Problème 2 : Anneau de stockage pour molécules polaires

I- Hexapôle électrostatique.

1- Analyse des symétries

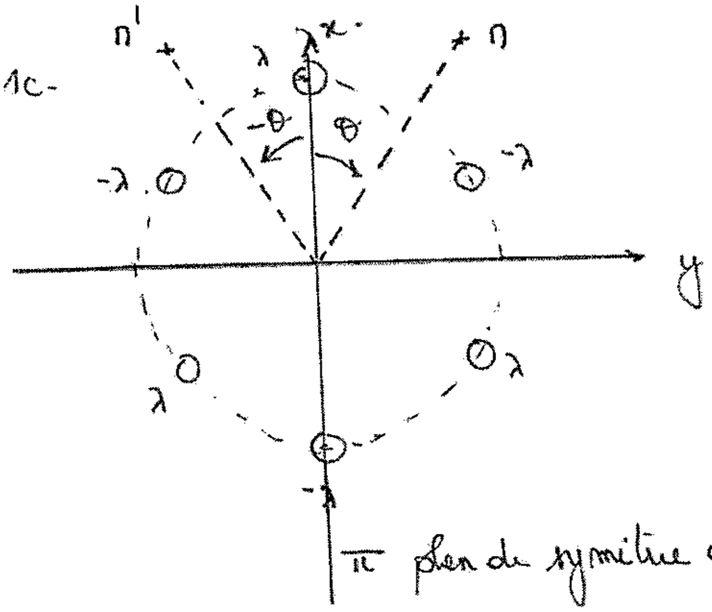
1a- Le système est invariant sous toute translation d'axe Oz.
Donc les coordonnées cartésiennes de $\vec{E}$ de même que V ne dépendent pas de z.

$$\underline{V = V(x,y)} \qquad \vec{E} = \begin{pmatrix} E_x(x,y) \\ E_y(x,y) \\ E_z(x,y) \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} E_r(r,\theta) \\ E_\theta(r,\theta) \\ E_z(r,\theta) \end{pmatrix}$$

$$\left(\text{Rq de plus } E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = 0\right)$$

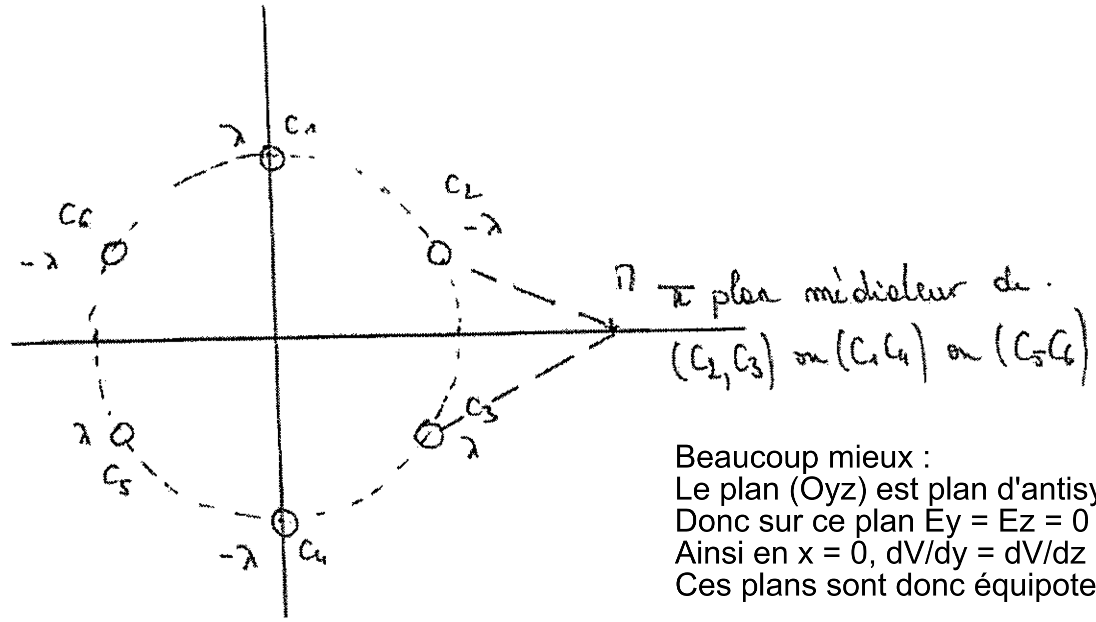
1b. Soit M un point de l'espace.
$(M\,\vec{u_y},\vec{u_z})$ est un plan de symétrie de la distribution de charge.
Donc $\vec{E}(M)$ est contenu dans ce plan $\underline{E_x(M) = 0}$.

