

DEVOIR SURVEILLÉ n°1
Samedi 22 novembre 2025 – Durée 4h

L'épreuve contient 4 parties totalement indépendantes.

La calculatrice est autorisée pour certaines parties et pas d'autres ; veuillez respecter cette consigne !

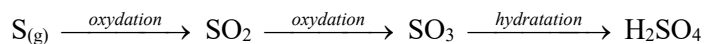
Partie I : quelques exemples de la chimie du phosphore

Calculatrice interdite

d'après CCP MP 2008, adapté comme une épreuve des Mines

Consacrez environ une heure à ce problème

L'acide sulfurique (H_2SO_4) est un produit très utilisé en chimie et très important du point de vue industriel. En France, la matière première de sa fabrication est le soufre qui est lui-même préparé à partir du sulfure d'hydrogène (H_2S) provenant de la désulfuration du gaz naturel. L'acide sulfurique est ensuite obtenu en trois étapes :

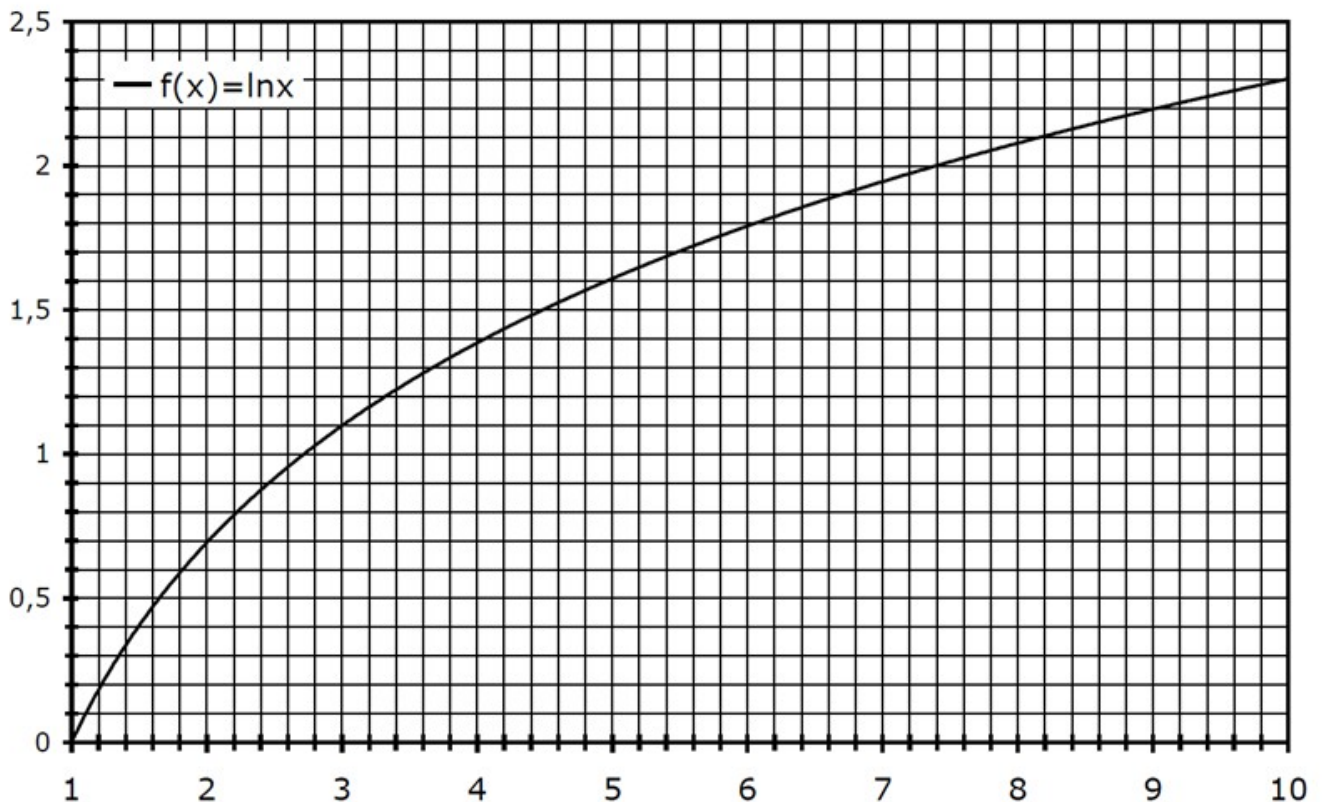


Dans ce problème nous étudierons l'étape d'oxydation du dioxyde de soufre (SO_2) en trioxyde de soufre (SO_3) ainsi que l'utilisation des ions sulfate (SO_4^{2-}) en chimie analytique.

