

DEVOIR SURVEILLÉ n°3

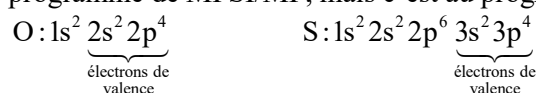
Correction

Partie 1 : quelques exemples de la chimie du phosphore

A- Propriétés du dioxyde de soufre et de l'acide sulfureux

- 1- $Z(O) = 8$; O est donc à la deuxième période et 16^{ème} colonne (ou antépénultième colonne) du tableau périodique. O possède donc **6 électrons de valence**.
 $Z(S) = 16$; S appartient à la même famille que l'oxygène (les chalcogènes) ; il est à la 3^{ème} période et 16^{ème} colonne du tableau périodique et possède également **6 électrons de valence**.

Remarque : on aurait également pu donner la configuration électronique des deux atomes dans leur état fondamental. Etablir une configuration électronique n'est pas au programme de MPSI/MP, mais c'est au programme de lycée donc ...



- 2- Nombre d'électrons de valence à placer dans la structure : 18 ; il y aura donc 9 doublets dans la structure.

Je vous propose une méthode permettant d'obtenir la structure de Lewis

1- On propose un squelette avec des liaisons simples $O - S - O$

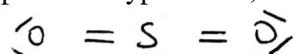
2- On ajoute des doublets non liants pour que chaque atome vérifie la règle de l'octet (attention la structure proposée à ce stade n'est pas correcte) $\overset{\cdot\cdot}{\underset{\cdot\cdot}{O}} - \overset{\cdot\cdot}{\underset{\cdot\cdot}{S}} - \overset{\cdot\cdot}{\underset{\cdot\cdot}{O}}$

3- On compte le nombre d'électrons dans la structure précédente
 s'il y en a trop : on supprime deux doublets non liants sur deux atomes consécutifs que l'on remplace par un doublet liant créant ainsi une liaison multiple
 s'il en manque : on rajoute des électrons célibataires (ou des DNL) sur les atomes pouvant être hypervalents
 Dans la structure précédente il y a 10 doublets alors qu'il n'y en a que 9 dans la structure :



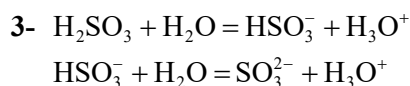
4- On compte alors les charges formelles (la structure proposée est alors correcte)

5- On tente alors de réduire le nombre de charges formelles : si deux atomes consécutifs possèdent une charge formelle + pour l'un et - pour l'autre. On peut basculer un doublet non liant de l'atome portant le - vers celui portant le + (si celui-ci peut être hypervalent, comme S ici) :



Si plusieurs structures sont possibles, la structure la plus probable est celle qui présente le moins de charge formelle et s'il y a des charges formelles non éliminables, la structure la plus probable sera celle qui fait porter à l'atome le plus électronégatif les charges formelles -.

Ici la structure la plus probable est $\langle \overset{\cdot\cdot}{\underset{\cdot\cdot}{O}} = \overset{\cdot\cdot}{\underset{\cdot\cdot}{S}} = \overset{\cdot\cdot}{\underset{\cdot\cdot}{O}} \rangle$

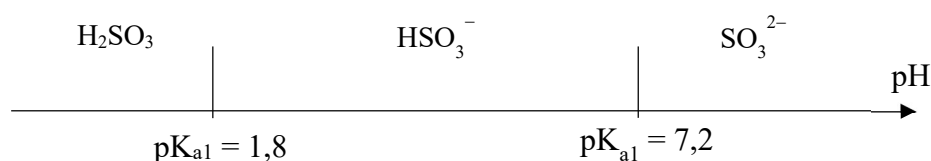


$$4- \text{L'électro neutralité de la solution impose : } [\text{H}_3\text{O}^+] - [\text{HSO}_3^-] - 2[\text{SO}_3^{2-}] - [\text{OH}^-] = 0$$

On pourra négliger la concentration en HO^- (milieu acide) :

$$\boxed{[\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{HSO}_3^-] + 2[\text{SO}_3^{2-}]}$$

On peut également tracer le diagramme de prédominance des espèces H_2SO_3 ; HSO_3^- et SO_3^{2-} .



A pH = 2,5, on est dans la zone de prédominance de HSO_3^- ; suffisamment loin de celle de SO_3^{2-} pour pouvoir négliger sa concentration ; mais en revanche trop proche de celle de H_2SO_3 pour négliger la sienne.

On a donc

$$\begin{cases} K_{a1} = \frac{[\text{HSO}_3^-]h}{[\text{H}_2\text{SO}_3]} \\ h = [\text{HSO}_3^-] + 2[\text{SO}_3^{2-}] \end{cases} \quad \text{donc } K_{a1} = \frac{h^2}{[\text{H}_2\text{SO}_3]}$$

$$\text{Ainsi } [\text{H}_2\text{SO}_3] = \frac{h^2}{K_{a1}} = 10^{\text{pK}_{a1} - 2\text{pH}} = 10^{1,8 - 5} = 10^{-3,2}$$

Pour continuer l'AN, il faut utiliser le graphique de ln

$$[\text{H}_2\text{SO}_3] = 10^{-3,2} = 10^{-4} \cdot 10^{0,8} \quad \text{avec } 10^{0,8} = e^{0,8 \cdot \ln 10} ; \text{ sur le graphique on lit } \ln 10 = 2,3$$

Ainsi $10^{0,8} = e^{0,8 \cdot \ln 10} = e^{0,8 \cdot 2,3} = e^{1,84} = 6,4$ (se trouve sur le diagramme en partant de l'ordonnée pour remonter à l'abscisse)

$$\boxed{[\text{H}_2\text{SO}_3] = 6,4 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}}$$

$$\boxed{[\text{HSO}_3^-] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-2,5} = 10^{0,5} \cdot 10^{-3} = e^{0,5 \cdot 2,3} \cdot 10^{-3} = 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}}$$

On vérifie l'hypothèse

$$K_{a2} = \frac{[\text{SO}_3^{2-}]h}{[\text{HSO}_3^-]} = [\text{SO}_3^{2-}] \quad \boxed{[\text{SO}_3^{2-}] = 10^{-7,2} = 10^{0,8} \cdot 10^{-8} = 6,4 \cdot 10^{-8} \text{ mol.L}^{-1}}$$

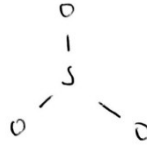
concentration effectivement négligeable devant les deux autres

B- Utilisation des sulfates en chimie analytique

- 5- Dans la formule de Lewis de SO_3 , il y a répartir, soit 12 doublets.

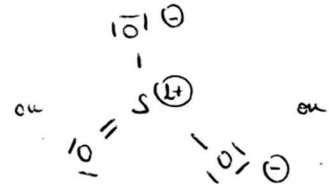
$$4 \times 6 = 24 \text{ électrons de valence à}$$

1- squelette



2- on complète à l'octet

3 et 4- On ajuste pour qu'il y le bon nombre d'électrons et on décompte les charges formelles (à partir de cette étape les formes proposées sont correctes)



5- On propose une forme plus probable (présentant moins de charges formelles) ; ce qui est ici possible car S peut être hypervalent



6- L'équation bilan est : $\boxed{\text{Ba}^{2+}_{(\text{aq})} + \text{SO}_4^{2-}_{(\text{aq})} = \text{BaSO}_4(\text{s})}$

- 7- La loi de Guldberg et Waage appliquée à la dissociation de HSO_4^- dans l'eau donne :

$$\frac{[\text{HSO}_4^-]}{[\text{SO}_4^{2-}]} = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{K_A}, \text{ soit pour } \text{pH} = 7 : \boxed{\frac{[\text{HSO}_4^-]}{[\text{SO}_4^{2-}]} = 10^{-5}}$$

