Existence du vecteur rotation

On travaille dans un référentiel R_0 muni d'une base cartésienne $\left(O, \vec{i_0}, \vec{j_0}, \vec{k_0}\right)$

On considère un référentiel R associé à un solide S et 4 points de ce solide $\left(O, I, J, K\right)$ qui ont les propriétés suivantes :

$\left\|\overrightarrow{OI}\right\| = \left\|\overrightarrow{OJ}\right\| = \left\|\overrightarrow{OK}\right\| = e$ (e est bien constant car la distance entre deux points d'un solide indéformable est constante dans le temps) et $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OJ}.\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OK}.\overrightarrow{OI} = 0$

Les vecteurs $\vec{i} = \frac{\overrightarrow{OI}}{e}$, $\vec{j} = \frac{\overrightarrow{OJ}}{e}$, $\vec{k} = \frac{\overrightarrow{OK}}{e}$ forme donc une base orthonormée fixe pour le référentiel R lié au solide *S*.

On a :

$$\left.\frac{d\vec{i}}{dt}\right)_{R_0} = c_{11}\vec{i} + c_{12}\vec{j} + c_{13}\vec{k}$$

$$\left.\frac{d\vec{j}}{dt}\right)_{R_0} = c_{21}\vec{i} + c_{22}\vec{j} + c_{23}\vec{k}$$

$$\left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right)_{R_0} = c_{31}\vec{i} + c_{32}\vec{j} + c_{33}\vec{k}$$

Mais $\left\|\vec{i}\right\|^2 = \vec{i}.\vec{i} = 1 = \text{cst}$ ce qui donne $\left.\frac{d\vec{i}}{dt}\right)_{R_0}.\vec{i} = 0$. Soit $c_{11} = 0$ et de même $c_{22} = c_{33} = 0$

On a de plus : $\vec{i}.\vec{j} = 0 = \text{cst}$ ce qui donne $\left.\frac{d\vec{i}}{dt}\right)_{R_0}.\vec{j} + \vec{i}.\left.\frac{d\vec{j}}{dt}\right)_{R_0} = 0 = c_{12} + c_{21}$. Soit $c_{21} = -c_{12}$ et de même $c_{32} = -c_{23}$ et $c_{13} = -c_{31}$

On a donc :

$$\left.\frac{d\vec{i}}{dt}\right)_{R_0} = c_{12}\vec{j} - c_{31}\vec{k}$$

$$\left.\frac{d\vec{j}}{dt}\right)_{R_0} = -c_{12}\vec{i} + c_{23}\vec{k}$$

$$\left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right)_{R_0} = c_{31}\vec{i} - c_{23}\vec{j}$$

si on pose $\vec{\Omega} = c_{23}\vec{i} + c_{31}\vec{j} + c_{12}\vec{k}$ on a

$$\left.\frac{d\vec{i}}{dt}\right)_{R_0} = \vec{\Omega} \wedge \vec{i} = \begin{pmatrix} c_{23} \\ c_{31} \\ c_{12} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_{31} \\ -c_{31} \end{pmatrix}$$

$$\left.\frac{d\vec{j}}{dt}\right)_{R_0} = \vec{\Omega} \wedge \vec{j} = \begin{pmatrix} c_{23} \\ c_{31} \\ c_{12} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_{12} \\ 0 \\ c_{23} \end{pmatrix}$$

$$\left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right)_{R_0} = \vec{\Omega} \wedge \vec{k} = \begin{pmatrix} c_{23} \\ c_{31} \\ c_{12} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{31} \\ -c_{23} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\boxed{\text{avec } \vec{\Omega} = c_{23}\vec{i} + c_{31}\vec{j} + c_{12}\vec{k} \text{ on a bien } \left.\frac{d\vec{i}}{dt}\right)_{R_0} = \vec{\Omega} \wedge \vec{i}\,; \quad \left.\frac{d\vec{j}}{dt}\right)_{R_0} = \vec{\Omega} \wedge \vec{j}\,; \left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right)_{R_0} = \vec{\Omega} \wedge \vec{k}}$