1c-



$$\begin{cases} V(r,\theta) = V(r,-\theta) \\ E_r(r,\theta) = E_r(r,-\theta) \\ E_\theta(r,\theta) = -E_r(r,-\theta) \end{cases}$$

1 d -



Beaucoup mieux :
Le plan (Oyz) est plan d'antisymétrie
Donc sur ce plan Ey = Ez = 0
Ainsi en x = 0, dV/dy = dV/dz =0
Ces plans sont donc équipotentiels

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{P \in \{C_1, C_2 \dots C_6\}} \frac{\lambda(P)\, dl_P}{P\Pi}$$

Dans l'intégrale on pourra tjs regrouper 2 à 2 les termes -

$$\frac{-\lambda\, dz}{P_2\Pi} + \frac{\lambda\, dz}{P_3\Pi} = 0 \quad \text{avec } P_2 \in C_2$$
$$\text{et} \quad P_3 = Sym_\pi (P_3)$$
$$P_2\Pi = P_3\Pi.$$

Ainsi $V = 0$.

On peut donc en conclure que le plan π et les 2 autres plans médiateurs sont équipotentiels

Rq $E_r = 0$ sur ces plans car $\vec{E} \perp$ surfaces équipotentielles -

1e - La distribution de charge $\mathcal{D}$ est invariante sous les rotations d'axe Ox et d'angles $n\frac{2\pi}{3}$.

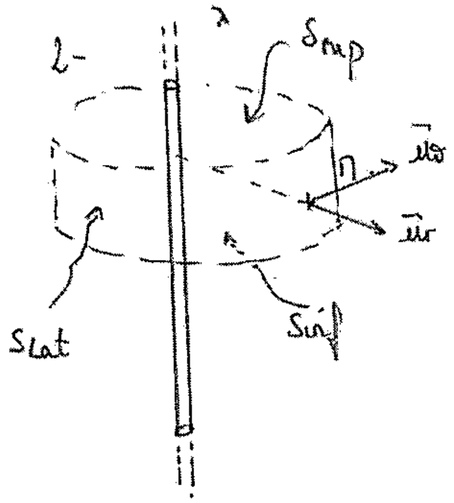
Donc $\underline{V(r,\theta) = V(r, \theta + n\frac{2\pi}{3})}$.

On peut donc décomposer $\theta \longmapsto V(r,\theta)$ en série de Fourier (période angulaire $\frac{2\pi}{3}$; pulsation angulaire $\Omega = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3$)

$$V(r,\theta) = V_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n(r)\cos(3n\theta) + \underbrace{B_n(r)}_{0 \text{ par parité}}\sin(3n\theta)$$

$$\underline{V(r,\theta) = V_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n(r)\cos(3n\theta)}$$

2-



Le cylindre chargé est invariant par toute translation le lg de l'axe Oz et tout rotation autour de Oz.
D'après le principe de Curie $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_r(r) \\ E_\theta(r) \\ E_z(r) \end{pmatrix}$

Soit M un point quelconque :
L'axe $(M, \vec{u_r})$ est un axe de symétrie du cylindre.
Donc $\vec{E}(M) = E_r(r)\,\vec{u_r}$.

Appliquons le théorème de Gauss en utilisant comme surface de Gauss le cylindre de hauteur h de rayon r fermé par 2 disques.

$$\oiint_{P\in S_{Gauss}} \vec{E}(P)\, dS_p\, \vec{n_{ext}}(P) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Avec $$\oiint = \underbrace{\iint_{P\in S_{inf}} \vec{E}(P)\, dS_p\, \underset{-\vec{u_z}}{\vec{n_{ext}}}}_{0} + \underbrace{\iint_{P\in S_{sup}} \vec{E}(P)\, dS_p\, \underset{\vec{u_z}}{\vec{n_{ext}}}}_{0} + \iint_{P\in S_{lat}} \underset{E_r(r)\vec{u_r}}{\vec{E}(P)}\, dS_p\, \underset{\vec{u_r}}{\vec{n_{ext}}}$$

avec r donc E_r constant sur S_{lat}

$$= E_r(r) \iint_{P\in S_{lap}} dS_p = 2\pi r h\, E_r(r)$$

$Q_{int} = \lambda h$ (on ne s'intéresse qu'au champ à l'extérieur du cylindre)

Donc $2\pi r h E_r = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$

$$\underline{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\vec{u_r}}$$

De plus $\vec{E} = -\vec{grad}\, V$ donc $E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{dV}{dr}$.

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r + ct \quad \text{(écriture laide)}$$

$$= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{a} + ct.$$

3. D'après le principe de superposition.

$$V = V_{C_1} + V_{C_2} + \dots + V_{C_6}.$$

$$= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{D_1}{a} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{D_2}{a} - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{D_3}{a} + \dots + V_0$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{D_2 D_4 D_6}{D_1 D_3 D_5} + V_0.$$

On fait le choix de référence du potentiel sur l'axe central où $D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D_5 = D_6$ donc $V_0 = 0$

$$\boxed{V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{D_2 D_4 D_6}{D_1 D_3 D_5}}$$

4. $$\frac{D_2 D_4 D_6}{D_1 D_3 D_5} = \frac{|\underline{z}+R||\underline{z}+jR||\underline{z}+j^2R|}{|\underline{z}-R||\underline{z}-jR||\underline{z}-j^2R|}$$

$$= \frac{|(\underline{z}+R)(\underline{z}+jR)(\underline{z}+j^2R)|}{|(\underline{z}-R)(\underline{z}-jR)(\underline{z}-j^2R)|}$$

$$= \frac{|\underline{z}^3 + \underline{z}^2(R+jR+j^2R) + \underline{z}(j^3R^2+j^2R^2+jR) + j^3R^3|}{|\underline{z}^3 - \underline{z}^2(\qquad) + \underline{z}(\qquad) - j^3R^3|}$$

Avec $j^3 = 1$

$1 + j + j^2 = 0$

$j^3 + j^2 + j = j(j^2 + j + 1) = 0$.

