Equations locales de l'électromagnétisme

Tous les calculs portant sur la puissance et l'énergie seront traités ultérieurement

I. ETUDE DU CHAMP E.M. DANS UN METAL : LOI D'OHM ET EFFET DE PEAU.

Exercice I-1 : Loi d'Ohm locale dans un métal ; modèle de Drüde.

On s'intéresse à un métal au sein duquel on suppose que chaque atome libère un électron de conduction de charge $q = -e$ et de masse m, et on appelle n la densité particulaire de ces électrons de conduction. Sous l'effet d'un champ électrique, ceux-ci sont mis en mouvement et acquièrent une *vitesse d'ensemble* $\vec{v}$ (vitesse « de dérive ») qui se superpose à leur vitesse d'agitation thermique et conduit au courant électrique. On constate qu'en régime statique, cette vitesse est constante, ce qui se traduit par la loi d'Ohm.

Afin de rendre compte de cette vitesse limite puis d'étudier la conduction en régime variable, on adopte le *modèle de Drüde* selon lequel l'effet *moyen* des interactions entre un électron en mouvement à la vitesse $\vec{v}$ par rapport au réseau cristallin et les charges fixes de ce réseau peut être décrit pas une force de type frottement fluide : $-h\vec{v}$. Cette hypothèse revient à introduire un temps de relaxation $\tau = m/h$ que l'on peut mesurer grâce aux phénomènes décrits ci-dessous.

Les applications numériques seront relatives au cuivre, de masse molaire atomique $A = 63{,}5$ g.mol^{-1} et de masse volumique $\mu = 8{,}9$ g.cm^{-3} ; les mesures dans le cuivre donnent $\tau = 2{,}5\ 10^{-14}$s. On rappelle en outre les valeurs numériques : $e = 1{,}6\ 10^{-19}$ C, $m = 9{,}1\ 10^{-31}$ kg ainsi que le nombre d'Avogadro : $N_a = 6{,}02\ 10^{23}$.

1- Le champ électrique appliqué est tout d'abord statique et uniforme et on néglige l'effet du champ magnétique. En étudiant le mouvement d'un électron dans le modèle de Drüde, établir l'équation différentielle vérifiée par sa vitesse et montrer que celle-ci tend effectivement vers une valeur limite. En déduire la vitesse d'ensemble $\vec{v}$ d'un volume mésoscopique d'électrons, puis montrer que l'on aboutit bien à la loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$
Donner l'expression de la conductivité γ_0 du cuivre en fonction de n, e, m et τ. Effectuer l'application numérique à l'aide des données fournies et comparer à la valeur expérimentale : $5{,}6\ 10^7$ S.m^{-1}.

2- Montrer qu'en présence d'un champ magnétique (qui peut être le champ magnétique propre du circuit ou un champ extérieur, créé par un aimant, par exemple), la loi précédente est modifiée et devient : $\vec{j} = \gamma_0 \left(\vec{E} - \frac{1}{ne} \vec{j} \wedge \vec{B} \right)$
Illustrer cette loi en traçant les lignes de champ de $\vec{E}$ et $\vec{j}$ dans le cas où $\vec{B} \perp \vec{E}$.
Montrer que dans un métal le terme « correctif » est négligeable, même pour des champs forts. On constate en revanche qu'il n'en est rien dans un semi-conducteur ; proposer une explication.

Dans toute la suite, on néglige de nouveau tout effet magnétique et on suppose qu'un champ électrique variable, sinusoïdal de pulsation ω, est appliqué au métal ; ce champ est supposé uniforme à l'échelle du mouvement de l'électron. On s'intéresse alors au vecteur densité de courant en régime permanent sinusoïdal.

3- Expliquer pourquoi il est de rigueur d'utiliser la notation complexe et montrer que les amplitudes complexes du vecteur densité de courant et du champ électrique sont reliées par une relation du type :

$\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma}\underline{\vec{E}}$ où $\underline{\gamma}$ est un nombre complexe que l'on exprimera en fonction de γ_0, τ et ω.

Décrire clairement ce que cette relation traduit comme lien entre $\vec{j}(\vec{r},t)$ et $\vec{E}(\vec{r},t)$ puis montrer que le métal suit convenablement la loi d'Ohm locale tant que la fréquence ν reste nettement inférieure à une fréquence de coupure ν_c que l'on calculera. Commenter le résultat obtenu.

