

DEVOIR SURVEILLÉ n°1 MP*
Samedi 4 octobre 2025 – Durée 4h

L'épreuve contient 4 parties totalement indépendantes.

Le sujet fait 9 pages

Partie 1 : (Extrait de CCP PSI 2003 ; dernière question d'après l'Ecole de l'air)

La question 5 est indépendante des précédentes.

FILTRAGE D' UN SIGNAL SONORE

Pour analyser les composantes fréquentielles d'un signal sonore (analyse des phonèmes du langage par exemple), on utilise un transducteur (microphone) qui convertit le signal en une tension v_e puis un **filtre passe-bande** qui extrait les composantes sinusoïdales de v_e de fréquences voisines d'une fréquence f_0 donnée.

On note v_s la tension de sortie du filtre. Le filtre est un circuit linéaire dont la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{F(j\omega)} = \frac{v_s}{v_e} = \frac{F_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

On se propose de déterminer les caractéristiques F_0 , Q et ω_0 du filtre à partir des oscillogrammes obtenus en régime périodique pour une tension d'entrée v_e rectangulaire pour deux valeurs de fréquences.

On rappelle la décomposition en série de Fourier de $v_e(t)$ dans le cas où $v_e(t)$ est périodique de période T avec :

- pour $0 \leq t < T/2$: $v_e(t) = V_0$
- pour $T/2 \leq t < T$: $v_e(t) = 0$:

$$v_e(t) = V_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)\omega_1 t) \right) \text{ avec } \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

Première expérience (oscillogramme de la figure 7):

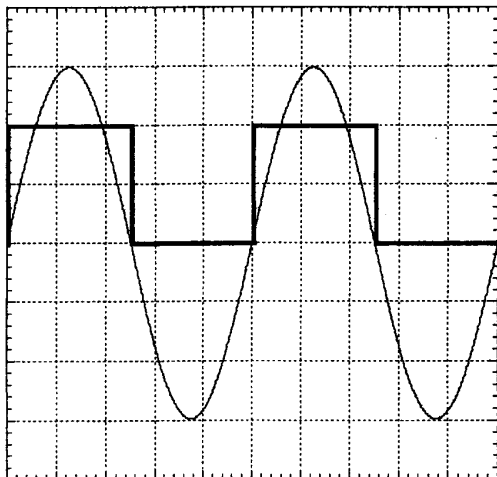


figure 7

- voies 1 et 2 en position DC
- base de temps : $50 \mu s$ par carreau
- sensibilités :
 - voie 1 (en gras) : $0,5 V$ par carreau
 - voie 2 : $2 V$ par carreau

Dans cette expérience :

- la tension v_s obtenue est quasi-sinusoïdale
- si on augmente la fréquence de v_e par rapport à la valeur correspondant à cet oscillogramme, on constate que l'amplitude de v_s diminue
- si, par rapport à cette même fréquence, on diminue légèrement la fréquence de v_e , on constate que l'amplitude de v_s diminue également.

Deuxième expérience (oscillogramme de la figure 8):

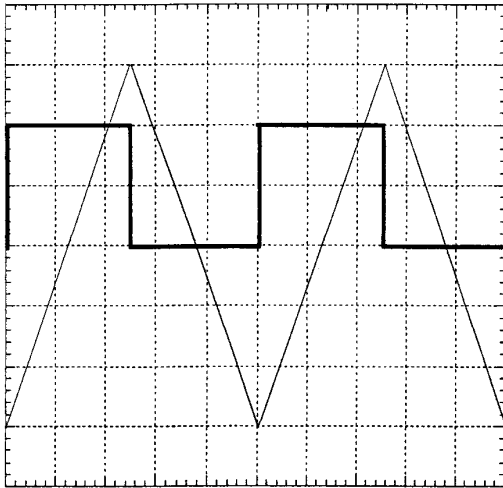


figure 8

- voies 1 et 2 en position DC.
- base de temps : $5 \mu s$ par carreau
- sensibilités :
 - voie 1 (en gras) : $2 V$ par carreau
 - voie 2 : $0,2 V$ par carreau

Dans ce qui suit, on ne demande pas de calculs d'incertitudes mais les mesures devront être faites avec soin (tous les résultats devront être obtenus avec une incertitude relative inférieure à 10 %).