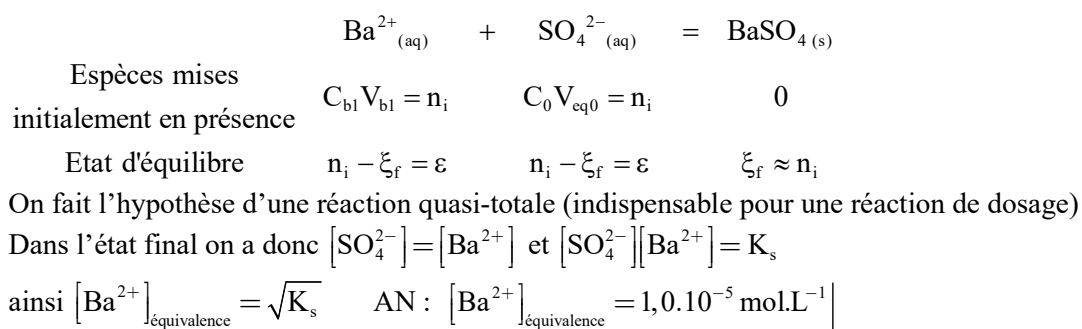
Donc pour $\text{pH} > 7$ ce rapport est $< 10^{-5}$ et **on peut donc négliger le caractère basique des ions sulfate** lors du dosage ; en d'autres termes, la réaction des ions sulfate avec l'eau est très limitée et n'entre pas en compétition avec la réaction de dosage : SO_4^{2-} **ne régira que suivant la réaction de dosage.**

- 8- À l'équivalence du dosage, les ions sulfates et les ions baryum ont été introduits en quantités stœchiométriques. On a donc :

$$n(\text{Ba}^{2+} \text{ initial}) = n(\text{SO}_4^{2-} \text{ versé}) \Rightarrow C_{\text{bl}} V_{\text{bl}} = C_0 V_{\text{eq0}}$$

Ainsi : $\boxed{C_{\text{bl}} = \frac{C_0 V_{\text{eq0}}}{V_{\text{bl}}}}$ AN : $\boxed{C_{\text{bl}} = 4,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}}$

9- Faisons un bilan de matière à l'équivalence :



Ainsi, le pourcentage molaire de baryum restant en solution à l'équivalence vaut :

$$\frac{n(\text{Ba}^{2+})_{\text{équivalence}}}{n(\text{Ba}^{2+})_{\text{introduit}}} = \frac{[\text{Ba}^{2+}]_{\text{équivalence}} \times (V_{b1} + V_{eq0})}{C_{b1} \times V_{b1}} = \frac{1,0 \times 10^{-5} \times 70}{4,0 \times 10^{-3} \times 50} = 0,35\%$$

Ce résultat justifie bien le caractère totale de la réaction

10- L'énoncé donne :

$$-RT \cdot \ln(K^\circ) = -198 \cdot 10^3 + 189 \cdot 298 = -198 \cdot 10^3 + 190 \cdot 300 = -198 \cdot 10^3 + 57 \cdot 10^3 = -141 \cdot 10^3 \text{ J.mol}^{-1}$$

On peut donc en déduire à cette température :

$$\ln(K^\circ) = \frac{141 \cdot 10^3}{RT} = \frac{141 \cdot 10^3}{8,31 \cdot 298} = \frac{140 \cdot 10^3}{8,3 \cdot 300} = \frac{14}{83,3} 10^3 = \frac{14}{249} 10^3 = \frac{14}{250} 10^3 = \frac{14}{0,25} = 4,14 = 56$$

$$K^\circ = e^{56} = e^{24 \cdot \ln 10 + 0,8} = e^{0,8} 10^{24} = 2,1 \cdot 10^{24}$$

A cette température $K^\circ \gg 1$ et on pourra considérer la réaction quasi-totale

11- A l'équilibre on a $Q = K^0(T)$ avec $Q = \frac{(a_{\text{SO}_3})^2}{(a_{\text{SO}_2})^2 a_{\text{O}_2}} = \frac{(p_{\text{SO}_3})^2 P^0}{(p_{\text{SO}_2})^2 p_{\text{O}_2}} = \frac{(n_{\text{SO}_3})^2 n_{\text{tot,gaz}} P^0}{(n_{\text{SO}_2})^2 n_{\text{O}_2} P_{\text{tot}}}$

Or $\ln(K^\circ) = \underbrace{\frac{-a}{R}}_{>0} \frac{1}{T} + \frac{b}{R}$ donc si T augmente, $\ln(K^\circ)$ donc K° diminue (ce que l'on vérifie

avec la valeur de K° donner à 750K à la question 13).

Donc Q devient supérieur à la nouvelle valeur de K° et la réaction a lieu dans le sens indirect.

12- Si on reprend l'expression du quotient de réaction donnée à la question précédente, on voit que si à partir d'un état d'équilibre de composition donnée, on augmente la pression, le quotient de réaction diminue alors que K° , qui ne dépend que de T reste inchangée. La nouvelle valeur du quotient de réaction Q' sera donc inférieure à K° et la réaction aura lieu dans le sens direct.

Ainsi une augmente de pression favorise la conversion de SO_2

13- Effectuons un bilan de matière, sachant que l'avancement $\xi_1 = 48$ mol (les quantités de matière sont données en mol):

	2 SO ₂ (g)	+	O ₂ (g)	=	2 SO ₃ (g)	n _{tot,gaz}
État initial	100		50		0	150
Équilibre	100 - 2ξ ₁ = 4		50 - ξ ₁ = 2		2ξ ₁ = 96	150 - ξ ₁ = 102

Comme nous l'avons vu plus haut

$$K^0(T_1) = Q = \frac{(n_{\text{SO}_3})^2 n_{\text{tot,gaz}}}{(n_{\text{SO}_2})^2 n_{\text{O}_2}} \frac{P^0}{P_{\text{tot}}} \quad \text{soit} \quad P_1 = \frac{(n_{\text{SO}_3})^2 n_{\text{tot,gaz}}}{(n_{\text{SO}_2})^2 n_{\text{O}_2}} \frac{P^0}{K^0(T_1)}$$

$$\text{AN : } P_1 = \frac{96^2 102}{4^2 2} \frac{1}{750} = \frac{100^3}{32} \frac{1}{10^4} = \frac{10^2}{32} \approx 3 \text{ bar}$$

14- Effectuons à nouveau un bilan de quantité de matière, en raisonnant sur une quantité totale gazeuse initiale de 100 mol (on suit l'énoncé, mais notez qu'on pourrait raisonner sur une quantité quelconque n_0 qui de toutes façons se simplifierait lors du calcul des proportions) et en introduisant parallèlement à l'avancement ξ_2 , le taux de conversion τ de SO₂ en SO₃, dont on sait qu'il vaut 0,98.

$$\text{Par définition : } \tau = \frac{n(\text{SO}_3 \text{ formé})}{n(\text{SO}_2 \text{ initial})}$$

	2 SO ₂ (g)	+	O ₂ (g)	=	2 SO ₃ (g)	N ₂ (g)	n _{tot,gaz}
Etat init.	8		12		0	80	100
Equilibre	8-2ξ ₂ = 8(1-τ) = 0,16		12-ξ ₂ = 12-4τ = 8,1		2ξ ₂ = 8τ = 7,8	80	96,1

$$\text{On a déduit du tableau que } \tau = \frac{n(\text{SO}_3 \text{ formé})}{n(\text{SO}_2 \text{ initial})} = \frac{2\xi_2}{8} = \frac{\xi_2}{4}$$

Les proportions à l'équilibre sont donc (je ne donne qu'un chiffre significatif...) :

SO ₂ (g)	O ₂ (g)	SO ₃ (g)	N ₂ (g)
0,16 / 96,1 ≈ 0,2%	8,1 / 96,1 ≈ 8%	7,8 / 96,1 ≈ 8%	80 / 96,1 ≈ 83%

$$\text{Puis, comme à la question précédente : } P_{\text{tot}} = \frac{(n_{\text{SO}_3})^2 n_{\text{tot,gaz}}}{(n_{\text{SO}_2})^2 n_{\text{O}_2}} \frac{P^0}{K^0(T_1)}$$

$$\text{AN : } P_{\text{tot}} = \frac{7,8^2 96,1}{0,16^2 8,1} \frac{1}{10^4} = \left(\frac{7,8}{0,16}\right)^2 \frac{1}{8} 10^{-2} = \left(\frac{78}{16}\right)^2 \frac{1}{8} = \left(\frac{39}{8}\right)^2 \frac{1}{8} \approx \left(\frac{40}{8}\right)^2 \frac{1}{8} = \frac{25}{8} \approx 3 \text{ bar}$$

15- La variation du taux de conversion peut avoir deux origines :

On a vu à la question **12-** qu'une diminution de pression diminuait le taux de conversion et ici la pression est passé de 3 bar à un bar.

