

Partie IV- Gravimétrie

I- Champ gravitationnel et champ de pesanteur terrestre

1- Les forces électrostatique et de gravitation s'écrivent respectivement $\vec{F}_e = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{M}_1 \vec{M}_2}{M_1 M_2^3}$ et

$$\vec{F}_{\text{grav}} = -G m_1 m_2 \frac{\vec{M}_1 \vec{M}_2}{M_1 M_2^3}. \text{ Les deux formes sont analogues avec } \begin{cases} q_i \leftrightarrow m_i \\ \epsilon_0 \leftrightarrow -4\pi G \\ \vec{E} \leftrightarrow \vec{G} \end{cases}$$

Enoncé du théorème de Gauss en électrostatique et gravitationnel :

le flux du champ électrostatique à travers toute surface fermée est égal à la charge intérieure à la surface multipliée par $\frac{1}{\epsilon_0}$	le flux du champ gravitationnel à travers toute surface fermée est égal à la masse intérieure à la surface multipliée par $-4\pi G$.
$\oiint_{P \in \Sigma_G} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P \cdot \vec{n}_{\text{ext}}(P) = \frac{Q_{\text{int à } \Sigma_G}}{\epsilon_0}$	$\oiint_{P \in \Sigma_G} \vec{G}(P) \cdot d\vec{S}_P \cdot \vec{n}_{\text{ext}}(P) = -4\pi G m_{\text{int à } \Sigma_G}$

2- Par symétrie et invariances $\vec{G}_T = f(r) \vec{e}_T$. L'application du théorème de Gauss à une sphère de

centre C et de rayon $R > R_T$ conduit à $\vec{G}_T = -\frac{GM_T}{r^2} \vec{e}_T$.

3- Avec $r = R_T + z$, on a l'intensité du champ qui vaut

$$G_z = -\frac{GM_T}{r^2} = -\frac{GM_T}{R_T^2} \left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^{-2} = -\frac{GM_T}{R_T^2} \left(1 - 2\frac{z}{R_T} + o\left(\frac{z}{R_T}\right)\right) \text{ avec } \frac{z}{R_T} \ll 1.$$

4- En notant z_0 l'altitude recherchée, on veut $\frac{G(0) - G(z_0)}{G(0)} = 0,01$ soit $z_0 = \frac{1}{2} 0,01 \cdot R_T = 31,9 \text{ km}$

5- En utilisant la formule approchée, on a $\overrightarrow{\text{grad}}(G) = \frac{d}{dz} \left(\frac{GM_T}{R_T^2} \left(1 - 2\frac{z}{R_T}\right) \right) \vec{e}_z = -2 \frac{GM_T}{R_T^3} \vec{e}_z$

Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}(G)$ indique la direction et le sens du déplacement associé à la plus grande augmentation de $G(z)$. On retrouve qu'il faut se déplacer vers le centre de la sphère pour voir $G(z)$ augmenter le plus ...

6- On a $2 \frac{GM_T}{R_T^3} = 3,08 \cdot 10^{-6} \text{ m.s}^{-2}$. Or $1 \text{ gal.cm}^{-1} = 1,00 \text{ s}^{-2}$, donc $1 \mu\text{gal.cm}^{-1} = 1,00 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-2}$. On en

déduit $2 \frac{GM_T}{R_T^3} = 3,08 \mu\text{gal.cm}^{-1}$. Les valeurs de z_0 et de $2 \frac{GM_T}{R_T^3}$ montrent qu'une variation de

l'altitude z influe très peu sur la valeur du champ gravitationnel.

IV- Application à la gravimétrie

28- Pour la sphère seule, on obtient par symétries et invariances $\vec{G}_s = G_s(r)\vec{e}_r$. Le théorème de

Gauss appliqué à une sphère de rayon $r > R$ donne
$$\vec{G}_s = -\frac{4\pi GR^3\mu'}{3r^2}\vec{e}_r$$

29- La distribution de masse peut être vue comme la superposition d'une zone homogène de masse volumique μ_m , d'une sphère de profondeur h , de rayon R , de masse volumique - μ_m , et d'une sphère de même géométrie de masse volumique μ' . On obtient donc :

$$\vec{G}_B = g_0\vec{e}_z + \frac{4\pi GR^3(\mu' - \mu_m)}{3r^2}\vec{e}_r = g_0\vec{e}_z + \frac{4\pi GR^3\Delta\mu}{3r^2}\vec{e}_r$$

On a donc $G_{Bz} = \vec{G}_B \cdot \vec{e}_z = g_0 + \frac{4\pi GR^3(\mu' - \mu_m)}{3r^2}\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z = g_0 + \frac{4\pi GR^3\Delta\mu}{3r^2}\cos(\theta)$.