1. Pourquoi, dans chaque expérience, la tension de sortie v_s ne comporte-t-elle pas de composante continue contrairement à la tension d'entrée v_e ?
2. Première expérience : pourquoi peut-on obtenir une tension de sortie v_s quasi-sinusoïdale alors que la tension v_e est rectangulaire ?
3. Dédurre de l'oscillogramme de la première expérience et du commentaire qui l'accompagne :
 - a) la pulsation ω_0 ,
 - b) la valeur de F_0 .
4. Dans la deuxième expérience, v_s est triangulaire alors que v_e est rectangulaire. Le filtre a un comportement intégrateur.
 - a) Donner l'expression approchée de $\underline{F}(j\omega)$ dans le domaine de fréquence correspondant à la deuxième expérience.
 - b) En utilisant l'oscillogramme de la deuxième expérience, déterminer, en justifiant précisément la méthode utilisée, le rapport $F_0 \omega_0 / Q$ (on se souviendra – cf. question 1. – que la composante continue de v_e n'est pas intégrée). En déduire la valeur de Q .
5. On s'intéresse enfin à un circuit linéaire dont la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\alpha \frac{\omega/\omega_0}{1 - \omega^2/\omega_0^2}} \quad \text{avec} \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 4000 \text{ Hz et } \alpha \text{ réglable entre } 0,1 \text{ et } 10.$$

- a) Quelle est la nature de ce filtre ? Quelle peut être son utilité lors du traitement d'un signal sonore ? Déterminer le lien entre le paramètre α et le facteur de qualité du filtre. Tracer l'allure des diagrammes de Bode du filtre si $\alpha = 4$.
- b) On alimente ce filtre avec le signal v_e de la 1^{ère} expérience (voie 1 de l'oscillogramme de la figure 7 ci-dessus). Dessiner, pour $\alpha = 0,1$, l'allure des spectres des signaux d'entrée v_e et de sortie v_s , ainsi que l'allure du signal $v_s(t)$.

PARTIE 2 : A propos de l'oscillateur à pont de Wien (Extrait de Centrale TSI 2000)

Dans cette partie, le terme A.O. désigne un amplificateur linéaire intégré (A.L.I.). On rappelle qu'un A.L.I. subissant une rétroaction négative fonctionne *a priori* en régime dit linéaire, les potentiels des deux bornes d'entrée notées + et - pouvant être considérés égaux, mais que ce régime est limité à des situations où le potentiel de la borne de sortie S ne dépasse pas $V_{\text{sat}} = 14 \text{ V}$ en valeur absolue : tout fonctionnement *a priori* linéaire conduisant théoriquement à $|V_s| > V_{\text{sat}}$ aboutit en réalité à une saturation de $|V_s|$ à V_{sat} .

Les valeurs numériques utiles sont : $C = 100 \text{ nF}$ et $R = 10 \text{ k}\Omega$.

Cet énoncé propose plusieurs graphes dont les échelles sont :

- Échelle des abscisses : t en secondes (s).
- Échelle des ordonnées des graphes 4, 5 et 6 : V_1 ou V_2 en volts (V).

Partie I - Préliminaire

On considère une fonction du temps t , $V(t)$, solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 V}{dt^2} + b\omega \frac{dV}{dt} + \omega^2 V = 0$$