Une autre cause de variation du taux de conversion est que maintenant la température du milieu réactionnel n'est plus maintenue constante par un thermostat : le convertisseur est

maintenant adiabatique, la température varie donc le long du convertisseur ; ce qui modifie le taux de conversion. D'après la question 11- une augmentation de la température provoque une diminution du taux de conversion. Si la réaction est exothermique, l'effet thermique s'ajoutera à la baisse de la pression pour réduire le taux de conversion

On montrera (en thermochimie) et les 5/2 ont pu établir que l'enthalpie standard de réaction (c'est-à-dire la variation d'enthalpie associée à la réaction effectuée à température constante et

sous la pression standard : $\Delta_r H^\circ = \frac{\partial H}{\partial \xi} \bigg|_{P,T}$) vérifie : $\frac{\Delta_r H^\circ}{RT^2} = \frac{d(\ln K)}{dT} = -\frac{1}{R} \frac{d\left(\frac{a}{T} + b\right)}{dT} = \frac{a}{RT^2}$

Soit $\Delta_r H^\circ = a < 0$; la réaction est bien exothermique.

16- Refaisons un bilan de matière dans cette nouvelle situation pour établir la valeur du quotient de réaction en sortie et évaluer la température si cet état correspondait à un équilibre chimique.

Le bilan molaire est très semblable à celui de la question 14- ; en notant ξ_3 l'avancement, on a encore $\xi_3 = 4\tau$ mais avec $\tau = 0,60$ d'où $\xi_3 = \underline{2,4 \text{ mol}}$. Par ailleurs, les états initial et final ne sont pas à la même température.

	2 SO ₂ (g)	+ O ₂ (g)	=	2 SO ₃ (g)	N ₂ (g)	n _{tot,gaz}	Température
Etat init.	8	12		0	80	100	T ₁
Equilibre	8-2ξ ₃	12-ξ ₃		2ξ ₃			T ₂
	= 8(1-τ)	= 12-4τ		= 8τ			
	= 3,2	= 9,6		= 4,8	80	97,6	

La réaction ayant toujours lieu à P constante et

$$Q_f = \frac{(n_{\text{SO}_3})^2 n_{\text{tot,gaz}}}{(n_{\text{SO}_2})^2 n_{\text{O}_2}} \frac{P^0}{P_{\text{tot}}} = \frac{(4,8)^2}{(3,2)^2} \times \frac{97,6}{9,6} \times 1 \approx \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times 10 \approx 23$$

La température d'équilibre serait telle que

$$-RT_{\text{eq}} \cdot \ln(K^\circ) = -RT_{\text{eq}} \cdot \ln(Q) = a - b \cdot T_{\text{eq}}$$

$$T_{\text{eq}} = \frac{a}{b - R \cdot \ln(Q)} = \frac{-198.10^3}{-189 - 8,31 \cdot \ln(10 \times 2,3)} = \frac{-198.10^3}{-189 - 8,31 \cdot (2,3 + 0,85)} = 10^3 \text{ K}$$

Cette température est certes élevée mais pas improbable ; on ne peut pas vraiment conclure

...

Partie 2 : La comète 13P/Olbers

I.A. Mouvements cométaires

1- La force subie par le point M s'écrit : $\vec{F} = -m \overrightarrow{\text{grad}} U = -m \frac{dU}{dr} \vec{e}_r$ et est donc radiale, i.e.

colinéaire au vecteur position ; ainsi, d'après le théorème du moment cinétique, le moment

cinétique en O est conservé : $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$. Or, $\vec{L}_O = m \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$ donc, par

construction, $\overrightarrow{OM}(t)$ est orthogonal au vecteur $\vec{L}_O$, constant ; on en déduit qu'au cours du temps le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ reste dans le plan passant par O et orthogonal à $\vec{L}_O$: le mouvement est plan.

2- L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle qui vérifie la relation $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$ et s'écrit donc $E_p = mU$ puisque

$$\vec{F} = -m \overrightarrow{\text{grad}}(U) = -\overrightarrow{\text{grad}}(mU).$$

Il vient : $E = \frac{1}{2}mv^2 + mU = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right) + mU$. L'expression de la constante des aires

$$C = r^2 \dot{\varphi} \text{ permet d'éliminer la dépendance en } \varphi : E = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2} \right) + mU \text{ puis :}$$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2} \right) + U(r)}$$

3- La force gravitationnelle exercée par le Soleil sur la masse m à la distance r est

$$\vec{F} = -\frac{\mathcal{G}M_\odot m}{r^2} \vec{e}_r = -m \overrightarrow{\text{grad}} \left(-\frac{\mathcal{G}M_\odot}{r} \right). \text{ On en déduit : } \boxed{K = \mathcal{G}M_\odot}.$$

4- Avec $U(r) = -\frac{K}{r}$, il vient : $\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2} \right) - \frac{K}{r}$

$$\text{ou encore : } \varepsilon = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + f(r) \text{ avec : } f(r) = \frac{C^2}{2r^2} - \frac{K}{r}.$$

(Cette écriture est usuelle, f est l'énergie potentielle massique effective de la comète).

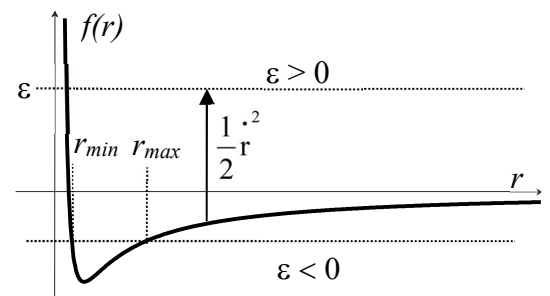
Or, le théorème de l'énergie cinétique montre que l'énergie mécanique se conserve : $\varepsilon = \text{cst}$

Ainsi, $\dot{r}^2$ étant toujours positif, l'équation énergétique ci-dessus impose : $\forall r \quad f(r) \leq \varepsilon$, ce qui limite les valeurs possibles de r . On peut poursuivre le

raisonnement graphiquement : le graphe de $f(r)$ montre alors que l'intervalle où $f(r) \leq \varepsilon$ est borné si et seulement si $\boxed{\varepsilon < 0}$.

Il semble aussi nécessaire que $\varepsilon \geq f_{\min} = -\frac{K^2}{2C^2}$, mais en réalité ε et C ne sont pas

indépendants (ils sont tous deux fixés par les « conditions initiales ») et cette inégalité est automatiquement vérifiée. Imposer $\varepsilon < 0$ est donc suffisant pour obtenir un état lié. En revanche, **pour obtenir $r_{\min} \neq r_{\max}$, il faut imposer $\varepsilon > f_{\min}$.**



5- Les valeurs extrémales de r sont prises lorsque $\dot{r} = 0$ et sont donc solutions de l'équation

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{C^2}{r^2} - \frac{K}{r} \text{ que l'on peut réécrire sous la forme de l'équation du second degré}$$

$$\varepsilon r^2 + K r - \frac{C^2}{2} = 0. \text{ On en déduit leur somme et leur produit en fonction des données :}$$

$$-\frac{K}{\varepsilon} = r_{\min} + r_{\max} \text{ et } -\frac{C^2}{2\varepsilon} = r_{\max} r_{\min} \text{ puis : } \boxed{\varepsilon = \frac{-K}{r_{\min} + r_{\max}} = \frac{-K}{2a}} \text{ et}$$

$$\boxed{C = \sqrt{\frac{2K r_{\max} r_{\min}}{r_{\min} + r_{\max}}} = \sqrt{K p}}$$

6- Nous savons que la trajectoire newtonienne est une conique dont l'un de foyers est le centre attracteur O et que, pour un état lié il s'agit d'une **ellipse** (1^{ère} loi de Kepler).

