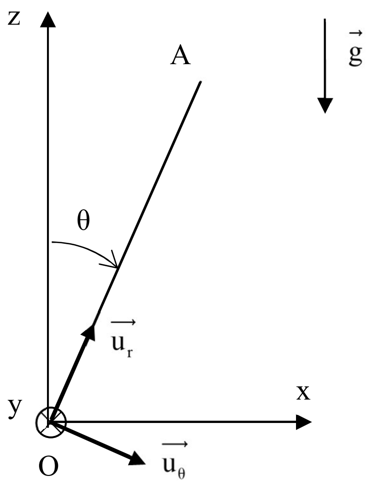
Mécanique : révisions de MPSI

C- MECANIQUE DU SOLIDE

Exercice C1 : Brisure d'une cheminée



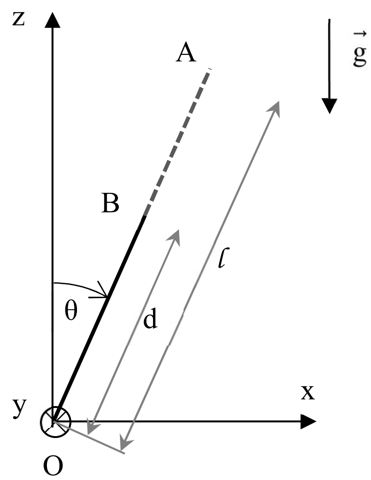
On assimile une cheminée à une tige homogène OA de masse m et de longueur ℓ. On dynamite sa base (point O) et elle amorce une rotation dans un plan vertical autour du point O bloqué par les débris de l'explosion ; on note (Oz) la verticale ascendante, (zOx) le plan de chute et θ (t) l'angle que fait OA avec (Oz) à l'instant t. La base polaire dans le plan (zOx) est notée $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta\right)$.

On choisit la date de l'explosion comme origine des temps t = 0. On considère que juste après l'explosion, la cheminé est quasiment verticale et immobile.

On admet que l'action du sol sur la cheminée se résume à une force $\vec{R}$ appliquée au point O et que la cheminée bascule autour de l'axe (Oy) sans glisser. On note g l'intensité de la pesanteur. Le moment d'inertie de la cheminée par rapport à l'axe (Oy) est : $J = \frac{1}{3} m\ell^2$.

1- Déterminer les composantes de la réaction $\vec{R}$ appliquée à la base de la cheminée et vérifier qu'elles se mettent sous la forme : $\begin{cases} R_r = \frac{1}{2} mg(5\cos\theta - 3) \\ R_\theta = -\frac{1}{4} mg \sin\theta \end{cases}$

La cheminée est composée de briques qui exercent des actions les unes sur les autres. Si ces actions internes deviennent trop importantes, la cheminée peut se briser au cours de sa chute. On considère la cheminée avant la rupture, constituée par les parties OB et BA, avec $OB = d$ une longueur arbitraire dans l'intervalle $[0, \ell]$, comme représentée ci-contre. Les deux parties ont été représentées différemment pour mieux les visualiser, mais la cheminée est encore considérée comme homogène. On peut donc appliquer les résultats des questions précédentes.



Une longueur $OB = d$ de cheminée subit l'action du sol en O (dont l'expression est inchangée), l'action de son poids ainsi que l'action du reste de la cheminée sur elle-même, en B. Cette action assure la rigidité de la cheminée. Le contact en B n'est pas ponctuel. L'action du reste de la cheminée sur la longueur *d* est modélisée par une force $\vec{S}$ de composantes S_r et S_θ **et** un couple $\vec{C}$ porté par l'axe horizontal (O*y*).

2- Exprimer S_θ en fonction de M, g, θ, d et D. On montrera que : $S_\theta = mg\sin\theta\left(\frac{1}{4} - X + \frac{3}{4}X^2\right)$

où X est un paramètre que l'on exprimera.

La grandeur S_θ est appelée *effort de cisaillement*.

3- Si la cheminée perd sa rigidité, elle s'effrite. Elle aura tendance à s'effriter au point où l'effort de cisaillement S_θ est le plus important ; quel est ce point ?

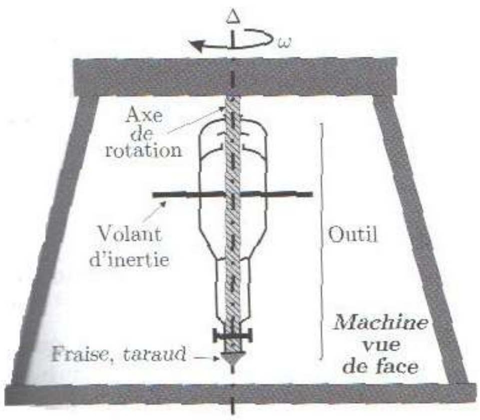
4- Montrer que le moment (noté C) du couple mentionné dans le paragraphe ci-dessus est :

$$C = -\frac{1}{4}mgd\ \sin(\theta)\left(1 - \frac{d}{\ell}\right)^2$$

5- Si ce couple est supérieur au couple maximum que peut subir la cheminée, celle-ci se brise. En quel point la cheminée se brisera-t-elle ?