On retrouve bien $\boxed{\dfrac{D_2 D_6 D_4}{D_1 D_3 D_5} = \dfrac{|R^3 + \underline{Z}^3|}{|R^3 - \underline{Z}^3|}}$

5- $\underline{Z} = r e^{i\theta}$ avec $\dfrac{r}{R} \ll 1$ au centre.

$$\left|\frac{R^3 + \underline{Z}^3}{R^3 - \underline{Z}^3}\right| = \frac{\left|1 + \frac{r^3}{R^3} e^{i3\theta}\right|}{\left|1 - \frac{r^3}{R^3} e^{i3\theta}\right|}$$

$$= \left|\left(1 + \frac{r^3}{R^3} e^{i3\theta}\right)\left(1 + \frac{r^3}{R^3} e^{i3\theta}\right)\right| + o\left(\frac{r^3}{R^3}\right)$$

$$= \left|\left(1 + \frac{r^3}{R^3} e^{i3\theta}\right)^2\right| + o\left(\frac{r^3}{R^3}\right)$$

$$= \left|1 + 2\frac{r^3}{R^3} e^{i3\theta}\right| + o\left(\left(\frac{r}{R}\right)^3\right)$$

$$|\quad|^2 = \left(1 + 2\frac{r^3}{R^3}\cos 3\theta\right)^2 + \left(2\frac{r^3}{R^3}\sin 3\theta\right)^2 + o\left(\frac{r^3}{R^3}\right)$$

$$= 1 + 4\frac{r^3}{R^3}\cos 3\theta + o\left(\frac{r^3}{R^3}\right)$$

Donc $V = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \dfrac{D_2 D_4 D_6}{D_1 D_3 D_5}$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{2} \ln |\quad|^2$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{2} \ln\left(1 + 4\frac{r^3}{R^3}\cos 3\theta + o\left(\frac{r^3}{R^3}\right)\right)$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{2} 4 \frac{r^3}{R^3}\cos 3\theta + \left(\frac{r^3}{R^3}\right)$$

$$\boxed{V = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0} \frac{r^3}{R^3}\cos 3\theta}$$

Cette expression vérifie les conditions de symétrie et d'invariance vues à la question 1. (on retrouve d'ailleurs le terme fondamental du développement de Fourier vu au 1d)

6 - Au voisinage d'une électrode impaire par exemple C_1.

$D_1 = a$.

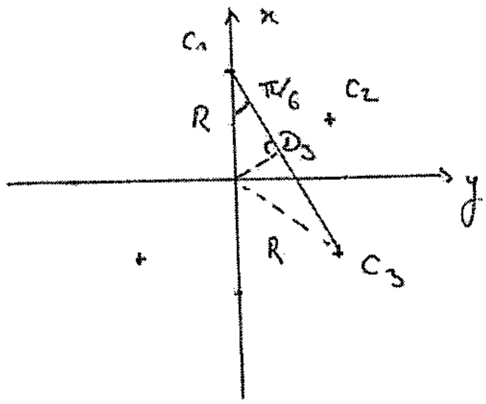
$D_3 = 2R\cos\frac{\pi}{6}$

$= \sqrt{3}R$

$D_5 = \sqrt{3}R$

$D_2 = D_6 = R$

$D_4 = 2R$.



$$V_1 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{2R^3}{a\,3R^2} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{2}{3}\frac{R}{a}.$$

Pour les électrodes paires $\boxed{V_2 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{2}{3}\frac{R}{a}.}$

7 - $U = \Delta V = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0} \ln \frac{2}{3}\frac{R}{a}$

charge portée par les armatures (impaires par exemple)

$Q = 3\lambda l$ (l longueur des armatures)

$$U = \frac{Q}{3l\pi\varepsilon_0} \ln \frac{2}{3}\frac{R}{a} = \frac{Q}{\mathcal{C}}$$

$$\mathcal{C} = \frac{3l\pi\varepsilon_0}{\ln \frac{2}{3}\frac{R}{a}}$$

Capacité par unité de longueur

$$C = \frac{3\pi\varepsilon_0}{\ln \frac{2R}{3a}} = 4,4\,10^{-11}\,\mathrm{Fm^{-1}} = 44\,\mathrm{pFm^{-1}}$$

II - Mouvement des molécules polaires -

1- $\mathcal{E}_p = -\vec{d}.\vec{E} = -d_{eff}\,\|\vec{E}\|$

2- $V = \dfrac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{r}{R}\right)^3 \cos 3\theta$ au voisinage de l'axe.