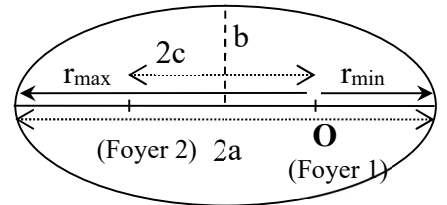
Interprétation de a et e :

- Le schéma de l'ellipse (ci-dessous) montre que $a = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2}$ est le **demi grand-axe**.

- On peut remarquer que : $e = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\min} + r_{\max}} = \frac{c}{a}$

où $c = \frac{r_{\min} - r_{\max}}{2}$ représente l'écart de chaque foyer au

centre de l'ellipse ; e est de ce fait appelé **excentricité** et représente un facteur « d'aplatissement » de l'ellipse, qui tend vers 0 si l'ellipse tend vers un cercle et tend vers 1 si l'ellipse tend vers un segment.



On retrouve cette interprétation en exprimant $r_{\min}$ et $r_{\max}$ en fonction de a et e :

$$e = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\min} + r_{\max}} \Rightarrow r_{\max} = r_{\min} \frac{1+e}{1-e} \text{ qu'on injecte dans : } a = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2}$$

$$\text{d'où : } \boxed{r_{\min} = a(1-e)} \text{ et } \boxed{r_{\max} = a(1+e)}$$

Ces relations montrent que : $p = \frac{r_{\max} r_{\min}}{a} = a(1+e)(1-e) = a(1-e^2)$ qui servira qu.7.

7- Pour φ variant de 0 à π , le rayon est croissant donc $\boxed{\dot{r} > 0}$.

$$\text{De la relation : } \varepsilon = \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2} \right) - \frac{K}{r} \text{ on déduit alors : } \dot{r} = \sqrt{2\varepsilon + \frac{2K}{r} - \frac{C^2}{r^2}},$$

qui, avec les relations $\varepsilon = -\frac{K}{2a}$ et $C = \sqrt{K p}$ (qu. 5) puis $p = a(1-e^2)$ (qu. 6), s'écrit

aussi :

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{-\frac{K}{a} + \frac{2K}{r} - \frac{K p}{r^2}} = \sqrt{\frac{K}{a} \frac{\sqrt{-r^2 + 2ar - pa}}{r}} = \sqrt{\frac{K}{a} \frac{\sqrt{-r^2 + 2ar - a^2(1-e^2)}}{r}} = \sqrt{\frac{K}{a} \frac{\sqrt{-(r-a)^2 + a^2 e^2}}{r}}$$

$$\text{D'où, après séparation des variables : } \sqrt{\frac{a}{K}} \frac{r}{\sqrt{-(r-a)^2 + a^2 e^2}} dr = dt.$$

$$\text{Et ainsi } \boxed{\int_{r_{\min}}^{r(\varphi)} \sqrt{\frac{a}{K}} \frac{r}{\sqrt{-(r-a)^2 + a^2 e^2}} dr = \int_0^\tau dt = \tau}$$

8- Changeons de variable comme proposé : $r = a(1 - e \cos \xi) \Rightarrow dr = a \cdot e \sin(\xi) d\xi$ puis :

$$\tau = \sqrt{\frac{a}{K}} \int_0^\xi \frac{a(1 - e \cos \xi)}{\sqrt{-a^2 e^2 \cos^2 \xi + a^2 e^2}} \times a e \sin \xi d\xi = \sqrt{\frac{a}{K}} \times a \int_0^\xi (1 - e \cos \xi) d\xi = \boxed{\sqrt{\frac{a^3}{K}} (\xi - e \sin \xi)}$$

Quand on atteint $r_{\max}$, $t = \frac{T}{2}$ et $x = p$ car $r_{\max} = a(1 + e)$, d'où : $\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{a^3}{K}} \pi$ soit :

$$\sqrt{\frac{a^3}{K}} = \frac{T}{2\pi}$$

qui n'est autre que la **troisième loi de Képler**.

On en déduit : $\boxed{\tau = \frac{T}{2\pi} (\xi - e \sin \xi)}$.

9. Cette question ne nécessite pas d'avoir répondu aux deux précédentes. L'idée est d'utiliser la troisième loi de Képler pour calculer la période T de la comète connaissant son demi grand axe a et les période T_0 et demi grand-axe a_0 de la trajectoire terrestre. En effet, le rapport T^2/a^3 est le même pour tous les satellites du Soleil et on a donc :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_0^2}{a_0^3} \Rightarrow T = T_0 \sqrt{\frac{a^3}{a_0^3}}$$

Reste à déduire la valeur de a de la distance au périhélie $r_{\min}$ et de l'excentricité e données dans l'énoncé. On utilise la relation montrée question 6 :

$$a = \frac{r_{\min}}{1 - e} \quad \text{AN : } a = 16,9 \text{ UA} \quad \text{puis : } \mathbf{T = 69,2(1) \text{ années} = 69 \text{ ans } 7(7) \text{ jours.}}$$

On n'a que 3 chiffres significatifs sur $r_{\min}$ et e , donc sur a ; on doit donc théoriquement donner T également avec 3 chiffres significatifs, soit 69,2 ans, mais on ne peut alors pas donner le résultat au jour près et on ne peut donc pas donner la date demandée ! Si, exceptionnellement, on pousse l'AN à 4 chiffres significatifs : $1956 + 69 \text{ ans} = 2025$; $10 \text{ janvier} + 77 \text{ jours} = 28 \text{ mars}$.

Conclusion : **La comète repassera au périhélie le 28 mars 2025.**

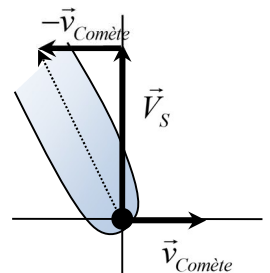
(en supposant que la valeur 365,25 jours/an a bien pris en compte les années bissextiles de 1956 à 2025 ; de toutes façons, comme on vient de le dire, la précision est en réalité $>$ à 1 jour ...).

I.B. La queue de la comète

10- Le vent solaire issu du Soleil S exerce sur la queue une force répulsive : S se trouve du côté S_1 .

11- Soient $\vec{V}_S$ la vitesse du vent solaire et $\vec{v}_{\text{Comète}}$ celle de la comète dans le référentiel R. Dans le référentiel lié à la comète, la vitesse du vent solaire est $\vec{V}_S - \vec{v}_{\text{Comète}}$, et oriente la queue. On en déduit que la comète se déplace de C_1 vers C_3 : $C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_3$.

L'angle φ est donné par $\tan \varphi = \frac{v_{\text{Comète}}}{V_S}$ soit $\boxed{\varphi = 4,3^\circ = 0,075 \text{ rad}}$



Partie 3 : Etude d'un satellite complexe.

I- Questions préliminaires.

- 1- Le référentiel $\mathcal{R}_0$ est le référentiel en translation dans le référentiel de Copernic $\mathcal{R}_C$ de centre O, le centre d'inertie de la Terre. Ce référentiel est en translation elliptique (quasi-circulaire) dans $\mathcal{R}_C$ (qui, lui, sera considéré galiléen) ; $\mathcal{R}_0$ n'est donc pas galiléen. On pourra le supposer galiléen pour des systèmes situés proches de la Terre (jusqu'à environ qq dizaine de R_T) à condition d'écrire le principe fondamental de la dynamique sous la forme :

$$m \overrightarrow{a(M / \mathcal{R}_0)} = \overrightarrow{f_{\text{autre que gravitationnelle}}} - G \frac{m M_T}{OM^3} \overrightarrow{OM}$$

Pour aller plus loin, cela suppose que le terme correctif, dit « terme différentiel » ou « terme des marées » est négligeable.

