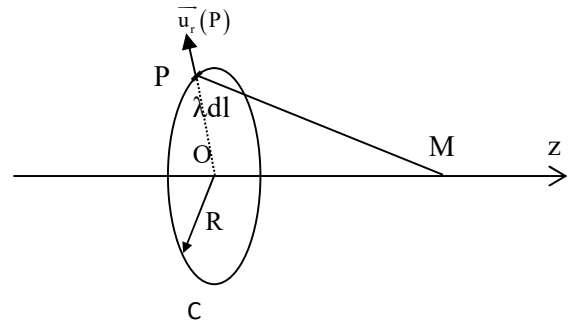


## Problème 3 : Champ électrostatique créé par une spire

### I- Champ sur l'axe Oz de la spire

**I-1-** Tout plan passant par Oz est un plan de symétrie pour la distribution de charges D. L'axe Oz est un axe de symétrie de D :  $\forall M \in \text{l'axe Oz } \vec{E}(M) \text{ est porté par Oz soit } \vec{E}(M) = E(z) \cdot \vec{e}_z$

Le plan  $\Pi$  contenant la spire est un plan de symétrie de D. Les champs aux points  $M(z)$  et  $M'(-z)$ , symétriques par rapport à ce plan, sont symétriques par rapport à  $\Pi$  :  $E(-z) = -E(z)$ .



**I-2-** On peut remarquer que  $\forall P \in \text{la spire C, la distance au point M, } PM = d \text{ est constante : } d = \sqrt{R^2 + z^2}$ . La contribution de  $dq = \lambda \cdot dl$  au champ en (M) sera indépendante de la position de P sur C :

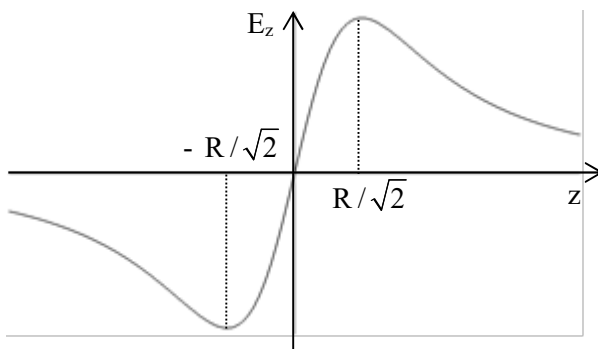
$$\delta \vec{E}(M) = \frac{\lambda \cdot dl}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{d^3} = \frac{\lambda \cdot dl}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d^3} (-R\vec{u}_r(P) + z\vec{u}_z)$$

Seule nous intéresse la composante suivant z :  $\delta E_z(M) = \frac{\lambda \cdot dl}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{d^3}$

$$E_z(z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_C dl = \frac{\lambda \cdot 2 \cdot \pi \cdot R}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

On remarque également que  $\vec{E}(O) = \vec{0}$  : O centre de symétrie et il n'y a pas de charge en O

**I-3-** Graphe  $E(z)$  tracé ci-dessous avec  $Q > 0$



$$\text{Remarque } \frac{dE_z(z)}{dz} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^2 - 2z^2}{(R^2 + z^2)^{5/2}}$$

$$\text{s'annule pour } z = \pm \frac{R}{\sqrt{2}}$$

### II- Champ au voisinage de l'axe M repéré par ses coordonnées cylindriques ( r, $\theta$ , z )

On exprimera  $\vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta, z)$  dans la base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  associée ( $\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$ )

**II-1-** Appelons D la distribution de charge (la spire chargée). D est invariante par rotation autour de Oz : les

coordonnées cylindriques de  $\vec{E}(M)$  sont indépendants de  $\theta$  :  $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_r(r, z) \\ E_\theta(r, z) \\ E_z(r, z) \end{pmatrix}$ .

Soit M un point quelconque. Le plan passant par Oz et contenant M est un plan de symétrie pour la distribution de charges D.

Le champ en M est contenu dans ce plan  $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ , il n'admet donc pas de composante orthoradiale.