Les parties A ; B et C sont indépendantes.

Données

- Numéro atomique de l'oxygène et du soufre : $Z(O) = 8$; $Z(S) = 16$.
- Constantes d'acidité de l'acide sulfureux (H_2SO_3) à $25^\circ C$: $pK_{a,1} = 1,8$ et $pK_{a,2} = 7,2$.
- Constantes d'acidité de l'acide sulfurique (H_2SO_4) à $25^\circ C$: 1^{ère} acidité : forte ; 2^{ème} acidité : $pK_a = 2$.
- Produit ionique de l'eau à $25^\circ C$: $pK_e = 14$.
- Produit de solubilité du sulfate de baryum ($BaSO_4$) à $25^\circ C$: $pK_s = 10$.
- Le nitrate de baryum et le sulfate de sodium sont des sels solubles totalement dissociés en phase aqueuse.
- Constante des gaz parfaits : $R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$



A- Propriétés du dioxyde de soufre et de l'acide sulfureux

- 1- Indiquer, en vous justifiant, les positions des atomes d'oxygène et de soufre dans la classification périodique, ainsi que leurs nombres d'électrons de valences respectifs.
- 2- Écrire une représentation de Lewis de la molécule de dioxyde de soufre SO_2 , sachant que S est l'atome central.

Lors de sa dissolution dans l'eau, le dioxyde de soufre se transforme totalement en acide sulfureux selon la réaction : $\text{SO}_2 + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{H}_2\text{SO}_3$.

- 3- Écrire les réactions de dissociation en milieu aqueux de ce diacide faible.

Après avoir fait barboter, à 25°C , du dioxyde de soufre dans de l'eau pure, on obtient une solution aqueuse de $\text{pH} = 2,5$. Les espèces susceptibles d'être présentes dans le milieu sont exclusivement : H_2O ; H_3O^+ ; HO^- ; H_2SO_3 ; HSO_3^- et SO_3^{2-} .

- 4- Écrire l'équation traduisant l'électroneutralité de la solution et en déduire les concentrations molaires : $[\text{H}_2\text{SO}_3]$; $[\text{HSO}_3^-]$ et $[\text{SO}_3^{2-}]$.

B- Utilisation des sulfates en chimie analytique

- 5- Écrire une représentation de Lewis de la molécule de trioxyde de soufre SO_3 , sachant que S est l'atome central.

L'acide sulfurique se comporte en phase aqueuse comme un diacide dont la première acidité est forte et conduit à l'anion hydrogénosulfate HSO_4^- ; sa seconde acidité conduit à la formation de l'anion sulfate SO_4^{2-} qui forme avec les cations baryum Ba^{2+} un sel peu soluble dans l'eau : le sulfate de baryum BaSO_4 . Les ions baryum (Ba^{2+}) présents dans une solution peuvent ainsi être dosés par une solution d'ions sulfate. L'équivalence est souvent détectée en suivant la conductivité de la solution contenue dans le bécher.

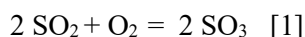
- 6- Écrire l'équation bilan traduisant la réaction de dosage.

Lors du dosage de $V_{b1} = 50 \text{ mL}$ d'une solution de nitrate de baryum par une solution de sulfate de sodium de concentration molaire $C_0 = 0,010 \text{ mol.L}^{-1}$, un volume équivalent (V_{eq0}) de 20 mL est obtenu. Lors de ce dosage, le pH de la solution reste supérieur à 7.