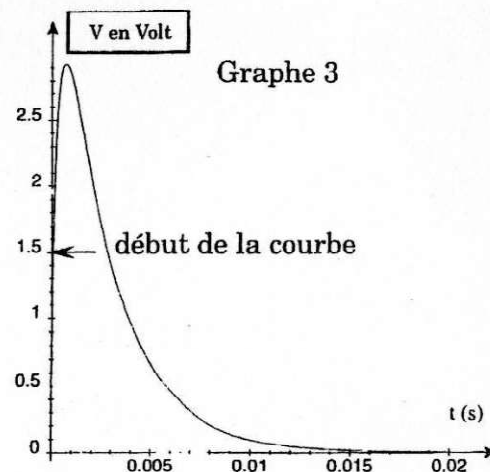
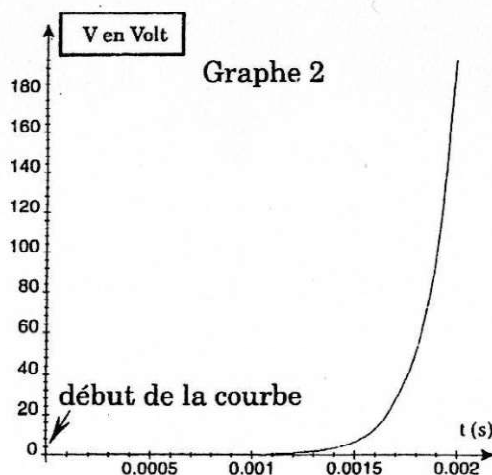
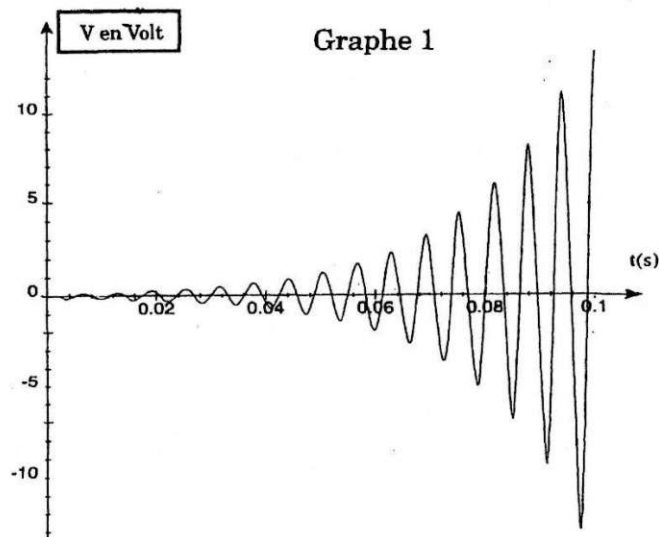
b et ω désignent des coefficients réels et constants, ω est positif.

I.A - Quelles sont les dimensions de b et ω . Justifier brièvement votre réponse.

I.B - Le graphe 1 représente la fonction $V(t)$ en Volt pour un couple de valeurs de b et de ω .

I.B.1) Caractériser brièvement l'allure de la courbe. Quel est le signe de b ? Quel est le signe du discriminant associé à l'équation différentielle ci-dessus ? Que peut-on dire de la valeur de V à l'instant initial ? Justifier brièvement vos réponses.

I.B.2) En mesurant directement sur le graphe 1 les amplitudes et la pseudo-période des oscillations, expliquer pourquoi on peut négliger b^2 devant l'unité et en déduire les valeurs numériques approximatives des coefficients b et ω .



I.C - Le graphe 2 représente la fonction $V(t)$ en Volt pour une seconde valeur du coefficient b (ω n'ayant pas été modifié). Caractériser brièvement l'allure de la courbe. Quel est le signe de b ? Quel est le signe du discriminant associé à l'équation différentielle ? Que peut-on dire de la valeur de V à l'instant initial ? Justifier brièvement vos réponses

I.D - Reprendre la question I.C) dans le cas du graphe 3 où l'on a donné au coefficient b une troisième valeur (ω n'ayant pas été modifié).

Partie II - Montage de base

II.A -

II.A.1) Dans le montage amplificateur (A) de la figure 1, montrer que, lorsque l'A.O. fonctionne en régime linéaire, on peut écrire $V_2 = GV_1$ et exprimer le gain G de l'amplificateur (A) en fonction de R_1 et R_2 .

II.A.2) Dans quel domaine de tensions V_1 peut-il varier sans provoquer la saturation de l'A.O. ? On définira ainsi une valeur critique V_{1C} de la tension d'entrée que l'on exprimera en fonction de V_{sat} et G .

II.A.3) Tracer la courbe représentant V_2 en fonction de V_1 pour V_1 variant de $-V_{sat}$ à $+V_{sat}$.

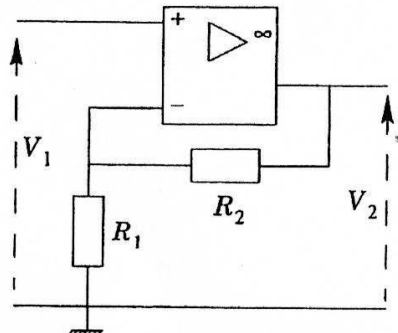


Figure 1 : Amplificateur (A)

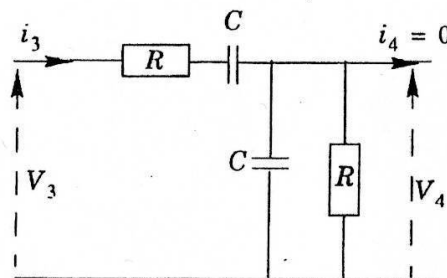


Figure 2 : filtre de Wien (W)

II.B - On considère le « filtre de Wien » (W) représenté figure 2 et on suppose qu'aucun courant ne sorte de ce filtre ($i_4 = 0$). Les équations demandées dans les questions qui suivent seront établies directement sans passer par la notation complexe.