Jusqu'à quelle fréquence le courant de déplacement est-il négligeable dans un métal ?

Questions complémentaires moins importantes :

4- De la question précédente, déduire l'équation différentielle qui relie $\vec{E}$ et $\vec{j}$ en tout point, puis l'équation différentielle suivie par la densité volumique de charge ρ. Quel est le temps caractéristique de relaxation de la charge si à on suppose qu'il apparaît subitement en un point une densité de charge ρ_0 non nulle ? Discuter l'affirmation selon laquelle un métal ohmique peut être considéré localement neutre à tout instant.

5- Donner enfin, en fonction de γ_0, τ , ω et l'amplitude E_0 du champ électrique appliqué, l'expression de la puissance moyenne dissipée dans le métal. Commenter.

Exercice I-2 : Pénétration d'un champ électromagnétique variable dans un métal. Effet de peau.

L'espace est maintenant rapporté à un trièdre *(Oxyz)* et on adopte le modèle unidimensionnel suivant : un métal occupe tout le demi espace ($z > 0$), le demi espace ($z < 0$) étant vide et on impose dans le vide un champ magnétique uniforme oscillant : $\vec{B}(z<0) = B_0 \cos(\omega t)\vec{u}_x$; on cherche le champ électromagnétique qui règne dans le métal une fois le régime permanent sinusoïdal établi, en supposant que la fréquence permet d'appliquer la loi d'Ohm et en notant γ la conductivité.

1- Rappeler les équations constitutives du métal et en déduire la forme opérationnelle des équations de Maxwell dans ce métal. Montrer alors que le champ magnétique suit, dans le métal, l'équation suivante : $\vec{\Delta}\vec{B} = \mu_0\gamma\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Une telle équation est très courante en physique : il s'agit d'une équation de diffusion. Le coefficient ($\mu_0\gamma$)$^{-1}$ est ainsi appelé : diffusivité magnétique.

2- On cherche une solution sous la forme :

$\vec{B}(z>0,t) = b(z)\cos(\omega t + \varphi(z))\vec{u}_x = \Re e\{\underline{b}(z)e^{j\omega t}\vec{u}_x\}$

Commenter la forme de solution envisagée puis l'injecter dans l'équation différentielle en utilisant la notation complexe proposée. En déduire une équation différentielle portant sur $\underline{b}(z)$ et montrer finalement que l'on obtient pour solution :

$$\vec{B}(z>0,t) = B_0 e^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\vec{u}_x \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

La grandeur δ, homogène à une longueur, est appelée : épaisseur de peau.

Caractériser précisément le phénomène observé dans le conducteur. Représenter sur le même graphe $\vec{B}(z>0,t)\cdot\vec{u}_x$ en fonction de z à t = 0, au bout d'un quart de période, puis au bout d'une demi-période.

3- Quelle équation locale est vérifiée par le champ électrique au sein du métal ? par le vecteur densité de courant ? Déduire de l'expression du champ magnétique celle du champ électrique en tout point et commenter.

4- Application numérique pour le cuivre de conductivité $\gamma = 6.10^7$ S.m^{-1} : calculer l'épaisseur de peau aux fréquences suivantes : 50 Hz, 1 kHz, 1 MHz, 1 GHz, 1 THz. On rappelle que $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\,\text{H.m}^{-1}$.

Commenter la valeur obtenue à 50 Hz puis justifier l'appellation : *effet de peau* pour le phénomène observé. A quelle condition le modèle unidimensionnel peut-il être étendu à des géométries plus réalistes ?

Proposer une application dans le cadre d'ondes électromagnétiques haute fréquence. Quel métal a-t-on intérêt à choisir pour cette application ?

5- Déterminer le vecteur densité de courant en tout point du métal puis la puissance volumique dissipée par effet Joule au sein du métal.

De tels courants apparaissent dès que l'on essaie d'appliquer un champ magnétique variable dans un métal ; on les appelle : courants de Foucault.

Montrer que la puissance moyenne dissipée dans le conducteur par unité de surface s'écrit :

$$\left\langle \frac{dP}{dS} \right\rangle = B_0^2 \sqrt{\frac{\omega}{8\gamma\mu_0^3}}.$$

Commenter cette formule, en particulier sa dépendance en γ qui semble paradoxale, puis exhiber un dispositif de la vie courante exploitant cette dissipation d'énergie. Quel métal a-t-on intérêt à choisir pour cette application ?