$\vec{E} = -\vec{grad}\,V$

$E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} = -3\dfrac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\dfrac{r^2}{R^3}\cos 3\theta$

$E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} = +3\dfrac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\dfrac{r^2}{R^3}\sin 3\theta$

$$\boxed{\vec{E} = 3\dfrac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\dfrac{r^2}{R^3}\left(-\cos 3\theta\,\vec{u_r} + \sin 3\theta\,\vec{u_\theta}\right)}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_p = -3\dfrac{\lambda d_{eff}}{\pi\varepsilon_0}\dfrac{r^2}{R^3}}$$

$$\boxed{\vec{F} = -\vec{grad}\,\mathcal{E}_p = +6\dfrac{\lambda d_{eff}}{\pi\varepsilon_0}\dfrac{r}{R^3}\vec{u_r}}$$

3- Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la molécule dans le référentiel du laboratoire considéré galiléen

$$\boxed{\begin{array}{l} m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 6\dfrac{\lambda d_{eff}}{\pi\varepsilon_0 R^3}\,r\vec{u_r} = -K\vec{r} \\ \text{avec } K = -6\dfrac{\lambda d_{eff}}{\pi\varepsilon_0 R^3} \end{array}}$$

Le mouvement sera périodique si $K>0$ soit $d_{eff}<0$

On obtient un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{K}{m}}$, de fréquence $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$

Si $K<0$ $\quad \vec{r} = \vec{A} e^{\sqrt{\frac{-K}{m}}\,t} + \vec{B} e^{-\sqrt{\frac{-K}{m}}\,t}$

Les molécules sont éjectées $\|\vec{r}(t)\|$ augmente.

Rq : on s'est intéressé au mvt dans le plan Oxy.
le pfd projeté sur $\vec{u}_z$ donne $\frac{d^2z}{dt^2} = 0$ $\quad (F_z = 0)$
donc $z(t) = v_{0z}t + z_0$.

4- $$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \frac{v_{0x}}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) \\ y(t) &= \frac{v_{0y}}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) \\ z(t) &= v_{0z}t + z_0 \end{aligned}}$$

5- L'hexapôle sélectionne les molécules tq $d_{eff} < 0$ (dont le mvt dans le plan Oxy est périodique).
Elles se refocalisent en un point M tq $x = y = 0$

D'où $t_{foc} = \frac{\pi}{\omega_0}$

et $\boxed{z_{focalisation} = v_{0z}\frac{\pi}{\omega_0}} + z$

Remarque : on peut évaluer le terme $v_{0z}\frac{\pi}{\omega_0}$
Le jet a une température T
$\langle \frac{1}{2} m v_{0z}^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T$ $\qquad \langle v_{0z}^2 \rangle = \frac{k_B T}{m}$

$z_{focalisation} - z_0 \sim \sqrt{\frac{k_B T}{m}}\,\frac{\pi}{\omega_0}$

6. $$dN(v) = A v^3 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) dv$$
$$= \mathcal{P}(v)\, dv$$

Vitesse la plus probable vérifie $\frac{d\mathcal{P}}{dv} = 0$.

$$0 = \left(3v^2 - v^3 \frac{mv}{k_B T}\right) A \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right)$$

$$v^2 = \frac{3k_B T}{m}$$

$$\boxed{v_{\text{plus probable}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}}$$

La vitesse quadratique moyenne est tq (cours de thermo)

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

$$\boxed{\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}}$$ On retrouve la m

AN $\sqrt{\langle v^2 \rangle} = v_{\text{plus probable}} = 340\ \text{ms}^{-1}$ à 40 K.

Rq : la distribution de vitesse donnée est fausse.

$$dN(v) = A' \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) v^2\, dv.$$

On trouve $\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \neq v_{\text{p. probable}}$

(mais du m. ordre de grandeur -

7 a- $\underset{f0}{\omega_0} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{K}{m}}$ avec $K = -\dfrac{6\lambda}{\pi \varepsilon_0 R^3}\, d_{eff}$

et $V_0 = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \dfrac{2R}{3a}$.

$$|K| = \frac{12\, d_{eff}\, V_0}{R^3 \ln \frac{2R}{3a}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{12 \times 3.10^{-30} \times 5\,10^{4}}{34 \times 1{,}66\,10^{-27} \times (2{,}5\,10^{-4})^3 \ln \frac{10}{3}}} = 165 \text{ rad s}^{-1}$$

7 b. $$z - z_0 = \frac{1}{2\omega_0}\sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = 0{,}97 \text{ m}.$$

III. Anneau de stockage pour les molécules polaires

1 - Au II 3 On avait trouvé

$$\vec{F} = d_{\text{eff}} \frac{6\lambda}{\pi \varepsilon_0} \frac{r}{R^3} \vec{u_r} = d_{\text{eff}} \frac{6\lambda}{\pi \varepsilon_0} \frac{\vec{O'M}}{R^3}$$

où O' est au centre de l'hexagone.