Exercice C2 : une machine tournante.

On considère une machine (tour, fraiseuse, etc …) dont une partie massive (l'outil) peut être mise en rotation autour d'un axe fixe Δ par l'action d'un couple moteur. L'outil possède un moment d'inertie J_Δ par rapport à l'axe Δ et sa vitesse de rotation autour de l'axe Δ est notée ω (voir figure ci-dessous)



On suppose finalement que l'ensemble des forces de frottement subies par l'outil peut être représenté par un couple de moment par rapport à l'axe de la machine de la forme $M_\Delta = -k\omega$ où k est une constante positive.

1- Initialement immobile, l'outil est soumis à partir de l'instant t = 0 à l'action d'un couple moteur $\Gamma = \Gamma_0$ constant. Déterminer l'équation du mouvement de l'outil vérifiée par ω(t)

2- La présence de vibration indésirable est inévitable sur ce genre de machine. Afin de les prendre en compte, on suppose que le couple moteur n'est plus constant mais modulé à la fréquence $\frac{\Omega}{2\pi}$ avec un taux de modulation η. Le moment de ce couple par rapport à l'axe Δ s'écrit dont $\Gamma(t) = \Gamma_0\left(1 + \eta\cos(\Omega t)\right)$

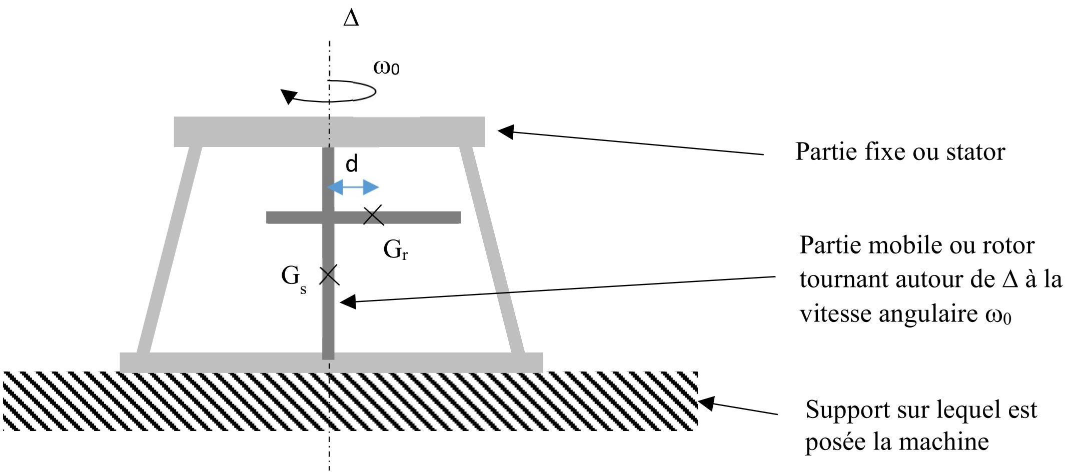
2a- Déterminer en régime établi l'expression de ω(t)

2b- Estimer le temps d'établissement du régime calculé à la question précédente.

2c- Déterminer la puissance moyenne fournie par le couple moteur à l'outil en régime établi

3- Problème d'équilibrage de la machine tournante.

Nous nous intéressons dans cette partie au problème d'équilibrage de la machine tournante. La machine tournante est mal équilibrée si le centre d'inertie G_t de la partie tournante n'est pas situé sur l'axe de rotation Δ ; le centre d'inertie G_s de la partie fixe, le stator est, lui, situé sur Δ (voir sur le schéma ci-dessous)



Notation

- G_r et G_s les centres d'inertie du rotor (partie mobile) et du stator (partie fixe de la machine) respectivement.
- d la distance entre G_r et l'axe de rotation Δ
- J_Δ le moment d'inertie de la partie tournante par rapport à l'axe Δ.
- m la masse de la partie tournante
- M la masse de la partie fixe (stator)

Nous ferons les hypothèses suivantes :

- la partie tournante tourne à la vitesse angulaire constante ω_0 obtenue à la question 1
- la machine (partie fixe et partie mobile) est posée sur un support plan (hachuré sur le schéma ci-dessus) ; le contact entre le support et la machine est caractérisée par un coefficient de frottement f.

4- Déterminer une condition portant sur d et ω_0 (entre autres) pour que la machine ne glisse pas sur son support.