II.B.1) Exprimer le courant d'entrée i_3 en fonction de R , C , de V_4 et de la dérivée dV_4/dt .

II.B.2) Montrer que les tensions d'entrée V_3 et de sortie V_4 sont liées par l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 V_4}{dt^2} + a\omega_0 \frac{dV_4}{dt} + \omega_0^2 V_4 = \omega_0 \frac{dV_3}{dt}$$

Exprimer le coefficient ω_0 en fonction de R et C et déterminer la valeur numérique du paramètre a , valeur que l'on utilisera ultérieurement.

II.C - On relie l'amplificateur (A) et le filtre (W) suivant le schéma de la figure 3.

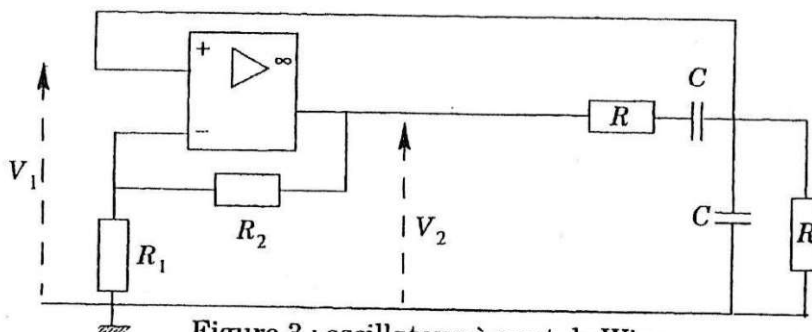


Figure 3 : oscillateur à pont de Wien

II.C.1) Montrer que l'on peut utiliser l'équation obtenue à la question II.B.2.

II.C.2) Montrer que la tension V_1 est régie par le système d'équations différentielles

$$\frac{d^2 V_1}{dt^2} + b_1 \omega_0 \frac{dV_1}{dt} + \omega_0^2 V_1 = 0 \text{ si } |V_1| \leq V_{1C}$$

$$\frac{d^2 V_1}{dt^2} + b_2 \omega_0 \frac{dV_1}{dt} + \omega_0^2 V_1 = 0 \text{ si } |V_1| > V_{1C}$$

Exprimer le coefficient b_1 en fonction du gain G de l'amplificateur (A) et déterminer la valeur numérique du coefficient b_2 .

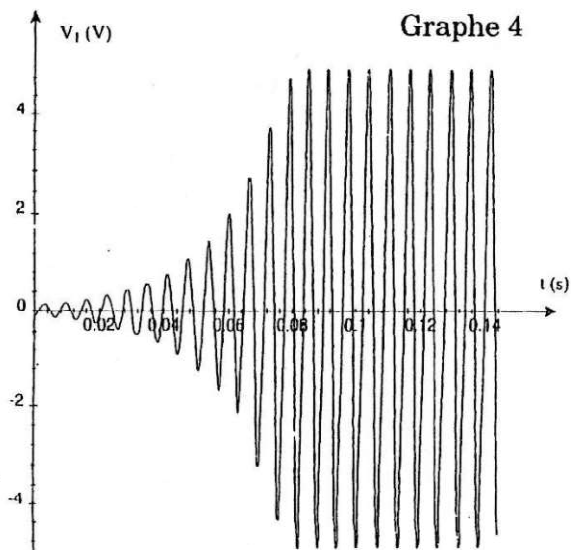
II.C.3) Montrer que la tension V_1 et sa dérivée dV_1/dt sont nécessairement des fonctions continues du temps.

II.C.4) Quelle valeur minimale G_0 doit-on donner au gain G pour faire fonctionner l'oscillateur ? Pourquoi ? Dans toute la suite de ce problème, on supposera évidemment $G > G_0$.