$$\vec{O'M} = (\rho - \rho_T)\vec{e_\rho} + x\vec{e_x}$$

De la forme demandée avec $\underline{K = -d_{\text{eff}} \frac{6\lambda}{\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R^3}}$

En appliquant la seconde loi de Newton à la molécule dans le référentiel du laboratoire considéré galiléen

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

$$\vec{OM} = \rho\vec{e_\rho} + x\vec{e_x}$$

$$\vec{v} = \dot{\rho}\,\vec{e_\rho} + \rho\dot{\varphi}\,\vec{e_\varphi} + \dot{x}\,\vec{e_x}$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e_\rho} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e_\varphi} + \ddot{x}\,\vec{e_x}$$

$$\boxed{\begin{cases} m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = -K(\rho - \rho_T) \\ m(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) = 0 \\ m\ddot{x} = -Kx \end{cases}}$$

2- Théorème du moment cinétique par rapport à l'axe Ox.

$$\frac{dL_x}{dt} = \mathcal{M}_{Ox}(\vec{F})$$

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}$$

$$= \underbrace{\left(\rho\,\vec{e_\rho} + x\vec{e_x}\right) \wedge (-K)\left((\rho-\rho_T)\vec{e_\rho} + x\vec{e_x}\right)}_{\text{Selon } \vec{e_\varphi}}$$

z

Donc $\mathcal{M}_{Ox} = 0$

et $\dfrac{dL_x}{dt} = 0$ $\qquad \underline{L_x = \text{cst}}$.

Or $\vec{L_O} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$

$$= \left(\rho\vec{e_\rho} + x\vec{e_x}\right) \wedge \left(m\dot\rho\,\vec{e_\rho} + m\rho\dot\varphi\,\vec{e_\varphi} + m\dot x\,\vec{e_x}\right)$$

$$L_{Ox} = m\left(\rho^2\dot\varphi\right) = \text{cst}.$$

Energie mécanique.

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot x^2\right) + \left(+\frac{1}{2}K\left((\rho-\rho_T)^2 + x^2\right)\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}m\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2\right) + \frac{1}{2}K(\rho-\rho_T)^2}_{\text{Mvt radial et angulaire } E_{\rho\varphi}} + \underbrace{\frac{1}{2}m\dot x^2 + \frac{1}{2}K x^2}_{\text{Mvt axial}\,.\,E_x}$$

$\dfrac{dE_x}{dt} = 0$ d'après la projection sur $\vec{e_x}$ du PFD (question 3.1)

Donc $\underline{E_x = \text{cst} \quad \text{et également } E_{\rho\varphi} = \text{cst}}$.

(Système soumis à une seule force conservative)

3 - Trajectoire circulaire $\rho(t) = \rho_0$ $x = 0$;

3a - PFD sur $\vec{e_x}$ (question 1) montre qu'une trajectoire ds le plan $x=0$ est possible.

Les 2 autres équations donnent

$$\begin{cases} -m\rho_0\dot{\varphi}^2 = -K(\rho_0 - \rho_T) \\ m\rho_0\ddot{\varphi} = 0. \end{cases}$$

Donc $\dot{\varphi} = $ cst.

et $\rho_0 = \dfrac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \dot{\varphi}^2}\rho_T > \rho_T$

avec $\omega_0^2 = \dfrac{K}{m} > 0$.

Rq on a seulement envisagé $K > 0$.

Si $K < 0$ $\longrightarrow$ le plan $x = 0$ est instable

$\longrightarrow$ On pose $\alpha^2 = \dfrac{-K}{m}$

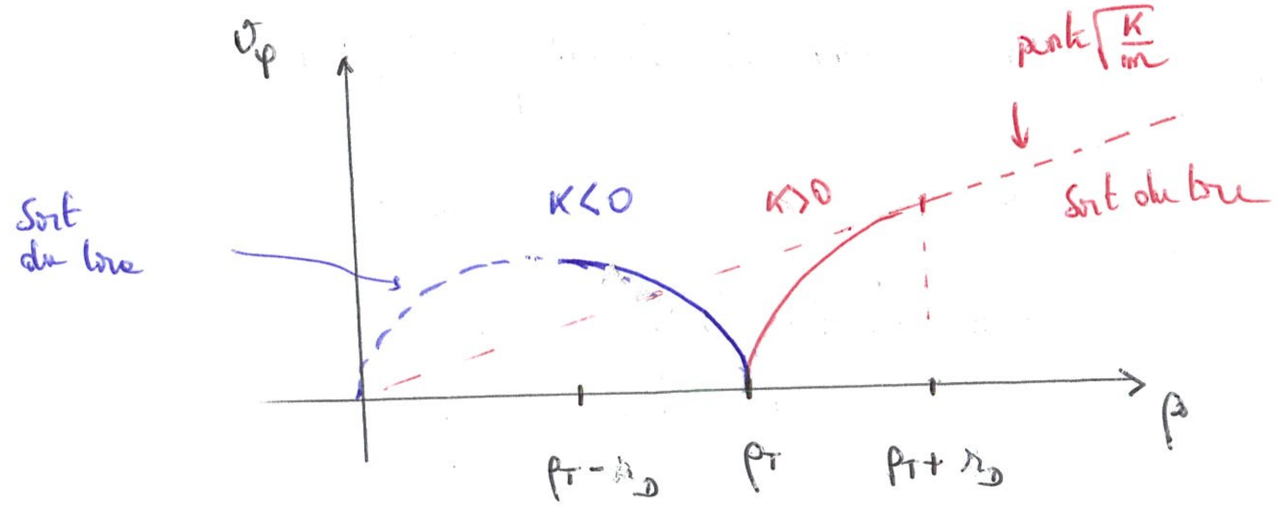
$\rho_0 = \dfrac{\alpha^2}{\alpha^2 + \dot{\varphi}^2}\rho_T < \rho_T$