Donc  $\vec{E} = E_r(r, z)\vec{u}_r + E_z(r, z)\vec{u}_z$

**II-2-** D'après le théorème de Gauss, comme il n'y a pas des charges au voisinage de l'axe Oz, le flux du champ électrique à travers une surface fermée est nul : flux conservatif au voisinage de Oz

La force électrostatique  $\vec{F} = q\vec{E}(M)$  est donc à circulation conservative ; ce qui signifie qu'elle est **conservative (ou dit autrement qu'elle dérive d'une fonction énergie potentielle)**

**II-3-**  $\vec{E}(M) = E_r(r, z)\vec{e}_r + E_z(r, z)\vec{e}_z$

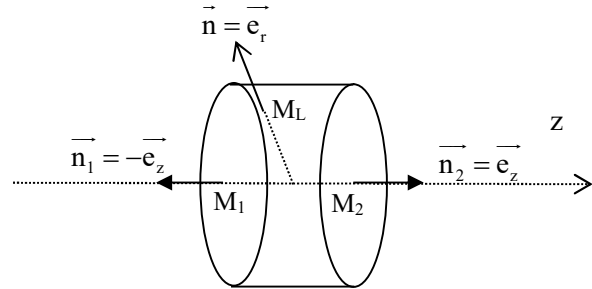
$d\Sigma_f = d\Sigma_1 + d\Sigma_2 + d\Sigma_L$  pour **r petit**,

$d\Sigma_1$  disque de rayon r petit à la cote z

$d\Sigma_2$  disque de rayon r petit à la cote z + dz

$d\Sigma_1 = d\Sigma_2 = \pi.r^2$

$d\Sigma_L = 2.\pi.r.dz$



$$\Phi(\vec{E}, d\Sigma_f) = \vec{E}(M_1) \cdot \vec{n}_1 \cdot d\Sigma_1 + \vec{E}(M_2) \cdot \vec{n}_2 \cdot d\Sigma_2 + \iint_{d\Sigma_L} \vec{E}(M_L) \cdot \vec{n}_L \cdot d\Sigma$$

Quel que soit M appartenant à la surface latérale : r est constant,  $\vec{n}(M) = \vec{e}_r(M)$  et

$\vec{E}(M) \cdot \vec{n}(M) = E_r(r, z) = \text{cste}$

$\Phi(\vec{E}, d\Sigma_f) = \pi.r^2 [E_z(0, z+dz) - E_z(0, z)] + 2.\pi.r.dz.E_r(r, z) = 0$  d'après 2

Pour r petit :  $\pi.r^2 \frac{dE_z(0, z)}{dz} \cdot dz + 2.\pi.r.dz.E_r(r, z) = 0$  soit  $E_r(r, z) = -\frac{r}{2} \cdot \frac{dE_z(0, z)}{dz}$

$E_z(0, z)$  a été calculé (remarque I-3), on en déduit  $E_r(r, z) = \frac{Q.r}{8.\pi.\epsilon_0} \cdot \frac{2.z^2 - R^2}{(R^2 + z^2)^{5/2}}$

**II-4-a-** voir document : les lignes de champ divergent de la spire (où le champ n'est pas défini) vers l'infini ou le point O (où le champ est nul). Donc si  $\lambda > 0$   $[Q > 0]$

**II-4-b-** A grande distance de la spire le champ est équivalent à celui créé par une charge ponctuelle Q située en O : les lignes de champ sont voisines de droites passant par O.

**II-4-c-** En O le champ est nul et les lignes de champ peuvent se croiser

**II-4-d-** Dans le plan de figure, les lignes de champ se rapprochent de l'axe

Oz si la composante radiale du champ  $E_r(r, z)$  est négative

(cas représenté ci-contre), elles s'en éloignent si  $E_r$  est positif.

D'après 4-3  $E_r(r, z) = \frac{Q.r}{8.\pi.\epsilon_0} \cdot \frac{2.z^2 - R^2}{(R^2 + z^2)^{5/2}}$

$E_r < 0$  si  $|z| < \frac{R}{\sqrt{2}}$  et  $E_r > 0$  si  $|z| > \frac{R}{\sqrt{2}}$