II.D - Première simulation :

on donne à G la valeur $G_1 = 3,1$ et on observe la tension V_1 représentée sur le graphe 4.

II.D.1) En vous aidant des résultats établis lors de la partie I (Préliminaire), commenter de manière précise et claire la forme du graphe. On distingue en particulier deux régimes successifs : un régime transitoire où l'amplitude des oscillations augmente et un régime établi où l'amplitude des oscillations reste constante ; expliquer pourquoi il en est ainsi.



II.D.2) Tracer, en conservant approximativement comme échelle des temps celle du graphe 4, l'allure de la tension V_2 en fonction du temps t .

II.D.3) On se place en régime établi. Mesurer la période des oscillations, en déduire la valeur numérique de la pulsation correspondante et comparer celle-ci à la valeur numérique de ω_0 . Commenter brièvement.

II.E - Seconde simulation : on donne à G la valeur $G_2 = 10$ et on observe la tension V_1 représentée sur le graphe 5.

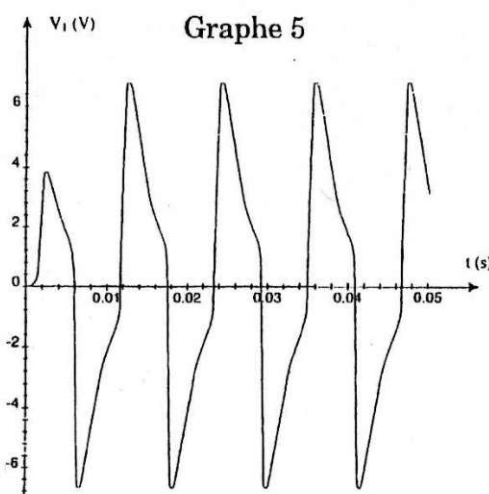
II.E.1) En vous aidant encore des résultats établis lors de la partie I, commenter de manière précise et claire la forme du graphe. Le régime transitoire existe-t-il toujours ?

II.E.2) Tracer, en conservant approximativement comme échelle des temps celle du graphe 5, l'allure de la tension V_2 en fonction du temps t .

II.E.3) Mesurer la période des oscillations en régime établi ; est-elle très différente de celle mesurée en II.D. Pourquoi ?

II.E.4) Retrouver, à partir d'une mesure adéquate sur le graphe, l'ordre de grandeur de la valeur numérique de G_2 .

II.F - Est-il possible avec le montage proposé de régler l'amplitude des oscillations ? Pourquoi ?

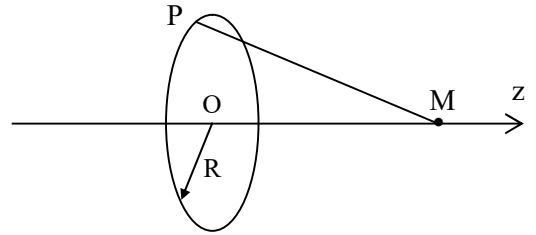


PARTIE 3 : Champ électrostatique créé par une spire

On considère une spire circulaire de centre O, de rayon R et d'axe Oz. Cette spire porte la charge positive Q répartie uniformément avec la densité linéique de charge λ .

I- Champ sur l'axe Oz de la spire

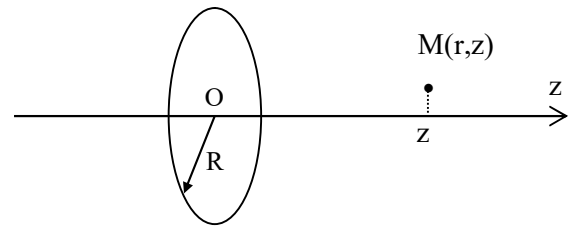
- I-1-** Déterminer la direction du champ électrostatique créé par la spire au point M de l'axe Oz : $\vec{E}(M)$
Comparer les champs aux points M(z) et M'(-z), ces deux points appartenant à Oz.
- I-2-** Déterminer $\vec{E}(M)$ en fonction de Q, R, ϵ_0 permittivité du vide et de z.
- I-3-** Tracer le graphe de E(z)



II- Champ au voisinage de l'axe

On s'intéresse maintenant au champ électrostatique au voisinage de l'axe Oz, soit en un point M défini par ses coordonnées cylindriques (r, θ , z).