Les molécules de diff opposés tournent sur des cercles différents.

3b. $\rho_0\dot{\varphi}^2 = \dfrac{K}{m}(\rho_0 - \rho_T)$

$$v_\varphi^2 = \rho^2\dot{\varphi}^2 = \frac{K}{m}\rho_0(\rho_0 - \rho_T)$$

3c) $v_\varphi = \pm\sqrt{\frac{K}{m}\rho_0(\rho_0 - \rho_T)}$ (On peut choisir $v_\varphi > 0$)



Si $K > 0$ v_φ ne doit pas dépasser $v_\varphi(\rho_T + r_D)$ pour que $\rho_0 < \rho_T +$

$$\boxed{v_{\varphi\,max} = \sqrt{\frac{K}{m} r_D(\rho_T + r_D)}} \quad \text{AN } v_{\varphi\,max} = 37\ m\,s^{-1}$$

Si $K < 0$ $\frac{\rho_T}{2} < \rho_T - r_D < \rho_T$

v_φ ne doit pas dépasser $v_\varphi(\rho_T - r_D)$

$$\boxed{v_{\varphi\,max} = \sqrt{\frac{-K}{m} r_D(\rho_T - r_D)}} \quad \text{AN } v_{\varphi\,max} = 37\ m\,s^{-1}$$

Rq pour les AN on utilise

$$V_0 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{2}{3}\frac{R}{a}\right) \quad \text{et} \quad K = 6\,\frac{\lambda\, d_{eff}}{\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{R^3}$$

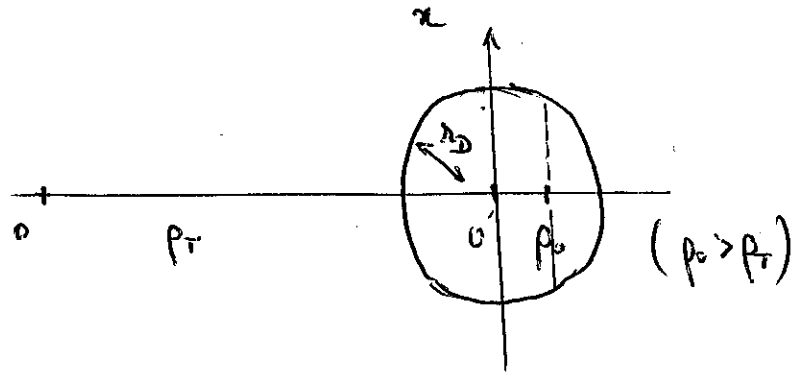
Soit $K = 12\,\dfrac{V_0\, d_{eff}}{\ln\left(\frac{2}{3}\frac{R}{a}\right) R^3}$.

4. Trajectoires telles que $\rho(t) = \rho_0 > \rho_T$ (dans le cas stable)

4a – Dans le cas stable : $\ddot{x} + \frac{K}{m} x = 0$.

$$\underline{x(t) = \frac{v_{0x}}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)}$$

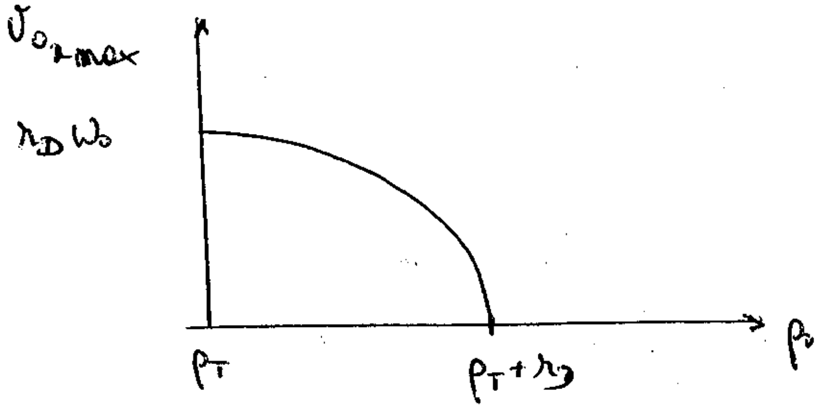
4b –



$$x_{max} = \sqrt{r_D^2 - (\rho_0 - \rho_T)^2}$$

Il faut $x(t) < x_{max}$

soit $\underline{|v_{0x}| < \omega_0 \sqrt{r_D^2 - (\rho_0 - \rho_T)^2}}$



AN $\underline{\left(v_{0x}^{max}\right)_{max} = r_D \omega_0 = 2{,}6 \text{ ms}^{-1}.}$

5- Mouvements dans le plan $x=0$.