- 7- Exprimer le rapport : $[\text{HSO}_4^-] / [\text{SO}_4^{2-}]$ en fonction du pH de la solution et calculer sa valeur numérique pour $\text{pH} = 7$. Que peut-on en conclure concernant le dosage ?
- 8- Calculer la concentration molaire en baryum (C_{b1}) de la solution analysée.
- 9- Calculer la concentration molaire en baryum dans la solution à l'équivalence et en déduire le pourcentage molaire de baryum restant en solution à l'équivalence.

C. Etude de la réaction d'oxydation du dioxyde de soufre en trioxyde de soufre

En phase gazeuse l'oxydation du dioxyde de soufre conduit à la formation de trioxyde de soufre selon la réaction équilibrée ci-dessous :



On donne pour cette réaction : $-RT \cdot \ln(K^\circ) = a - b \cdot T$ avec $a = -198 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $b = -189 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

10- Calculer, à un ordre de grandeur près, $-RT \cdot \ln(K^\circ)$ à $T_0 = 298 \text{ K}$ de la réaction [1] et commenter.

11- Un système constitué de dioxyde de soufre, de dioxygène et de trioxyde de soufre, est à l'équilibre à la température $T_1 = 750 \text{ K}$. Quand on élève la température, à pression constante, la réaction [1] évolue-t-elle dans le sens 1 ou dans le sens 2 ? Justifier votre réponse.

12- En justifiant, indiquer l'influence, à température constante, de la pression totale sur le taux de conversion à l'équilibre du dioxyde de soufre.

Un mélange est initialement constitué par 100 moles de dioxyde de soufre et par 50 moles de dioxygène. La réaction [1] conduit, sous la pression P_1 et à la température $T_1 = 750 \text{ K}$, à un état d'équilibre caractérisé par un avancement $\xi_1 = 48$ moles. La constante d'équilibre de la réaction à $T_1 = 750 \text{ K}$ est $K^0(T_1) = 1,0 \cdot 10^4$.

13- Calculer la quantité de matière de chaque composé à l'équilibre et en déduire la valeur numérique de la pression P_1 avec un chiffre significatif.

Dans toute la suite, on s'intéresse à un mélange gazeux qui sort d'un four avec la composition molaire suivante : 8% de dioxyde de soufre, 12% de dioxygène et 80% de diazote. Ce mélange gazeux est introduit en continu dans un convertisseur fonctionnant en régime stationnaire, à pression constante, au sein duquel l'oxydation de SO_2 en SO_3 est réalisée selon la réaction [1]. Le diazote se comporte comme un gaz inerte.

On suppose d'abord que le convertisseur fonctionne de façon isotherme à la température $T_1 = 750 \text{ K}$; on observe alors que 98% du SO_2 est oxydé en SO_3 .

14- En raisonnant sur 100 mol de gaz en entrée, déterminer les proportions de chaque constituant à la sortie du convertisseur et montrer que la valeur de la pression de travail est sensiblement la même qu'à la question précédente si l'on suppose qu'un état d'équilibre est atteint en sortie.

On suppose maintenant que le convertisseur fonctionne de façon adiabatique sous une pression constante égale à 1 bar. Le mélange gazeux étant toujours introduit à 750 K, on observe que 60% du SO_2 est oxydé en SO_3 .

15- Commenter cette chute du taux de conversion.

16- Dans les hypothèses de la question précédente, un état d'équilibre est-il atteint à la sortie du convertisseur ?

Partie 2 : La comète 13P/Olbers. (Extrait de Mines MP 2009)

Calculatrice autorisée

L'astronome allemand HEINRICH W. M. OLBERS (1758—1840) découvrit les astéroïdes Pallas et Vesta en 1802 et en 1807 ; en 1831, il réalisa la première observation de la comète qui porte son nom (13P/Olbers). Les caractéristiques orbitales de cette comète ont été déterminées initialement par C. F. GAUSS et F. BESSEL. Elle a été observée pour la dernière fois lors de son passage au périhélie (distance minimale au Soleil) le 10 janvier 1956. Certaines propriétés de cette comète sont examinées dans la Partie I.

Les vecteurs sont notés en caractères gras : $\mathbf{v}$, $\mathbf{F}$ et leurs normes en italique $\|\mathbf{v}\| = v$, $\|\mathbf{F}\| = F$. Dans le système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) et dans la base orthonormée $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$, on rappelle que $\mathbf{grad} f(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi$. On note $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ la dérivée d'une fonction $x(t)$.