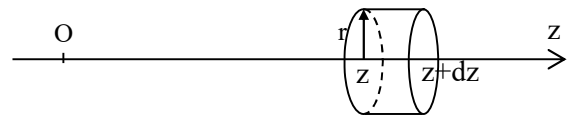
- II-1-** Montrer que le champ ne dépend que de r et z.
Montrer que le champ n'a pas de composante orthoradiale E_θ .



- II-2-** Montrer qu'au voisinage de l'axe Oz le flux du champ $\vec{E}$ est conservatif.

Le champ $\vec{E}$ est également à circulation conservative : la circulation de $\vec{E}$ le long de tout contour fermé C_f $\oint_{P \in C_f} \vec{E}(P) d\vec{l}_P = 0$. A quelle propriété de la force électrostatique peut-on rapprocher cette caractéristique ?

- II-3-a-** Calculer le flux de $\vec{E}$ à travers une surface fermée cylindrique, d'axe Oz dont les bases sont des disques de rayon r petit ($r \ll R$) et de cotes z et z + dz. (voir figure ci-contre).



spire circulaire non représentée

- II-3-b-** En déduire que la composante radiale du champ

$$\text{en M vérifie } E_r(r, z) = -\frac{r}{2} \cdot \frac{dE_z(0, z)}{dz}$$

- II-3-c-** Déterminer l'expression de $E_r(z, r)$

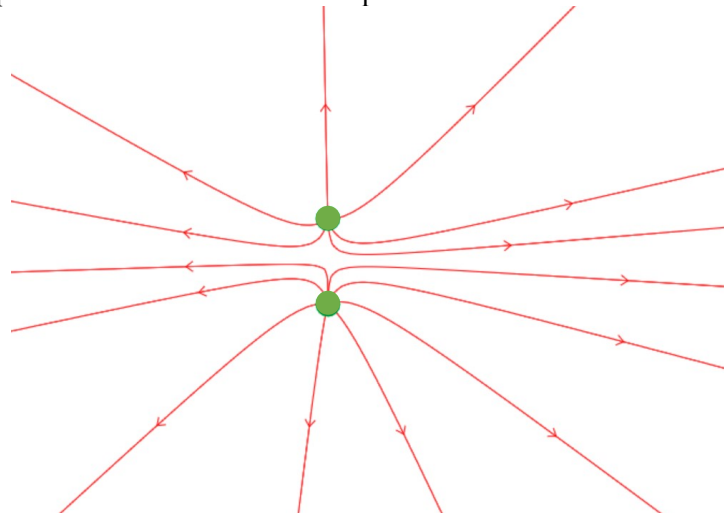
- II-4-** A l'aide d'un logiciel, on trace les lignes de champ dans un plan contenant Oz (cf figure ci-dessous)

- II-4-a-** Q est-elle positive ou négative ?

- II-4-b-** Qu'obtiendrait-on comme lignes de champ à grande distance de la spire ?

- II-4-c-** Que se passe-t-il au point O ?

- II-4-d-** Justifier le fait qu'au voisinage de Oz, les lignes de champ se rapprochent puis s'éloignent de l'axe Oz. On pourra utiliser le résultat de la question II-4-c



PARTIE 4 : Champ gravitationnel terrestre et gravimétrie. (Extrait de Centrale MP 2018)

Données :	Constante de gravitation universelle	$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$
	Rayon de la Terre	$R_T = 6,37 \times 10^3 \text{ km}$
	Masse de la Terre	$M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$
	Unité de mesure de la pesanteur	$1 \text{ gal} = 1,00 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$
	Ordre de grandeur de la sensibilité des gravimètres actuels	$\Delta g = 1 \text{ } \mu\text{gal}$

Certaines questions peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

I Champ gravitationnel et champ de pesanteur terrestre

I.A – Champ gravitationnel créé par la Terre

Q1. Justifier l'énoncé du théorème de Gauss appliqué au champ gravitationnel $\vec{G}(\vec{M})$:

$$\oiint_{P \in \Sigma_G} \vec{G}(\vec{P}) \cdot \vec{n}_{\text{ext}}(\vec{P}) = -4\pi G m_{\text{int } \Sigma_G} \text{ où } \Sigma_G \text{ est une surface fermée}$$

La Terre est assimilée à une boule homogène de rayon R_T , de centre C et de masse M_T uniformément répartie en volume. On repère un point M de l'espace dans le système de coordonnées sphériques d'origine C , associé à la base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$. On appelle $z = r - R_T > 0$ l'altitude d'un point M situé à l'extérieur de la Terre et on associe à ce point un axe (Oz) (verticale du lieu) dont O est en $r = R_T$ et tel que $\vec{e}_z = \vec{e}_r$.