- 2- Masse totale du satellite : $m = m_1 + m_2 + \lambda L$

Par associativité des barycentres S sera le barycentre de M_1 affecté de la masse m_1 , de M_2 affecté de la masse m_2 et du milieu du filin M_f affecté de la masse λL . Ainsi :

$$m \overrightarrow{OS} = m_1 \overrightarrow{OM_1} + m_2 \overrightarrow{OM_2} + \lambda L \overrightarrow{OM_f}$$

$$r_0 = \frac{m_1 R + m_2 (R + L) + \lambda L \left(R + \frac{L}{2} \right)}{m} = R \left(1 + \frac{m_2 + \frac{1}{2} \lambda L}{m} \cdot \frac{L}{R} \right)$$

- 3- Champ de gravitation à la distance r du centre de la Terre :

$$G(r) = G \frac{M_T}{r^2} = G \frac{M_T}{R^2} \frac{R^2}{r^2} = G_1 \frac{R^2}{r^2}$$

- 4- Seconde loi de Newton appliqué au satellite en mouvement circulaire dans $\mathcal{R}_0$ considéré galiléen (cf Q1) : (on travaillera en coordonnées polaires dans $\mathcal{R}_0$)

$$m \overrightarrow{a(S / \mathcal{R}_0)} = -m G(r_0) \overrightarrow{u_r} \Rightarrow \begin{cases} r_0 \ddot{\theta} = 0 \\ -r_0 \dot{\theta}^2 = -G_1 \frac{R^2}{r_0^2} \end{cases}$$

Soit

$$\omega = \sqrt{G_1 \frac{R^2}{r_0^3}} = R \sqrt{G_1} R^{-3/2} \left(1 + \frac{m_2 + \frac{1}{2} \lambda L}{m} \cdot \frac{L}{R} \right)^{-3/2} \quad \omega = \sqrt{\frac{G_1}{R}} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{m_2 + \frac{1}{2} \lambda L}{m} \cdot \frac{L}{R} \right)$$

II- Etude détaillée de la tension du filin et de la rotation du satellite.

- 1- Le référentiel $\mathcal{R}$ est dans $\mathcal{R}_0$ en rotation uniforme autour de l'axe à la vitesse angulaire ω autour de l'axe Oy : $\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}} = +\omega \overrightarrow{e_y}$ (le signe + est imposé par le fait que Ox est orienté dans le sens de la vitesse de rotation).

$$\text{Ainsi : } \overrightarrow{F_g} = \overrightarrow{F_{\text{gravitation}}} + \overrightarrow{F_{\text{ie}}} = -m_0 G(r) \overrightarrow{u_z} + m_0 \omega^2 \overrightarrow{OM} = m_0 \left(-G_1 \frac{R^2}{r^2} + \omega^2 r \right) \overrightarrow{u_z}$$

$$X(r) = -G_1 \frac{R^2}{r^2} + \omega^2 r$$

Remarque : la force d'inertie de Coriolis n'apparaît pas ici puisque $\vec{F}_g$ est défini s'appliquant sur une masse au repos dans $\mathcal{R}$.

2a- Système étudié : l'élément de filin compris entre les coordonnées r et $r + \Delta r$

Bilan des forces :

La force $\vec{F}_g = \lambda \Delta r X(r) \vec{u}_z$

Les tensions du reste du filin qui s'exercent en ses deux extrémités :

La force que la partie « supérieure » du filin exerce sur lui en $r + \Delta r$:

$T(r + \Delta r) \vec{e}_z$

La force que la partie « inférieure » du filin exerce sur lui en r , qui par principe des actions réciproque s'écrit $-T(r) \vec{e}_z$

Remarque : attention à la façon dont est définie $\vec{T}$ ici.

Principe fondamental à l'équilibre dans $\mathcal{R}$: $\lambda \Delta r X(r) + T(r + \Delta r) - T(r) = 0$

2b- En faisant tendre Δr vers 0, la relation précédente peut s'écrire

$$\lambda \Delta r X(r) + \frac{dT}{dr}(r) \Delta r + o(\Delta r) = 0$$

$$\text{Soit au premier ordre : } \frac{dT}{dr}(r) = -\lambda X(r) \quad \text{Soit } T(r) - T(R) = -\lambda (Y(r) - Y(R))$$

2c- Le solide en M_1 est soumis à $\begin{cases} \vec{F}_g(M_1) = m_1 X(R) \vec{u}_z \\ T(R) \vec{u}_z \end{cases}$ on a donc à l'équilibre :

$$T(R) = -m_1 X(R) = -m_1 \left(-G_1 + \omega^2 R \right)$$

Le solide en M_2 est soumis à $\begin{cases} \vec{F}_g(M_2) = m_2 X(R + L) \vec{u}_z \\ -T(R + L) \vec{u}_z \end{cases}$ on a donc à l'équilibre :

$$T(R + L) = m_2 X(R + L) = m_2 \left(-G_1 \frac{R^2}{(R + L)^2} + \omega^2 (R + L) \right) \underset{\substack{\text{à l'ordre 1} \\ \text{en } \frac{L}{R}}}{=} m_2 \left(-G_1 \left(1 - 2 \frac{L}{R} \right) + \omega^2 R \left(1 + \frac{L}{R} \right) \right)$$

$$\mathbf{2d-} \quad T(r) = T(R) - \lambda \left(Y(r) - Y(R) \right) = T(R) - \lambda \underbrace{\left(Y(R + z) - Y(R) \right)}_{\substack{\text{à l'ordre 1} \\ \frac{dY}{dr}(R).z}} = T(R) - \lambda X(R) z$$

$$\text{Et d'après 2b-} \quad T(r) = -m_1 X(R) - \lambda X(R) z = -(m_1 + \lambda z) X(R)$$

3a- D'après le résultat de la question 2d : $T(R+L) = -(m_1 + \lambda L)X(R)$

Or la question 2c a indiqué : $T(R+L) = m_2 X(R+L) = \underset{\substack{\text{à l'ordre 1} \\ \text{en } \frac{L}{R}}}{=} m_2 \left(X(R) + RX'(R) \cdot \frac{L}{R} \right)$

Ainsi $\boxed{(m_1 + m_2 + \lambda L)X(R) + m_2 RX'(R) \cdot \frac{L}{R} = 0}$

3b- On a obtenu $X(r) = -G_1 \frac{R^2}{r^2} + \omega^2 r$ donc $\begin{cases} X(R) = -G_1 + \omega^2 R \\ X'(r) = +2 \frac{G_1}{R} + \omega^2 \end{cases}$

Soit $m(-G_1 + \omega^2 R) + m_2(2G_1 + R\omega^2) \cdot \frac{L}{R} = 0$; puis en ne travaillant qu'à l'ordre 1 en $\frac{L}{R}$:

$$\left(m + m_2 \frac{L}{R}\right) \omega^2 R = \left(m - 2m_2 \frac{L}{R}\right) G_1$$

$$\omega^2 = \frac{m - 2m_2 \frac{L}{R}}{m + m_2 \frac{L}{R}} \frac{G_1}{R} = \frac{1 - 2 \frac{m_2}{m} \frac{L}{R}}{1 + \frac{m_2}{m} \frac{L}{R}} \frac{G_1}{R} = \left(1 - 2 \frac{m_2}{m} \frac{L}{R}\right) \left(1 - \frac{m_2}{m} \frac{L}{R}\right) \frac{G_1}{R} = \left(1 - 3 \frac{m_2}{m} \frac{L}{R}\right) \frac{G_1}{R}$$

$$\boxed{\omega = \left(1 - \frac{3}{2} \frac{m_2}{m} \frac{L}{R}\right) \sqrt{\frac{G_1}{R}}}$$

3c- Si toute la masse du satellite était concentrée en M_1 : $\omega_1 = \sqrt{\frac{G_1}{R}}$

Ainsi $\omega = \left(1 - \frac{3}{2} \frac{m_2}{m} \frac{L}{R}\right) \omega_1$ et $\boxed{1 - \frac{\omega}{\omega_1} = \frac{3}{2} \frac{m_2}{m} \frac{L}{R}}$