Les parties I.A et I.B de ce problème peuvent être abordées indépendamment.

I.A. — Mouvements cométaires

On étudie dans cette partie le mouvement d'un corps ponctuel M de masse m , soumis à l'action d'un centre attracteur fixe à l'origine O des coordonnées d'un référentiel galiléen $\mathcal{R}$. On posera $r = \|\mathbf{OM}\|$. L'action de ce centre attracteur est décrite par une force unique $\mathbf{F} = -m \cdot \mathbf{grad} U(r)$, où U est une fonction supposée connue. On note aussi $\mathbf{v}$ la vitesse de M dans $\mathcal{R}$, $\mathbf{L}_O = m \mathbf{OM} \wedge \mathbf{v}$, $L = \|\mathbf{L}_O\| > 0$ et $C = L/m$.

□ 1 — Montrer que le mouvement de M est plan.

On choisira d'appeler (Oxy) ce plan, orienté par la convention $\mathbf{L}_O = L \mathbf{e}_z$; l'étude du mouvement de M dans (Oxy) s'effectuera en coordonnées polaires (r, φ) .

□ 2 — On note $E = m\varepsilon$ l'énergie mécanique de M . Exprimer ε en fonction de r , C , $\dot{r}$ et $U(r)$.

Le point M est en fait le centre d'une comète sphérique et homogène se déplaçant dans le champ de gravitation du Soleil (de masse $M_\odot$). Pour tout le reste de la partie I.A, on adopte l'expression $U(r) = -K/r$ où K est une constante, et l'on se place dans le référentiel supposé galiléen dans lequel le Soleil est fixe, homogène et sphérique. De plus, on néglige l'influence des tous les autres corps du système solaire.

□ 3 — Exprimer K en fonction de la constante de la gravitation universelle $\mathcal{G}$ et de la masse du Soleil $M_\odot$.

□ 4 — À quelle condition sur ε le mouvement de M vérifie-t-il $r_{\min} \leq r \leq r_{\max} < \infty$ avec $r_{\min} \neq r_{\max}$? Les constantes $r_{\min}$ et $r_{\max}$ sont respectivement appelées périhélie et aphélie de la trajectoire.

On suppose désormais que la condition de la question 4 est vérifiée. L'origine des instants ($t = 0$) et des angles polaires ($\varphi = 0$) sera choisie de sorte que $r(t = 0) = r_{\min}$, $\varphi(t = 0) = 0$.

□ 5 — Exprimer ε et C en fonction de K , $r_{\min}$ et $r_{\max}$ puis en fonction de K , $a = \frac{r_{\max} + r_{\min}}{2}$ et $p = \frac{r_{\max} r_{\min}}{a}$.

□ 6 — Quelle est, sans démonstration, la nature de la trajectoire de M ? Indiquer en justifiant votre réponse, la signification physique des paramètres a , p et $e = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}}$? Représenter la trajectoire de M en précisant les points et dimensions remarquables.

On exprimera $r_{\min}$ et $r_{\max}$ en fonction de a et e .

□ 7 — On étudie la partie de la trajectoire pour laquelle $0 < \varphi < \pi$. Quel est alors le signe de $\dot{r}$? Exprimer $\dot{r}$ en fonction de ε , K , C et r . Montrer que la durée τ de parcours de $r_{\min}$ à $r(\varphi)$ le long de cette trajectoire s'écrit

$$\tau = \sqrt{\frac{a}{K}} \int_{r_{\min}}^{r(\varphi)} \frac{r}{\sqrt{a^2 e^2 - (r - a)^2}} dr$$

❑ 8 — On effectue le changement de variable $r = a(1 - e \cos \xi)$. L'angle ξ est appelé *anomalie excentrique*. Exprimer la durée τ du trajet du mobile M depuis l'instant initial jusqu'à sa position actuelle repérée par ξ , en fonction de ξ , e , a et K puis de ξ , e et de la période T du mouvement de M . Quel est le nom de la relation qui lie T , K et a ?