5a- D'après la question 2 :

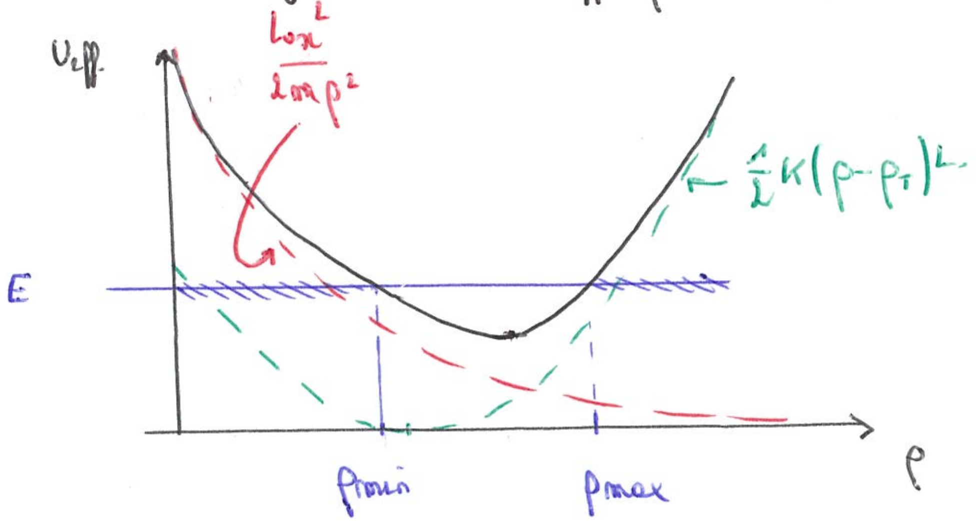
$$E = E_{\rho\varphi} = \frac{1}{2}m\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2\right) + \frac{1}{2}K(\rho-\rho_T)^2.$$

avec $L_{Ox} = m\rho^2\dot\varphi = \text{cste} = m\rho_T v_{\varphi_0}$.

$$E = \frac{1}{2}m\dot\rho^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\left(\frac{L_{Ox}}{m\rho^2}\right)^2 + \frac{1}{2}K(\rho-\rho_T)^2.$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot\rho^2 + \underbrace{\frac{L_{Ox}^2}{2m\rho^2} + \frac{1}{2}K(\rho-\rho_T)^2}_{U_{eff}(\rho)}$$

5b. On a toujours $E > U_{eff}(\rho)$



$U_{eff} \xrightarrow[\rho\to 0]{} +\infty$ ou $\rho \to +\infty$

On aura toujours $\rho \in [\rho_{min}, \rho_{max}]$

5c - Les positions extrêmes vérifient

$$U_{eff}(\rho_{ext}) = E$$

avec $E = \frac{1}{2} m (v_{\varphi_0}^2 + v_{\rho_0}^2)$

$$U_{eff} = \frac{L_{0z}^2}{2m\rho^2} + \frac{1}{2}K(\rho-\rho_T)^2$$

$$= \frac{1}{2} m v_{\varphi_0}^2 \frac{\rho_T^2}{\rho^2} + \frac{1}{2}K(\rho-\rho_T)^2.$$

Donc $\frac{1}{2} m v_{\varphi_0}^2 \frac{\rho_T^2}{\rho^2} + \frac{1}{2}K(\rho-\rho_T)^2 = \frac{1}{2} m v_{\varphi_0}^2 + \frac{1}{2} m v_{\rho_0}^2$

$$\frac{1}{2} m v_{\rho_0}^2 = \frac{1}{2}K(\rho-\rho_T)^2 - \frac{1}{2} m v_{\varphi}^2 \frac{\rho^2-\rho_T^2}{\rho^2}.$$

$$\frac{1}{2} m v_{\rho_0}^2 \rho^2 = \frac{1}{2}K(\rho^2 - 2\rho\rho_T + \rho_T^2)\rho^2 - \frac{1}{2} m v_{\varphi}^2 (\rho^2-\rho_T^2)$$

... polynôme de degré 3 . qui donne . ρ_{min} et ρ_{max}. et $\rho_{min}, \rho_{max} \leq \rho_T + r_D$.