AN : $1 - \frac{\omega}{\omega_1} = \frac{3}{2} \frac{m_2}{m} \frac{L}{R} = \frac{3}{2} \frac{1,0 \cdot 10^3}{2,0 \cdot 10^3 + 1,0 \cdot 10^2} \frac{1,0 \cdot 10^2}{7,2 \cdot 10^6} = \frac{3}{2} \frac{1,0}{2,1} \frac{1,0}{7,2} \cdot 10^{-4} = \underline{9,9 \cdot 10^{-6}}$

On pourrait dire « l'écart est très faible » mais qu'est-ce que cela signifie vraiment ici ?
L'écart entre la vitesse angulaire de ce satellite complexe radialement étendu et un satellite assimilable à un unique point est très faible vis-à-vis de la précision habituelle des données numériques (des problèmes de concours qui ont rarement 5 chiffres significatifs, mais pas de celles de la NASA). Ceci explique que la plupart du temps on assimile les satellites à des points pour le calculs des effets gravitationnels

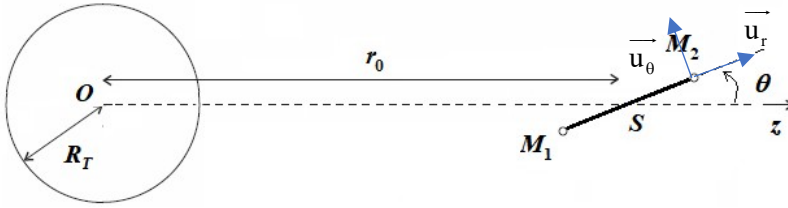
3d- A la question 4 on avait trouvé $\omega_{14} = \omega_1 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{m_2 + \frac{1}{2} \lambda L}{m} \cdot \frac{L}{R}\right)$

On ne retrouve donc pas la même expression $\omega_{13} = \omega_1 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{m_2}{m} \frac{L}{R}\right)$

Soit $\frac{\omega_{13} - \omega_{14}}{\omega_{13}} = \frac{3}{2} \frac{\lambda L}{2m} \frac{L}{R} \approx \frac{10^{-5}}{20} = 5 \cdot 10^{-7}$ L'écart n'est pas significatif ici.

III- Stabilisation du satellite par gradient de gravité.

On utilisera également les coordonnées polaires dans R avec les vecteurs de base indiqués sur le schéma ci-dessous



1- L'expression proposée $\omega = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0^3}}$ est celle que l'on obtiendrait si toute la masse de la station

était en S ; d'après la partie précédente, il s'agit d'une très bonne approximation, malgré l'extension non nulle de la station lorsque celle-ci est à l'équilibre dans R avec la position angulaire

2- Forces subies par M_1 :

$$\text{Gravitation : } \vec{F}_{T/1} = -G \frac{M_T m_1}{OM_1^3} \vec{OM}_1 = -G \frac{M_T m_1}{r_1^3} \vec{e}_1 = -m_1 \omega^2 \frac{r_0^3}{r_1^2} \vec{e}_1 = -\frac{m}{2} \omega^2 \frac{r_0^3}{r_1^3} \vec{e}_1$$

$$\text{Force d'inertie d'entraînement } \vec{F}_{ic1} = m_1 \omega^2 \vec{OM}_1 = \frac{m}{2} \omega^2 \vec{OM}_1$$

Force d'inertie de Coriolis

$$\vec{F}_{ic1} = -2m_1 \omega \vec{u}_y \wedge \vec{v}(M_1 / \mathcal{R}) = -2m_1 \omega \vec{u}_y \wedge \left(\dot{\theta} \vec{u}_y \wedge \vec{SM}_1 \right) = -2m_1 \omega \underbrace{(\vec{u}_y \cdot \vec{SM}_1)}_0 \cdot \dot{\theta} \vec{u}_y + 2m_1 \omega \underbrace{(\vec{u}_y \cdot \dot{\theta} \vec{u}_y)}_{\dot{\theta}} \vec{SM}_1$$

$$\boxed{\vec{F}_{ic1} = 2m_1 \omega \dot{\theta} \vec{SM}_1 = m \omega \dot{\theta} (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)}$$

De même, Forces subies par M_2 :

$$\text{Gravitation : } \vec{F}_{T/2} = -\frac{m}{2} \omega^2 \frac{r_0^3}{r_2^3} \vec{e}_2$$

$$\text{Force d'inertie d'entraînement } \vec{F}_{ic2} = m_2 \omega^2 \vec{OM}_2 = \frac{m}{2} \omega^2 \vec{OM}_2$$

$$\text{Force d'inertie de Coriolis } \boxed{\vec{F}_{ic2} = m \omega \dot{\theta} (\vec{r}_2 - \vec{r}_0)}$$

3- En appliquant le théorème du moment cinétique au satellite dans son ensemble (les tensions du fil étant des actions internes disparaîtront) en S point fixe de $\mathcal{R}$:

$$\frac{d\vec{\sigma}_S}{dt} = \vec{M}_{S,ext} = \vec{M}_S (\vec{F}_{T1} + \vec{F}_{ic1} + \vec{F}_{ic1} + \vec{F}_{T2} + \vec{F}_{ic2} + \vec{F}_{ic2}) \text{ avec}$$

$$\vec{\sigma}_S = \frac{m}{2} \vec{SM}_1 \wedge \vec{v}(M_1 / \mathcal{R}) + \frac{m}{2} \vec{SM}_2 \wedge \vec{v}(M_2 / \mathcal{R}) = \frac{m}{2} \left(\underbrace{\vec{SM}_1 \wedge \left(\dot{\theta} \vec{u}_y \wedge \vec{SM}_1 \right)}_{\vec{SM}_1^2 \dot{\theta} \vec{u}_y - \cancel{(\vec{SM}_1 \cdot \dot{\theta} \vec{u}_y) \cdot \vec{SM}_1}} + \vec{SM}_2 \wedge \left(\dot{\theta} \vec{u}_y \wedge \vec{SM}_2 \right) \right)$$

$$\vec{\sigma}_s = m \left(\frac{L}{2} \right)^2 \dot{\vec{\theta}} \vec{u}_y$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_s(\vec{F}_{T1}) &= \vec{SM}_1 \wedge (\vec{F}_{T1} + \vec{F}_{ic1}) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \wedge \left(-\frac{m}{2} \omega^2 \frac{r_0^3}{r_1^3} \vec{r}_1 \vec{e}_1 + \frac{m}{2} \omega^2 \vec{r}_1 \vec{e}_1 \right) = \frac{m}{2} \omega^2 \left(1 - \frac{r_0^3}{r_1^3} \right) (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \wedge \vec{r}_1 \\ &= -\frac{m}{2} \omega^2 \left(1 - \frac{r_0^3}{r_1^3} \right) \vec{r}_0 \wedge \vec{r}_1 \end{aligned}$$

Il reste ensuite à simplifier cette expression

$$\vec{r}_0 = r_0 \vec{e}_z \quad \vec{r}_1 = r_0 \vec{e}_z - \frac{L}{2} \vec{u}_r$$

$$\begin{aligned} r_1^3 &= (\vec{r}_1 \vec{r}_1)^{3/2} = \left(r_0^2 + \frac{L^2}{4} - L r_0 \vec{e}_z \vec{u}_r \right)^{3/2} = \left(r_0^2 + \frac{L^2}{4} - L r_0 \cos \theta \right)^{3/2} = r_0^3 \left(1 + \frac{L^2}{4 r_0^2} - \frac{L}{r_0} \cos \theta \right)^{3/2} \\ &= r_0^3 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{L}{r_0} \cos \theta \right) \\ \frac{r_0^3}{r_1^3} &= \left(1 - \frac{3}{2} \frac{L}{r_0} \cos \theta \right)^{-1} = 1 + \frac{3}{2} \frac{L}{r_0} \cos \theta \\ \vec{r}_0 \wedge \vec{r}_1 &= r_0 \vec{e}_z \wedge \left(r_0 \vec{e}_z - \frac{L}{2} \vec{u}_r \right) = -\frac{L}{2} r_0 \vec{e}_z \wedge \underbrace{\vec{u}_r}_{\cos \theta \vec{e}_z + \sin \theta \vec{e}_x} = -\frac{L}{2} r_0 \sin \theta \vec{e}_y \end{aligned}$$

$$\vec{M}_s(\vec{F}_{T1} + \vec{F}_{ic1}) = -\frac{m}{2} \omega^2 \left(1 - \frac{r_0^3}{r_1^3} \right) \vec{r}_0 \wedge \vec{r}_1 = -\frac{m}{2} \omega^2 \left(-\frac{3}{2} \frac{L}{r_0} \cos \theta \right) \left(-\frac{L}{2} r_0 \sin \theta \vec{e}_y \right) = -\frac{3m}{8} L^2 \omega^2 \cos \theta \sin \theta \vec{e}_y$$