On considère que la trajectoire de la Terre autour du Soleil est circulaire, de rayon $a_0 = 1$ UA (unité astronomique) et de période $T_0 = 1$ année = 365,25 jours. Les caractéristiques orbitales, assez stables, de la comète 13P/Olbers sont les suivantes : excentricité $e = 0,930$; distance au Soleil au périhélie $r_{\min} = 1,18$ UA.

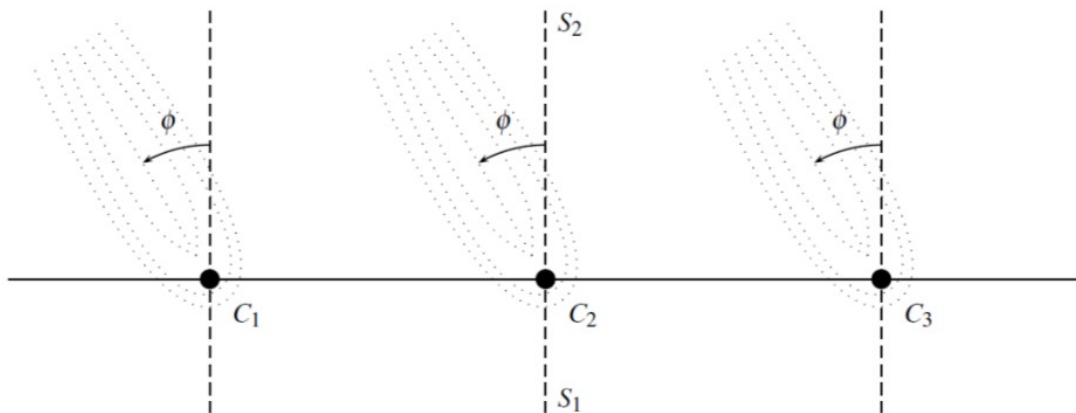
❑ 9 — À quelle date la comète reviendra-t-elle pour la prochaine fois au périhélie ?



Comète Ikeya-Zhang photographiée en 2002 à l'observatoire de Haute-Provence.

I.B. — La queue de la comète

En 1811, OLBERS proposa pour la première fois une théorie quantitative pour expliquer la formation de la queue des comètes, en imaginant que les particules qui la composent sont soumises à une force répulsive d'origine électrique variant comme le carré de l'inverse de la distance au Soleil. On connaît aujourd'hui le mécanisme de formation de la queue de la comète, en particulier si elle est formée de poussières solides.



Les poussières sont entraînées par un flux de particules (le vent solaire) émises par le Soleil et se déplaçant à une vitesse de l'ordre de $400 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. On étudie pour simplifier (cf. ci-dessus) une comète se déplaçant en ligne droite à la vitesse de $30 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$; la droite en traits pleins désigne la trajectoire de la comète, et les traits pointillés la direction du vent solaire.

❑ 10 — En justifiant votre réponse, indiquer si le Soleil est disposé du côté S_1 ou du côté S_2 sur la figure ci-dessus.

❑ 11 — En justifiant tout autant la réponse et sur cette même figure, la comète se déplace-t-elle dans le sens $C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_3$ ou dans le sens $C_3 \rightarrow C_2 \rightarrow C_1$? Calculer l'angle ϕ entre la direction Soleil-comète et la direction moyenne de la queue de la comète.

FIN DE LA PARTIE I

Partie 3 : Etude d'un satellite complexe.

Calculatrice interdite

(Inspiré de X M 1991, Mines MP 2007 et Mines MP 2011)

Ce problème est composé de trois sous parties ; les sous-parties II. et III. sont indépendantes.

Un satellite en orbite autour de la Terre est constitué de trois parties (figure 1) :

- un premier module de masse m_1 , assimilé à un point M_1 ;
- un second module de masse m_2 , assimilé à un point M_2 ;
- un long filin de longueur L reliant les deux modules, assimilé à un fil de masse linéique λ .

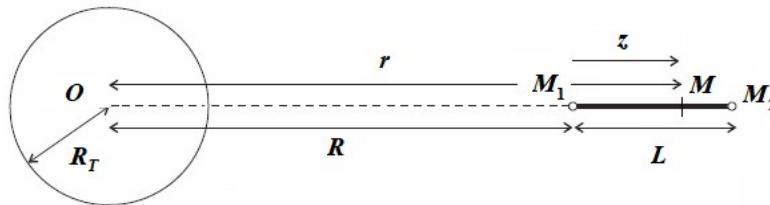


Figure 1 : Constitution du satellite et repérage d'un point M quelconque du filin.