♦

Il existe de nombreux exercices où l'on cherche à calculer les courants induits (courants de Foucault) qui naissent au sein d'un métal plongé dans un champ magnétique extérieur variable, dans le cas particulier où ce champ est *lentement variable* et le métal *peu volumineux*.

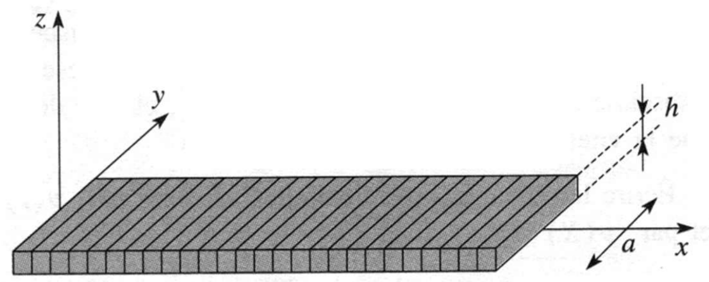
Dans ce cas, il est possible de simplifier le calcul en supposant a priori que l'épaisseur de peau δ est supérieure à la taille a caractéristique du milieu métallique (si l'on dispose de valeurs numériques, on peut évidemment calculer δ/a et tester cette hypothèse) ; on écrit alors qu'en tout point du métal, le champ magnétique total est sensiblement égal au champ imposé par les sources extérieures ou, autrement dit, que le champ magnétique créé par les courants induits reste faible devant le champ extérieur (cette hypothèse figure d'ailleurs souvent de façon explicite dans l'énoncé). Il suffit alors de calculer le champ électrique via la loi de Faraday, puis les courants induits via la loi d'Ohm locale.

On peut, a posteriori, évaluer la valeur maximale du champ magnétique créé par les courants induits (il s'agit en général de la valeur du champ au centre du solide métallique étudié) et la comparer à la valeur du champ extérieur, ce qui permet de discuter l'hypothèse initiale.

Voici un exemple d'exercice de ce type :

Exercice complémentaire I-3 : Courants de Foucault et chauffage par induction

Sur un parallélépipède de largeur a, d'épaisseur $h \ll a$ et de grande longueur, est enroulé un fil parcouru par un courant d'intensité $I = I_m \cos(\omega t)$, à raison de n tours par unité de longueur. Ce solénoïde, très aplati, est rempli par un métal non magnétique de conductivité γ.



Loin des bords, on suppose que le champ électrique est de la forme $\vec{E} = E_y(z)\vec{e_y}$

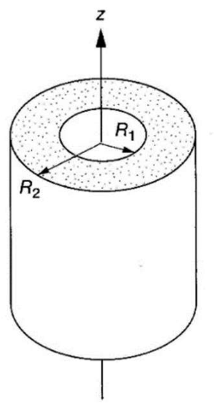
1- Vérifier que cette hypothèse est compatible avec les lois de l'électromagnétisme et la géométrie du système. Etudier la parité de la fonction $E_y(z)$.

2- Calculer le vecteur densité de courant $\vec{j}$ et la puissance moyenne P dissipée par une longueur l mesurée selon (Ox), en négligeant le champ $\vec{B}$ créé par les courants induits.

3- A quelle condition cette dernière hypothèse est-elle justifiée ?

II. CHAMP E.M. DANS DIVERS MILIEUX.

Exercice II-1 : Relaxation de charges dans un condensateur cylindrique



Deux cylindres métalliques coaxiaux, de rayons respectifs R_1 et R_2, sont séparés par un gaz isolant ayant même permittivité que le vide. A l'instant initial, le conducteur intérieur porte la densité surfacique de charge uniforme σ_0, tandis que le conducteur extérieur n'est pas chargé. On suppose qu'un rayonnement énergétique rend instantanément le gaz conducteur, avec une conductivité γ. On négligera les effets de bord en raisonnant comme si les cylindres étaient de longueur infinie.

1- Examiner les symétrie et invariances et tirer des conclusions sur les champs et la densité de courant.