Q2. Montrer que le champ gravitationnel terrestre à l'extérieur de la Terre (en $z > 0$) est identique à celui créé par une masse ponctuelle M_T placée en C puis déterminer l'expression du champ gravitationnel $\vec{G}_T$ à une altitude $z > 0$

I.B – Variation du champ gravitationnel avec l'altitude

Soit un corps de masse m , assimilé à un point matériel, situé à la distance $r = R_T$ du centre C de la Terre (altitude $z = 0$) (figure 1).

Q 3. Montrer que l'intensité du champ gravitationnel selon la verticale s'écrit, pour $z \ll R_T$: $\mathcal{G}_T(z) \approx \frac{GM_T}{R_T^2} \left(1 - 2\frac{z}{R_T}\right)$.

Q 4. Calculer l'altitude dont il faut s'élever pour observer une variation de 1,00% de $\mathcal{G}_T$.

Q 5. Donner l'expression du gradient vertical du champ gravitationnel. Que représente-t-il physiquement ?

Q 6. Les géophysiciens utilisent comme unité de mesure du champ de pesanteur le gal avec $1 \text{ gal} = 1,00 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$. Évaluer la valeur du gradient exprimée en $\mu\text{gal} \cdot \text{cm}^{-1}$ et commenter.

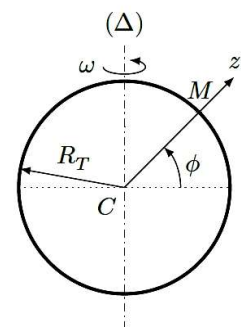


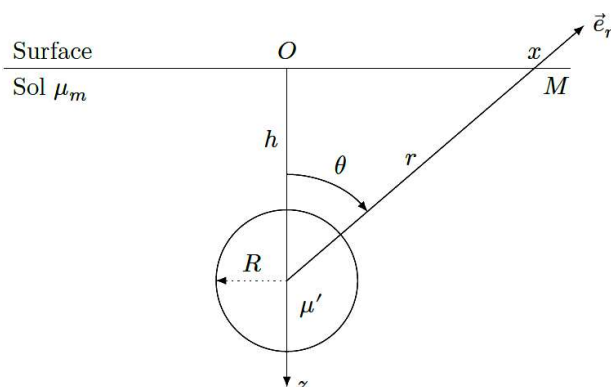
Figure 1

Dans tout ce qui suit, on considère que champ gravitationnel et champ de pesanteur sont synonymes, et on oriente l'axe (Oz) vertical vers le bas.

IV Applications de la gravimétrie

La gravimétrie est l'étude des variations du champ de pesanteur dans l'espace et dans le temps. Elle permet de déterminer la répartition des masses au sein de la Terre et d'avoir ainsi accès à sa structure. Par exemple, la gravimétrie est utilisée pour déterminer la forme de la Terre (géodésie), pour détecter des cavités (génie civil ou archéologie), pour suivre les stockages d'eau (hydrologie continentale).

Dans cette partie, nous allons déterminer, par une analyse gravimétrique, les dimensions d'un corps sphérique enterré dans un sol de masse volumique moyenne μ_m (figure 7).



Q 28. En utilisant le théorème de Gauss gravitationnel, déterminer l'expression du champ de pesanteur en un point M situé à l'extérieur d'une sphère homogène de rayon R et de masse volumique $\mu' = \mu_m + \Delta\mu$ en fonction de μ_m , $\Delta\mu$, G , R , r , distance de M au centre de la sphère, et du vecteur unitaire $\vec{e}_r$ (figure 7).

Le corps sphérique se trouve à une profondeur h dans le sol. Loin de la sphère (pour $r \gg R$), le champ de pesanteur est vertical selon Oz de valeur g_0 .

Q 29. Déterminer g_{Bz} , la composante verticale du champ de pesanteur créé par la boule au point M situé à une distance x de la verticale.

Q 30. Montrer que l'anomalie gravimétrique $\Delta g = g_z - g_0$, qui fait varier le champ de pesanteur apparent en un lieu, est identique au champ de pesanteur g'_z créé par une sphère de masse volumique $\Delta\mu$.