Dans le référentiel géocentrique, ce satellite est en mouvement circulaire uniforme le long d'un méridien terrestre, à la vitesse angulaire ω , le filin étant supposé tendu radialement dans les deux premières parties du problème.

L'orbite est suffisamment haute pour que l'on ne prenne en compte aucun frottement du satellite avec l'atmosphère. On note O le centre de la Terre, R_T son rayon, M_T sa masse, $R = OM_1$ et on suppose que $R \gg L$.

Tous les calculs seront effectués à l'ordre 1 en L/R .

Enfin, pour tout point M du filin, on note $r = OM$ et $z = r - R$.

On introduit deux référentiels :

- Le référentiel géocentrique noté $\mathcal{R}_0$;
- Le référentiel lié au filin lorsque celui-ci est tendu radialement comme sur la figure 1, noté $\mathcal{R}$; on associe à ce référentiel un repère (M_1xyz) centré en M_1 , dont l'axe (M_1z) est vertical ascendant et l'axe (M_1x) est dirigé selon la vitesse de M_1 dans $\mathcal{R}_0$. Les vecteurs unitaires associés à ce repère sont notés $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Dans tout le problème, lorsqu'il est demandé d'exprimer « en fonction des données », seules les grandeurs suivantes doivent potentiellement intervenir en plus des variables cinématiques : m_1 , m_2 , λ , L , R , la masse totale m du satellite si elle apparaît naturellement, et la grandeur G_1 définie à la question I.3. ; en particulier le produit GM_T , où G est la constante de gravitation universelle, ne doit pas intervenir.

I- Questions préliminaires.

- 1- Comment le référentiel $\mathcal{R}_0$ est-il défini ? Pourquoi n'est-il pas galiléen ? A quelle condition peut-on toutefois le supposer galiléen ? Dans toute la suite du problème, $\mathcal{R}_0$ sera supposé approximativement galiléen.
- 2- Exprimer la masse totale m du satellite en fonction des données puis déterminer la distance r_0 entre le barycentre S du satellite et le centre de la Terre.
- 3- On note $G(r)$ la norme du champ de gravitation terrestre à une distance r de son centre et G_1 sa valeur en $r = R$, position de M_1 . Rappeler l'expression usuelle de $G(r)$ puis l'exprimer en fonction des seules grandeurs G_1 , R et r .
- 4- En supposant qu'il est correct d'assimiler l'ensemble du satellite à unique point matériel pour effectuer l'étude, déterminer l'expression de sa vitesse angulaire de révolution ω en fonction des données, à l'ordre 1 en L/R . Cette expression n'est pas utile pour la suite.

II- Etude détaillée de la tension du filin et de la rotation du satellite.

Pour cette étude détaillée, on se place dans le référentiel $\mathcal{R}$. On s'intéresse alors à un point M quelconque du filin, de coordonnée r , et on introduit les notations suivantes :

- On désigne par $\vec{F}_g(M)$ la somme des forces de gravitation et d'inertie s'exerçant sur une masse ponctuelle quelconque m_0 au repos dans $\mathcal{R}$, placée en M , et on pose : $\vec{F}_g(M) = m_0 X(r) \vec{e}_z$.
- On désigne par $\vec{T}(r)$ la force de tension qui s'exerce tangentiellement au filin, au point M , sur la portion du filin d'altitude inférieure (exercée par la portion d'altitude supérieure), et on note : $\vec{T}(r) = T(r) \vec{e}_z$.

1- Montrer que $\vec{F}_g(M)$ est colinéaire à $\vec{e}_z$ et exprimer $X(r)$ en fonction des données et de ω , en précisant la dimension de cette grandeur.

2- Dans cette question on n'utilise pas la forme explicite de $X(r)$.

2a- Ecrire la condition d'équilibre de l'élément de filin compris entre les coordonnées r et $r + \Delta r$ où $\Delta r \ll L$.