Il est inutile de refaire le même calcul pour M_2 : il suffit de changer $L/2$ et $-L/2$ et on

$$\text{retrouve } \vec{M}_s(\vec{F}_{T2} + \vec{F}_{ic2}) = -\frac{3m}{8} L^2 \omega^2 \cos \theta \sin \theta \vec{e}_y$$

$$\text{Ainsi } \vec{M}_s(\vec{F}_{T1} + \vec{F}_{ic1} + \vec{F}_{T2} + \vec{F}_{ic2}) = -\frac{3}{4} m L^2 \omega^2 \cos \theta \sin \theta \vec{e}_y$$

Les moments des forces d'inertie de Coriolis sont heureusement plus simple à

$$\text{calculer : } \vec{M}_s(\vec{F}_{ic1}) = \vec{SM}_1 \wedge \vec{F}_{ic1} = \vec{SM}_1 \wedge \left(2m_1 \omega \dot{\vec{\theta}} \vec{SM}_1 \right) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{M}_s(\vec{F}_{ic2}) = \vec{0}$$

$$L' \text{équation du mouvement est donc } m \left(\frac{L}{2} \right)^2 \ddot{\vec{\theta}} = -\frac{3}{4} m L^2 \omega^2 \cos \theta \sin \theta \text{ soit}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} = -3 \omega^2 \cos \theta \sin \theta}$$

4- Les orientations d'équilibre correspondent aux solutions constantes de l'équation précédente.

$$\text{Elles vérifient donc } \cos \theta_{eq} \sin \theta_{eq} = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\theta_{eq} = 0 \text{ ou } \pi \text{ ou } \pm \frac{\pi}{2}}$$

Remarque : les configurations $\theta_{eq} = 0$ ou π d'une part et $\theta_{eq} = \pm \frac{\pi}{2}$ d'autre part sont les mêmes (de part la symétrie 1/2 du problème).

Stabilité de l'orientation d'équilibre en $\theta_{\text{eq}} = 0$ ou π

On pose $\theta_{\text{eq}} = 0 + \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll 1$. A l'ordre 1 en ε l'équation de la question 3 devient :

$$\boxed{\varepsilon'' + 3\omega^2(1)\varepsilon = 0}$$

On retrouve bien l'équilibre stable en $\theta_{\text{eq}} = 0$ ou π et la pulsation des petites oscillations sera

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{3}\omega}$$

Stabilité de l'orientation d'équilibre en $\theta_{\text{eq}} = \pm \frac{\pi}{2}$

On pose $\theta_{\text{eq}} = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll 1$. A l'ordre 1 en ε
$$\left\{ \begin{array}{l} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) = -\sin \varepsilon = -\varepsilon \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) = \cos \varepsilon = 1 \end{array} \right.$$

l'équation de la question 3 devient :
$$\boxed{\varepsilon'' - 3\omega^2\varepsilon = 0}$$

Le signe moins est le signe de l'instabilité de cette position d'équilibre

Partie 4 : Mouvement à l'intérieur d'une station spatiale

1- Etude de la force de gravitation dans la station :

1a- Principe fondamental de la dynamique appliqué à la station dans le référentiel $\mathcal{R}_0$ considéré galiléen.

$$\cancel{m_{\text{station}}} \frac{d^2 \overrightarrow{OG}}{dt^2} = \cancel{m_{\text{station}}} \overrightarrow{g(G)}$$

$$\overrightarrow{OG} = D \overrightarrow{u_r}$$

$$\vec{v} = D\omega \overrightarrow{u_\theta}$$

$$\vec{a} = -D\omega^2 \overrightarrow{u_r}$$

Donc $\boxed{D\omega^2 = g(G)}$

Remarque : on travaille en coordonnées polaires dans $\mathcal{R}_0$; $\overrightarrow{u_r} = -\vec{j}$

1b- $\overrightarrow{g(G)} = -G \frac{M_{\text{Terre}}}{OG^3} \overrightarrow{OG}$ et $g(G) = G \frac{M_{\text{Terre}}}{D^2} = D\omega^2$

Or $\overrightarrow{g(P)} = -G \frac{M_{\text{Terre}}}{OP^3} \overrightarrow{OP}$

Donc $\boxed{\overrightarrow{g(P)} = -\frac{D^3}{OP^3} \omega^2 \overrightarrow{OP}}$

Simplification :

$$\frac{\overrightarrow{OP}}{OP^3} = \frac{x\vec{i} + (-D+y)\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2 + (-D+y)^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{1}{D^2} \left(\left(\frac{x}{D} \right)^2 + \left(-1 + \left(\frac{y}{D} \right) \right)^2 + \left(\frac{z}{D} \right)^2 \right)^{-3/2} \left(\frac{x}{D} \vec{i} + \left(-1 + \frac{y}{D} \right) \vec{j} + \frac{z}{D} \vec{k} \right)$$

$$= \frac{1}{D^2} \left(1 - 2\frac{y}{D} + o\left(\left(\frac{x,y,z}{D} \right)^2 \right) \right)^{-3/2} \left(\frac{x}{D} \vec{i} + \left(-1 + \frac{y}{D} \right) \vec{j} + \frac{z}{D} \vec{k} \right)$$

$$= \frac{1}{D^2} \left(1 + 3\frac{y}{D} + o\left(\left(\frac{x,y,z}{D} \right)^2 \right) \right) \left(-\vec{j} + \frac{x}{D} \vec{i} + \frac{y}{D} \vec{j} + \frac{z}{D} \vec{k} \right)$$

$$= \frac{1}{D^2} \left(-\vec{j} + \frac{x}{D} \vec{i} + \frac{y}{D} \vec{j} + \frac{z}{D} \vec{k} - 3\frac{y}{D} \vec{j} \right)$$

$$= \frac{1}{D^2} \left(-\vec{j} + \frac{x}{D} \vec{i} - 2\frac{y}{D} \vec{j} + \frac{z}{D} \vec{k} \right)$$

Ainsi $\boxed{\overrightarrow{g(P)} = -\frac{D^3}{OP^3} \omega^2 \overrightarrow{OP} = -D\omega^2 \left(-\vec{j} + \frac{x}{D} \vec{i} - 2\frac{y}{D} \vec{j} + \frac{z}{D} \vec{k} \right) = -\omega^2 (-D\vec{j} + x\vec{i} - 2y\vec{j} + z\vec{k})}$

2- Equations du mouvement :

Principe fondamental de la dynamique appliqué à P dans $\mathcal{R}$ en rotation uniforme à la vitesse angulaire ω autour de $(O, \vec{k})$ dans $\mathcal{R}_0$ donc non galiléen :

$$m \mathbf{a}(P / \mathcal{R}) = m \left. \frac{d^2 \overrightarrow{GP}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}} = m \overrightarrow{g(P)} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$$

avec $\vec{f}_{ie} = m\omega^2 \overline{HP} = m\omega^2 (x\vec{i} + (-D+y)\vec{j})$ H est le projeté orthogonal de P sur $(O, \vec{k})$

$$\vec{f}_{ie} = -2m\omega \vec{k} \wedge \vec{v}(P/\mathcal{R}) = -2m\omega \vec{k} \wedge (\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}) = -2m\omega (\dot{x}\vec{j} - \dot{y}\vec{i})$$

Les projections donnent :

• Sur $\vec{i}$: $\ddot{x} = -\omega^2 x + \omega^2 x + 2\omega \dot{y} = \underline{2\omega \dot{y}}$ • Sur $\vec{j}$: $\ddot{y} = \omega^2 (D+2y) + \omega^2 (-D+y) - 2\omega \dot{x} = \underline{\underline{3\omega^2 y - 2\omega \dot{x}}}$ • Sur $\vec{k}$: $\ddot{z} = \underline{\underline{-\omega^2 z}}$

Termes statiques ; termes dynamiques (les termes dynamiques sont nuls lorsque P est au repos dans $\mathcal{R}$)

3- Etude de l'équilibre dans la station :

3a- Situation d'impesanteur : les effets inertiels ($\vec{f}_{ie}$) compensent l'attraction gravitationnelle de la Terre ; Tout se passe comme si P était isolé.