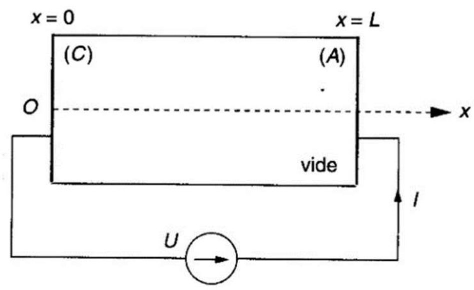
2- A l'aide de l'équation de Maxwell-Ampère, établir une équation différentielle relative au champ électrique.

3- Intégrer cette équation et préciser l'évolution de la densité surfacique de charges sur le conducteur intérieur. Interpréter les propriétés obtenues après un temps très long.

4- Quelle propriété l'équation locale de conservation de la charge impose-t-elle entre les cylindres ?

5- Après avoir effectué un bilan énergétique de la relaxation des charges, calculer de la manière la plus simple possible l'énergie dissipée par effet Joule lors de cette évolution.

Exercice II-2 : Diode à vide



On envisage le dispositif de la figure ci-contre : une cathode (C) plaque métallique plane de surface S, est chauffée et émet des électrons dans un enceinte où règne un vide poussé ; ces électrons sont récupérés par une anode (A) identique à (C) et portée à un potentiel U positif par rapport à la cathode par un générateur de tension de fem U.

On étudie un régime stationnaire pour lequel on définit, dans l'espace $0 \le x \le L$ entre les deux électrodes de même surface S, la vitesse v(x) d'un électron passant en un point d'abscisse x, le nombre volumique $n^*(x)$ et le potentiel V(x), tel que $V(x=0)=0$. On note I l'intensité du courant dans le circuit avec l'orientation indiquée sur la figure.

1- Trouver une relation entre $v(x)$ et $V(x)$ puis montrer que le potentiel suit une équation du type : $\dfrac{d^2V}{dx^2} = \alpha V^{-1/2}$.

Chercher une solution de la forme $V(x) = \beta x^k$

2- Quelle est la caractéristique $I = f(U)$? Commenter.

3- Quelle durée met un électron pour passer de la cathode à l'anode ?

Exercice II-3 : Etude d'un supraconducteur, équation de London, effet Meissner

Pour certains conducteurs, on observe la disparition de tout résistivité mesurable au-dessous d'une certain température critique T_C (4,15 K pour le mercure, premier cas rencontré, en 1911 par le hollandais Kamerlingh Onnes). Pendant longtemps, l'intérêt de tels matériaux, dits supraconducteurs (SC) a été limité par les très basses valeurs des températures critiques, nécessitant l'emploi d'hélium liquide.

L'intérêt du sujet a été relancé par l'obtention (Bednorz et Müller, prox Nobel en 1987) de matériaux dits SC haute température dont les températures critiques, supérieures à 100K, peuvent être réalisées dans le l'azote liquide, beaucoup moins onéreux. Les recherches continues, l'obtention de SC à température ambiante serait une véritable révolution technologique.

On se propose ci-dessous de montrer qu'un SC n'est pas seulement un conducteur de conductivité infinie (conducteur parfait), mais est en fait caractérisé principalement par ses propriétés magnétiques (effet Meissner, 1933)

On admet que dans le SC le champ magnétique est proportionnel au rotationnel du vecteur densité de courant, selon l'équation dite de London :

$$\vec{B} = -\Lambda \, \overrightarrow{\mathrm{rot}} \, \vec{j} \quad \text{(Eq 1)};$$

Λ étant une constante positive.

1- En régime stationnaire, montrer que le champ magnétique $\vec{B}$ dans le SC vérifie l'équation

$$\Delta\vec{B} - \frac{\vec{B}}{\lambda^2} = \vec{0} \quad \text{(Eq 2)} ;$$

λ étant une constante dont on précisera la dimension et que l'on exprimera en fonction de μ_0 et Λ.

2- Dans un modèle très simplifié le SC est modélisé par le demi-espace $z > 0$. Dans le vide à l'extérieur du SC et au contact immédiat de celui-ci $\left(z = 0^-\right)$ règne un champ magnétique, dit *champ extérieur* que l'on représente **a priori** sous la forme

$$\overrightarrow{B_e} = B_0 \overrightarrow{u_x} + \beta \overrightarrow{u_z} \quad \text{(Eq 3)} ;$$

B_0 et β étant des constantes. En astreignant la solution de (Eq 2) à être bornée et, compte tenu du modèle, indépendante des coordonnées x et y et après avoir exprimé la **continuité** du champ, donner l'expression a priori des coordonnées de champ $\vec{B}$ intérieur au SC en fonction de B_0, β, z et λ.