2b- En faisant tendre Δr vers 0, montrer que $\frac{dT}{dr}(r)$ est proportionnel à $X(r)$ puis exprimer $T(r)$ en introduisant une primitive Y de la fonction X .

2c- Calculer les tensions $T(R)$ et $T(R+L)$ aux deux extrémités du filin M_1 et M_2 , en exploitant l'équilibre des deux modules qui lui sont attachées.

2d- En utilisant les questions 2.b et 2.c, montrer qu'à l'ordre 1 en z/R , on a :

$$T(r) = -(m_1 + \lambda z) \times X(R)$$

On rappelle que $z = r - R$. Connaissant la fonction X (question II.1), on a ainsi accès à la tension en tout point du filin et il est possible de discuter la solidité du satellite, mais ce n'est pas approfondi ici.

3- On cherche maintenant une expression de la vitesse angulaire de révolution ω du satellite, en fonction des données, à l'ordre 1 en L/R .

3a- Montrer que les résultats de la question précédente imposent également la relation suivante, où X' est la dérivée de la fonction X : $m \times X(R) + m_2 L \times X'(R) = 0$

3b- En utilisant la forme explicite de la fonction X , obtenue question II.1, en déduire l'expression de ω attendue.

3c- Evaluer numériquement la quantité : $1 - \omega/\omega_1$, où ω_1 est la vitesse angulaire que l'on obtiendrait si toute la masse du satellite était en M_1 et commenter. On adoptera les valeurs suivantes :

$$m_1 = m_2 = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \quad - \quad \lambda = 1,0 \text{ kg.m}^{-1} \quad - \quad L = 100 \text{ m} \quad - \quad R = 7200 \text{ km}$$

3d- Retrouve-t-on pour ω la même expression que celle obtenue à la question I.4 ? L'éventuel écart numérique est-il significatif ?

III- Stabilisation du satellite par gradient de gravité.

On se place toujours dans le référentiel $\mathcal{R}$ mais on suppose maintenant que, dans ce référentiel, le satellite peut tourner autour de son barycentre S dans le plan de son orbite (figure 2). On souhaite étudier ce mouvement et ses conséquences.

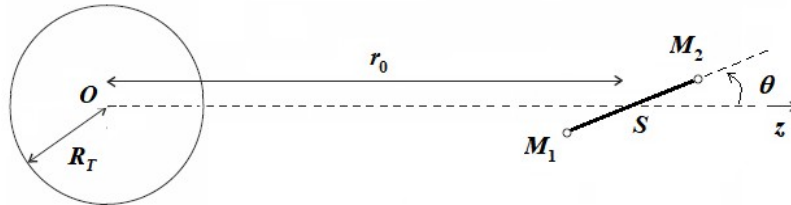


Figure 2 : Repérage de la rotation du satellite dans le plan de son orbite.

On adopte pour cela les hypothèses et notations suivantes :

- On repère ce mouvement de rotation par l'angle : $\theta = (Sz, \overrightarrow{SM_2})$.
- On note $r_0 = OS$ et on suppose que $r_0 \gg L$ et que les calculs peuvent être faits à l'ordre 1 en L/r_0 ; r_0 remplace désormais R dans les données.
- On note toujours ω la vitesse angulaire de S dans $\mathcal{R}_0$ mais on la considère désormais comme une donnée du problème.
- Pour simplifier, on néglige ici la masse du filin et on note $m_1 = m_2 = m_0$; on a donc $m_0 = m/2$.
- On écrit les vecteurs positions de S , M_1 et M_2 , sous la forme :
 $\overrightarrow{OS} = r_0 \vec{e}_z$; $\overrightarrow{OM_1} = r_1 \vec{e}_1$; $\overrightarrow{OM_2} = r_2 \vec{e}_2$ où $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont unitaires.

1- Justifier qu'avec une bonne approximation on peut écrire : $\omega = \sqrt{GM_T/r_0^3}$.

2- Exprimer, en fonction de m , ω , $\dot{\theta}$ et des vecteurs positions, les forces de gravitation et d'inertie subies indépendamment par M_1 et M_2 .