Q 31. Montrer que l'anomalie gravimétrique s'écrit

$$\Delta g = \frac{4\pi G \Delta\mu R^3 h}{3(x^2 + h^2)^{3/2}}$$

Q 32. Tracer l'allure de la courbe Δg en fonction de x pour des sphères identiques enterrées à deux profondeurs différentes h_1 et $h_2 > h_1$.

Q 33. Quel est le lien entre la profondeur h et la largeur à mi-hauteur de la courbe ? Que vaut l'anomalie gravimétrique maximale ?

Q 34. Déterminer, à l'aide la courbe de la figure 8, la profondeur h et le rayon R de la sphère enterrée.

Q 35. Comment rendre indétectable par analyse gravimétrique de l'or stocké dans une grotte sphérique ?

Q 36. La grotte de 1 m de rayon est à 4 m de profondeur. Quelle masse d'or est-il possible de cacher par cette méthode ? Pour information, la masse volumique de l'or est $\rho_{\text{or}} = 19\,300 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Q 37. Une étude archéologique préalable prévoit la disposition de deux grottes sphériques de même dimension (figure 9). Tracer l'allure de la courbe de l'anomalie gravimétrique attendue $\Delta g = f(x)$ en vous aidant de la figure 10.

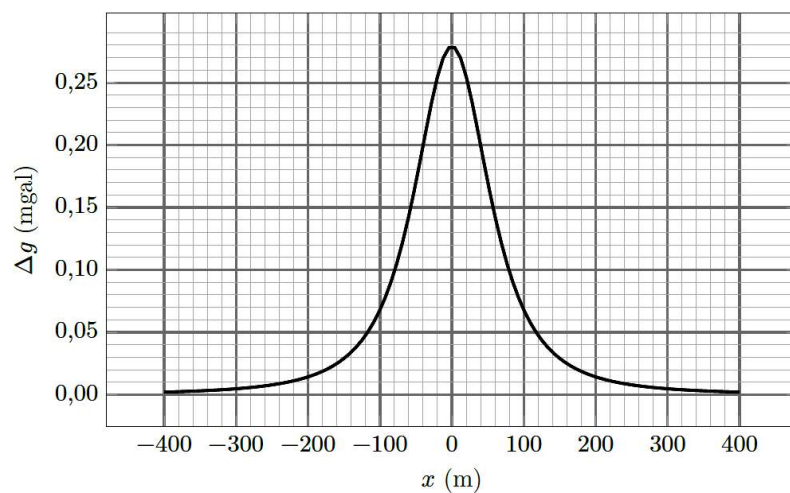


Figure 8 Anomalie gravimétrique Δg pour une sphère enterrée avec $\Delta\mu = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$

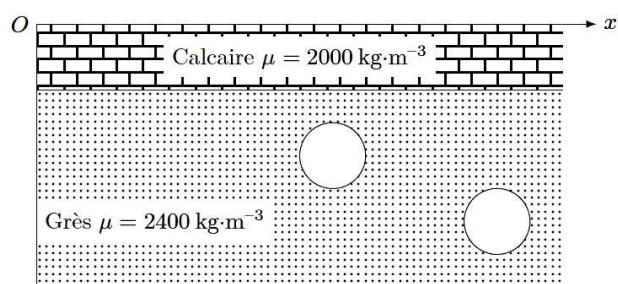


Figure 9

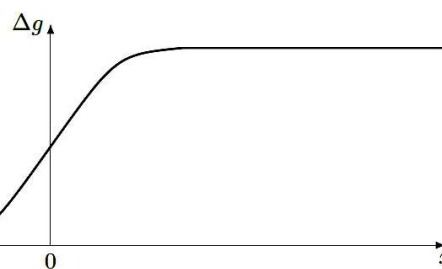
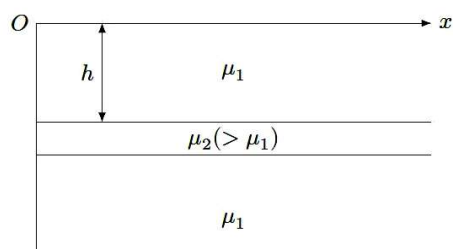


Figure 10 Anomalie gravimétrique pour une plaque horizontale semi-infinie