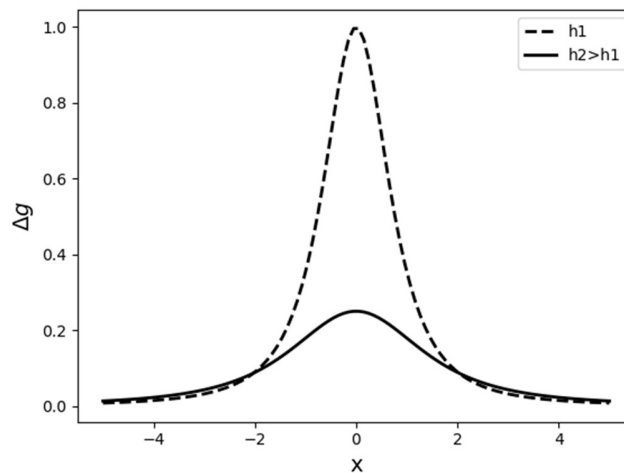
On a $\cos(\theta) = \frac{h}{r} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + x^2}}$ d'où

$$g_{Bz} = g_0 + \frac{4\pi GR^3\Delta\mu}{3} \frac{h}{(h^2 + x^2)^{3/2}}$$

30- D'après le théorème de superposition, $g_{Bz} - g_0$ correspond au champ créé par la sphère de rayon R et de masse volumique $\Delta\mu = \mu' - \mu_m$.

31- D'après ce qui précède, on a
$$\Delta g = g_{Bz} - g_0 = \frac{4\pi GR^3\Delta\mu}{3} \frac{h}{(h^2 + x^2)^{3/2}}.$$

32- $\Delta g(x)$ est paire, maximale en $x = 0$ et tend vers 0 à l'infini. Sans faire de calcul, on peut dire que pour $h_2 > h_1$, l'anomalie 2 étant plus profonde, $\Delta g_{\max 2} < \Delta g_{\max 1}$. On a le tracé suivant :



33- On pose $f(x) = \frac{h}{(h^2 + x^2)^{3/2}}$. On a $f_{\max} = f(0) = \frac{1}{h^2}$, d'où $\Delta g_{\max} = \frac{4\pi G R^3 \Delta \mu}{3h^2}$.

Pour déterminer la largeur à mi-hauteur, on cherche $x_{1/2}$ tel que $f(x_{1/2}) = \frac{f_{\max}}{2}$.

On a après calcul $x_{1/2} = h(2^{2/3} - 1)^{1/2}$. La largeur à mi-hauteur vaut donc $\Delta x_{1/2} = 2h(2^{2/3} - 1)^{1/2}$.

. Plus la sphère est profonde et plus son influence est « diluée » spatialement.

34- Sur le graphique, on lit $x_{1/2} = 60 \text{ m}$ et $\Delta g_{\max} = 0,28 \text{ mgal} = 2,8 \cdot 10^{-6} \text{ m.s}^{-2}$.

On en déduit $h = 78 \text{ m}$ et $R = \left(\frac{3\Delta g_{\max} h^2}{4\pi G \Delta \mu} \right)^{1/3} = 39 \text{ m}$.

35- On peut stocker l'or s'il a une forme sphérique, de rayon R' , centrée sur le centre de la grotte, à condition que la masse de roche correspondant à la grotte soit égale à la masse d'or stockée. En effet, la symétrie sphérique étant respectée, l'application du théorème de Gauss conduit au même champ pour la sphère d'or et la sphère de roche. Il faut donc respecter la relation suivante :

$$R^3 \mu_m = R'^3 \rho_{\text{or}}$$

36- La masse d'or vaut donc $m_{\text{or}} = \frac{4}{3} \pi R'^3 \rho_{\text{or}} = \frac{4}{3} \pi R^3 \mu_m$. On peut prendre $\mu \approx 2000 \text{ kg.m}^{-3}$ en

utilisant la figure 9, d'où $m_{\text{or}} = 8,37 \cdot 10^3 \text{ kg}$. La donnée de ρ_{or} permet de déterminer R' (non demandé explicitement). $R' = 0,47 \text{ m}$.

37- Les données de la figure 10 ne sont pas clairement reliées au problème schématisé en figure 9. Il n'est dit nulle part que le milieu est semi infini, et n'y a que deux couches horizontales dans la figure 9 au lieu de 3 dans la figure 10.

Dans une couche uniforme, les deux grottes placées en x_1 et $x_2 > x_1$ provoqueraient deux anomalies successives. Comme $h_1 < h_2$, la première est plus intense et plus piquée. Enfin, comme il s'agit de grottes, $\Delta \mu = 0 - \mu_m = -\mu_m < 0$. Si en plus on tient compte du caractère semi infini d'une plaque, on aurait une superposition des effets, d'où le graphe :