Je pense que l'on attend ici simpl! la résolution de -

$$\frac{1}{2} m (v_{\rho_0}^2 + v_{\varphi_0}^2) = E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2}K(\rho-\rho_T)^2.$$

$$\frac{1}{2} m (v_{\rho_0}^2 + v_{\varphi_0}^2 - v^2) = \frac{1}{2}K(\rho-\rho_T)^2 \leq \frac{1}{2}K r_D^2$$

$$v_{\rho_0}^2 \leq v^2 - v_{\varphi_0}^2 + \frac{K}{m} r_D^2 \leq \frac{K}{m} r_D^2 - v_{\varphi_0}^2$$

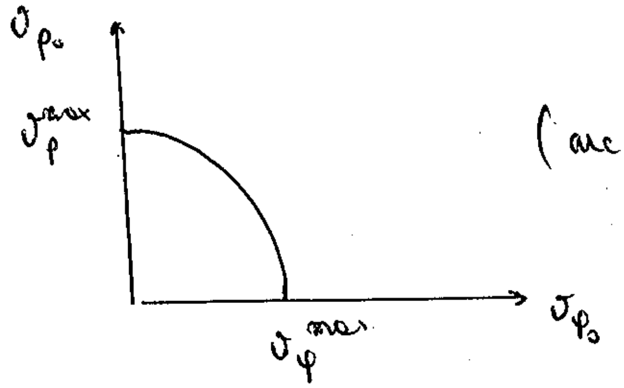
C'est ici que les 2 raisonnements diffèrent - ici le second raiso! n'impose que $v^2 \geq 0$ or v_φ ne peut jamais s'annuler

Soit $|v_{\rho_0}| \leq \sqrt{\frac{K}{m} r_D^2 - v_{\varphi_0}^2}$

On trouve $\underline{|v_{\varphi_0}| < \sqrt{\frac{K}{m}}\, r_D = v_\varphi^{max}}$

Cette valeur est plus contraignante que celle du 3c : $\sqrt{\frac{K}{m}}\, \rho_T r_D$

5d. Donc $\underline{v_\varphi^{max} = \omega_0 r_D = 2{,}6 \ \mathrm{m\,s^{-1}}}$



6a- Le diaphragme r_D sélectionne les molécules de basses vitesses $v_{x_0} < v_{x_0}^{max}$, $v_\rho < v_\rho^{max}$, $v_{\varphi_0} < v_{\varphi_0}^{max}$.

6b. La probabilité pour qu'une molécule soit stockée dans l'anneau, donc ait une vitesse inférieure à v_{max} est

$$P = \frac{N_{v<v_{max}}}{N}$$

avec $N_{v<v_{max}} = \int_{v=0}^{v_{max}} dN_v$ et $N = N_{total} = \int_0^{+\infty} dN_v$.

En utilisant la formule du II 6.

$$N_{v<v_{max}} = \int_0^{v_{max}} v^3 e^{-\alpha v^2} dv.$$

$\alpha = v^2$ $\qquad\qquad$ $d\beta = v e^{-\alpha v^2} dv$

$d\alpha = 2 v\, dv$ $\qquad\qquad$ $\beta = -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha v^2}$

$$N_{v<v_{max}} = \left[-\frac{1}{2\alpha} v^2 e^{-\alpha v^2}\right]_0^{v_{max}} + \int_{v=0}^{v_{max}} \frac{v}{\alpha} e^{-\alpha v^2} \, dv .$$

$$= \left[-\frac{1}{2\alpha} v^2 e^{-\alpha v^2}\right]_0^{v_{max}} + \left[-\frac{1}{2\alpha^2} e^{-\alpha v^2}\right]_0^{v_{max}}$$

$$= -\frac{1}{2\alpha} v_{max}^2 e^{-\alpha v_{max}^2} + \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{1}{2\alpha^2} e^{-\alpha v_{max}^2}$$

$$= \frac{1}{2\alpha^2}\left(1 - \left(1 + v_{max}^2 \alpha\right) e^{-\alpha v_{max}^2}\right)$$

De même

$$N_{tot} = \left[-\frac{1}{2\alpha^2}\left(1 + \alpha v^2\right) e^{-\alpha v^2}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2\alpha^2} \Big($$

$$P = \frac{N_v}{N_{tot}} = 1 - \left(1 + v_{max}^2 \alpha\right) e^{-\alpha v_{max}^2} .$$

$$= 1 - \left(1 + \frac{m v_{max}^2}{2 k_B T}\right) e^{-\frac{m v_{max}^2}{2 k_B T}} .$$

AN (ordre de grandeur) : $v_{max}^2 = v_{\rho_0}^2 + v_{\varphi_0}^2 \simeq 40 \, m s^{-1}$.

$$\frac{m v_{max}^2}{2 k_B T} = \frac{34 \times (1{,}66 \cdot 10^{-27}) \, 40^2}{2 \times 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 140}$$

$$= \frac{3{,}4 \times 1{,}66 \times 1{,}6}{2 \times 1{,}38 \times 1{,}4} \, 10^{-2}$$

$$= 2 \cdot 10^{-2}$$

$$\ll 1$$

Comme $\alpha v_{max}^2 \ll 1$.

On peut simplifier l'expression de P.

$$P = 1 - (1 + \alpha v_{max}^2)(1 - \alpha v_{max}^2)$$
$$= 1 - \left(1 - (\alpha v_{max}^2)^2\right)$$
$$\underline{P = (\alpha v_{max}^2)^2}.$$

Ainsi $\underline{P \simeq 4 \cdot 10^{-4}}$

Un nombre extrêmement faible de particules sont piégées.
Pour augmenter P on peut diminuer T pour augmenter α.