Cela ne se produit que si les termes statiques sont nuls soit en $\boxed{y = z = 0}$: **seules les positions sur l'axe $(G, \vec{i})$ permettent l'impesanteur.**

La trajectoire de P dans $\mathcal{R}_0$ sera donc circulaire uniforme à la vitesse angulaire ω

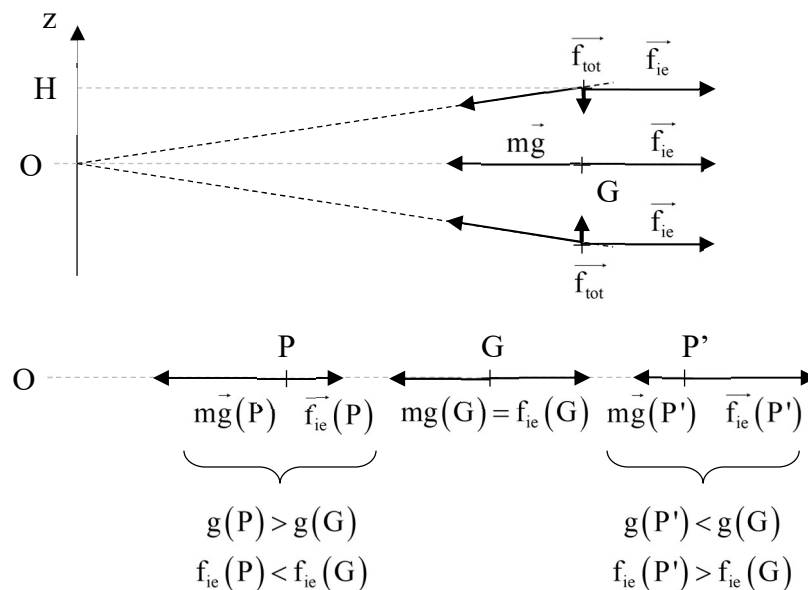
3b- Cas 1 : $y = 0$ et $z \neq 0$ (sortie du plan de l'orbite)

$$\ddot{x} = 2\omega \dot{y} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{En l'absence de vitesse initiale}$$

$$\ddot{y} = -2\omega \dot{x} = 0$$

$$\ddot{z} = -\omega^2 z \quad \rightarrow \quad \text{Effet de rappel : mouvement de retour vers } z = 0$$

Cet effet (rappel) s'interprète simplement en étudiant les directions de $m\vec{g}(\overline{P})$ et $\vec{f}_{ie}$



Cas 2 : $y \neq 0$ (mouvement radial) $\ddot{y} = 3\omega^2 y$ force répulsive qui écarte P de G
Cet effet peut également s'interpréter en représentant les force en différentes positions de l'axe radial

3c- Une station spatiale ou un satellite naturel de trop grande taille risque de se disloquer sous l'effet de ces forces qui sont d'autant plus importantes que l'extension radiale (suivant $G\vec{j}$) est importante

- C'est ce genre de force que l'on appelle « force de marée » liée à un effet différentielle de $\vec{g}$ et $\vec{f}_{ic}$ et qui disloque le corps satellisé lorsqu'elles sont plus intenses que les force de cohésion internes.

- Cet effet de marée est d'autant plus intense que ω est grand et que le champ de gravitation de la planète est intense ($\omega^2 \propto g(G)$) et que le satellite est proche ($\omega^2 \propto 1/D$)

Ainsi les planètes géantes du système solaire ont un champ gravitationnel suffisamment intense pour que les satellites, comètes ... passant trop près d'elles soient disloquées en de nombreux débris qui restent satellisés et forment les anneaux. L'aplatissement des anneaux est alors dû à l'effet de rappel évoqué au **3b-**.

4- Etude d'un déplacement dans la station :

4a- Reprenons le système d'équations de la question **2-** avec les conditions initiales (dans $\mathcal{R}$)

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0 ; \dot{x}_0 = \dot{z}_0 = 0 \text{ et } \dot{y}_0 > 0$$

La projection sur $\vec{k}$ montre que le mouvement le long de l'axe ($G\vec{k}$) est décorrélé du mouvement dans le plan ($G, \vec{i}, \vec{j}$). Les conditions initiales imposent $z = 0$

Dans le plan ($G, \vec{i}, \vec{j}$)

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\omega \dot{y} \\ \ddot{y} = 3\omega^2 y - 2\omega \dot{x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{x} = 2\omega y + A_x \underset{\text{c.i.}}{=} 2\omega y \\ \ddot{y} = 3\omega^2 y - 4\omega^2 y = -\omega^2 y \end{cases}$$

On obtient ainsi : $y = \alpha_y \cos(\omega t) + \beta_y \sin(\omega t) = \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin(\omega t)$

Et $\dot{x} = 2\omega y = 2\dot{y}_0 \sin(\omega t)$ donc $x = -\frac{2\dot{y}_0}{\omega} \cos(\omega t) + B_x = \frac{2\dot{y}_0}{\omega} (1 - \cos(\omega t))$

On obtient :

$$\begin{cases} x = \frac{2\dot{y}_0}{\omega} (1 - \cos(\omega t)) \\ y = \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin(\omega t) \end{cases}$$

4b- Dans la station l'astronaute sera sur une trajectoire elliptique décrite avec la période $\frac{2\pi}{\omega}$,

période de rotation de révolution de la station autour de la Terre.

Ceci est normal : tant que l'astronaute ne touche pas le sol, la seule force d'interaction à

laquelle il est soumise est l'attraction gravitationnelle terrestre, force centrale newtonienne. Son mouvement dans le référentiel géocentrique galiléen $\mathcal{R}_0$ est donc une ellipse. Sa distance au centre de la Terre est

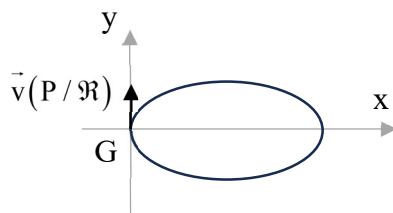
$$OP = \sqrt{(D-y)^2 + x^2} = \sqrt{\left(D - \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin(\omega t)\right)^2 + \frac{4\dot{y}_0^2}{\omega^2} (1 - \cos(\omega t))^2} = D \left(1 - \frac{\dot{y}_0}{D\omega} \sin(\omega t)\right) \text{ à}$$

l'ordre 1 en $\frac{\dot{y}_0}{D\omega}$.

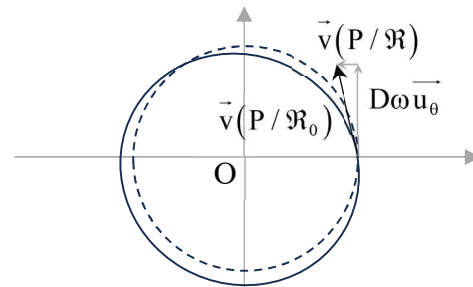
On a donc : $r_p = D \left(1 - \frac{\dot{y}_0}{D\omega}\right)$ et $r_A = D \left(1 + \frac{\dot{y}_0}{D\omega}\right)$. Le demi grand axe est donc

$a = \frac{r_p + r_A}{2} = D$; comme sur l'orbite circulaire et d'après la troisième loi de Kepler, la période sera la même que sur l'orbite circulaire.

Trajectoire de P dans $\mathcal{R}$



Trajectoires dans $\mathcal{R}_0$



- Trajectoire circulaire de G dans $\mathcal{R}_0$
- Trajectoire circulaire de G dans $\mathcal{R}_0$