3- En appliquant le théorème du moment cinétique au satellite dans son ensemble, établir l'équation différentielle du mouvement, où on ne fera figurer que les données ; on montrera pour cela que le moment résultant des actions d'inertie de Coriolis est nul.

4- Déterminer les valeurs possibles de θ à l'équilibre puis discuter la stabilité de ces positions. Montrer en particulier que la position radiale étudiée précédemment est une position d'équilibre stable puis déterminer la pulsation des petites oscillations autour de cette position.

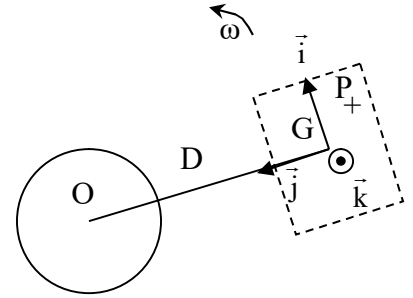
Partie 4 : Mouvement à l'intérieur d'une station spatiale

(Inspiré de XMP 1994)

Calculatrice interdite

On considère une station spatiale en orbite circulaire uniforme autour de la terre : son barycentre G suit une trajectoire circulaire à une distance D du centre O de la terre, à la vitesse angulaire ω .

On note $\mathcal{R}_0$ le référentiel géocentrique que l'on suppose galiléen et $\mathcal{R}$ le référentiel lié à la station spatiale, auquel on attache le repère cartésien $(Gxyz)$. La base associée est notée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (figure ci-contre).



On désire étudier l'équilibre et le mouvement d'un astronaute susceptible de se déplacer à l'intérieur de la station. L'astronaute sera assimilé à un point matériel P de masse m et repéré dans $\mathcal{R}$ par ses coordonnées x, y, z .

1- Etude de la force de gravitation dans la station :

1a- Etablir le lien entre D , ω et $g(G)$: module du champ de gravitation terrestre au barycentre G de la station.

1b- Exprimer le vecteur champ de gravitation en P , noté $\vec{g}(P)$, en fonction du seul vecteur $\vec{OP}$ et des scalaires D , ω et $OP = \|\vec{OP}\|$; puis, sachant que P reste au voisinage de G , montrer qu'on peut écrire, au 1^{er} ordre :

$$\vec{g}(P) = -\omega^2 (x.\vec{i} - (D + 2y).\vec{j} + z.\vec{k})$$

2- Equations du mouvement : montrer que lorsque P reste très proche de G , le mouvement de l'astronaute dans $\mathcal{R}$ est décrit, en première approximation, par le système d'équations suivant :

$$\ddot{x} = 2\omega \dot{y} ; \quad \ddot{y} = -2\omega \dot{x} + 3\omega^2 y ; \quad \ddot{z} = -\omega^2 z$$

Quels termes peuvent être appelés « statiques » ou « dynamiques » dans les membres de droite de ce système et pourquoi ?

3- Etude de l'équilibre dans la station :

3a- Qu'est-ce que la situation d'impesanteur pour un astronaute ? Pour quelle(s) position(s) dans la navette cette situation se produit-elle ? Quelle est, dans $\mathcal{R}_0$, la trajectoire d'un astronaute en impesanteur ?

3b- Pour bien montrer que l'astronaute n'est pas en impesanteur quelle que soit sa position dans la station, décrire les actions qu'il subit s'il s'écarte de G :

- En sortant du plan de l'orbite (Gxy) ;
- Radialement dans le plan de l'orbite (expliquer cet effet de façon simple).

3c- Sachant que la structure de la station elle-même subit ces contraintes, expliquer ce qui risque d'arriver à une station, ou un satellite de la terre, de trop grande taille. Commenter l'existence d'anneaux autour de toutes les planètes géantes de notre système solaire.

4- Etude d'un déplacement dans la station :

Soit $t_0 = 0$ un instant pris comme origine des temps où l'astronaute cesse tout contact physique avec les parois de la station, espérant ainsi flotter en état d'impesanteur.

4a- Déterminer la position et de la vitesse de l'astronaute au cours du temps, dans le cas où celui-ci possède involontairement une vitesse initiale $\dot{y}_0 > 0$, toutes les autres coordonnées initiales étant nulles (position et vitesse).

4b- Tracer l'allure de la trajectoire observée dans la station.