En utilisant une équation de Maxwell, montrer que le champ extérieur donné par (Eq 3) est en fait nécessairement tangent au SC.

Les valeur de Λ conduisent à $\lambda \approx 50\,\mathrm{nm}$. Commenter cet ordre de grandeur.

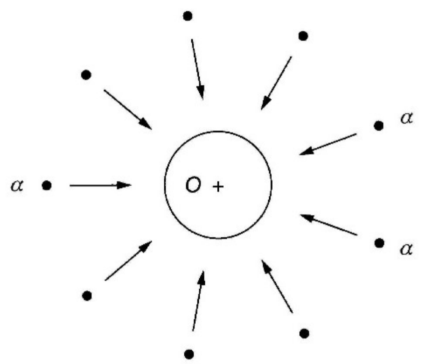
On dit couramment que « l'effet Meissner consiste en l'expulsion du champ magnétique du volume d'un supraconducteur », ou encore : « le champ intérieur $\overrightarrow{B_i}$ est nul dans un SC ». Commenter cette formulation

3- Exprimer $\vec{j}$ dans le SC précédent en fonction de B_0, z et λ. Calculer l'intégrale $\vec{i} = \int_0^\infty \vec{j}(z)\,dz$ et préciser la signification de cette quantité.

Montrer que $\vec{i}$ s'exprime de façon vectorielle simple en fonction de $\overrightarrow{B_e}$ et du vecteur $\vec{n} = -\overrightarrow{u_z}$ dirigé du SC vers l'extérieur.

Montrer qu'il est légitime dans la limite λ petit d'assimiler la variation de $\vec{B}$ au voisinage du SC à une discontinuité $\Delta\vec{B} = \overrightarrow{B_e} - \overrightarrow{B_i}$ que l'on exprimera en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{n}$.
Commenter ce résultat.

Exercice II-3 : sphère absorbante



Une sphère conductrice de centre O et de rayon *R*, initialement non chargée, est bombardée de façon isotrope par un flux permanent de particules α (i.e. des noyaux d'hélium 4) qu'elle absorbe intégralement (figure ci-contre). En tout point et à tout instant, la vitesse de ces particules est supposée de norme fixe v_0 et on note Φ leur flux à la surface de la sphère, qui est supposé constant. On utilise les coordonnées sphériques de centre O et s'intéresse exclusivement au domaine extérieur à la sphère ($r > R$).

1- On admet que, compte tenu des conditions imposées, la densité volumique de charge *r* et le vecteur densité de courant $\vec{j}$ en tout point extérieur à la sphère sont indépendant du temps. Montrer alors que $\vec{j}$ s'écrit :

$$\vec{j}(\vec{r}) = -\frac{2e\,\Phi}{4\pi r^2}\vec{e}_r\,.$$

On procèdera de deux façons : à partir d'une équation locale en utilisant un formulaire d'analyse vectorielle, puis par une méthode ne nécessitant pas de formulaire.
En déduire l'expression de $\rho(\vec{r})$.

2- Après avoir soigneusement étudié les symétries et les invariances des sources, déterminer les champs électrique et magnétique en tout point extérieur à la sphère.
L'équation de Maxwell-Ampère est-elle vérifiée par ces deux champs ?

3- Pour justifier les expressions obtenues question 1 sans supposer a priori que $\vec{j}$ et *r* sont indépendants du temps, on peut raisonner comme suit :

3a-Justifier que *r* ne dépend spatialement que de la coordonnée r puis exprimer, en fonction de $\rho(r,t)$, la charge dQ (r,t) contenue à t à l'intérieur d'une coquille sphérique élémentaire de rayon r et d'épaisseur infinitésimale dr.

3b- Justifier que $dQ(r,t) = dQ(R,t')$ où t' sera exprimé en fonction de t. En déduire une relation entre $\rho(r,t)$ et $\rho(R,t')$ puis déterminer l'expression de $\rho(r,t)$ et conclure.

Le même exercice est souvent posé avec une sphère radioactive qui émet des particules alpha.