

DEVOIR SURVEILLÉ n°4
Samedi 13 décembre 2025 – Durée 4h

L'épreuve contient 3 parties totalement indépendantes.

La calculatrice est autorisée pour certaines parties et pas d'autres ; veuillez respecter cette consigne !

Partie 1 : Un traîneau sur la glace. (Extrait de Mines MP 2019)

Calculatrice interdite

Un traîneau à chiens est un dispositif de masse totale M (le pilote, ou *musher*, est compris dans cette masse) qui peut glisser sur la surface de la glace avec des coefficients de glissement statique (avant le démarrage) μ_s et dynamique (en mouvement) μ_d .

❑ **12** — Les chiens sont reliés au traîneau par des éléments de corde tendus, de masse négligeable et inextensibles. Montrer qu'un tel élément de corde transmet les tensions et que celles-ci sont colinéaires à la corde.

❑ **13** — Le trajet se fait soit à l'horizontale, soit sur une faible pente ascendante caractérisée par l'angle α avec l'horizontale. Montrer que, dans ce dernier cas, tout se passe comme dans un mouvement horizontal sous réserve de remplacer μ_d par μ'_d , que l'on exprimera.

L'intensité de la force de traction totale F exercée par l'ensemble des chiens dépend de leur vitesse v et on adoptera le modèle $F = F_0 - \beta v$ où F_0 et β sont des constantes positives. On prendra les valeurs $M = 5,0 \times 10^2$ kg, $\alpha = 0$, $\mu_d = 5,0 \times 10^{-2}$ et $\mu_s = 8,0 \times 10^{-2}$.

❑ **14** — Déterminer la valeur minimale de F_0 permettant le démarrage du traîneau.

❑ **15** — La vitesse du traîneau en régime stationnaire est $v_0 = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, atteinte à 5% près au bout d'un temps $t_1 = 5$ s. Exprimer d'une part β en fonction de M et t_1 et d'autre part F_0 en fonction de β , v_0 , μ_d , M et g . Calculer leurs valeurs respectives.

Toujours à vitesse constante v_0 , le traîneau aborde une courbe à plat qu'on assimilera à un cercle de centre O et de rayon R (cf. fig. 4). Les chiens (modélisés ici en un seul point C) doivent donc tirer vers l'intérieur du cercle.

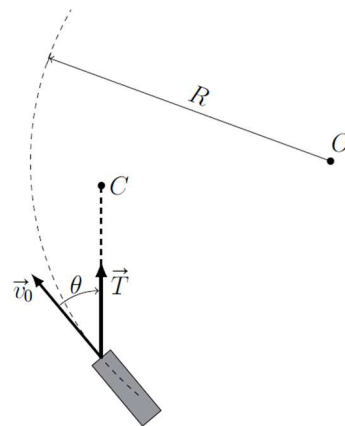


FIGURE 4 – Trajectoire circulaire du traîneau

❑ **16** — Déterminer en fonction des données la tension \vec{T} de la corde et l'angle θ entre la force de traction et la trajectoire.

Donnée :

Intensité du champ de pesanteur

$$g_0 = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

PARTIE 2 : Champ variable au sein d'un solénoïde (Centrale MP 2003)

Calculatrice autorisée

Formulaire : célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, perméabilité du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$.

En coordonnées cylindriques r, θ, z , de base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$:

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial(rA_z)}{\partial z} \right]$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial z} \right] \vec{e}_r + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_z.$$

Relations de passage des champs à l'interface Σ entre deux milieux notés (1) et (2) :

$$\forall M \in \Sigma, \forall t \quad \vec{E}_2(M, t) - \vec{E}_1(M, t) = \frac{\sigma(M, t)}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} ; \quad \vec{B}_2(M, t) - \vec{B}_1(M, t) = \mu_0 \vec{j}_s(M, t) \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

On rappelle les résultats principaux associés aux aspects énergétiques de l'électromagnétisme :

$$\text{Densité volumique d'énergie électromagnétique : } u_{\text{em}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

$$\text{Vecteur densité de puissance surfacique d'énergie électromagnétique : } \vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

$$\text{Puissance volumique cédée par le champ aux charges : } p = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

$$\text{Equation de Poynting : } \frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} + \text{div}(\vec{\Pi}) = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

On désire modifier la surface d'un barreau cylindrique, conducteur de l'électricité, en chauffant cette surface. Cet échauffement provoque une diffusion des atomes et une restructuration cristalline. Pour cela, le barreau est plongé dans le champ magnétique créé par un solénoïde parcouru par un courant électrique de fréquence 100 kHz

II.A - On étudie tout d'abord le champ créé par un solénoïde de rayon a , infini selon un axe Oz , à spires jointives et parcourues par un courant d'intensité I (figure 2). Le solénoïde est assimilable à une nappe de courant surfacique d'intensité uniforme j_s . Dans un premier temps, l'espace intérieur et l'espace extérieur du solénoïde sont vides.

L'intensité du courant est **constante** :

$$I = I_0.$$

II.A.1) Écrire les quatre équations de Maxwell, sous forme locale.

On notera ρ la densité volumique de charge et \vec{j} la densité volumique de courant.

II.A.2) Exprimer le vecteur \vec{j}_s en fonction de I_0 , n (nombre de spires par unité de longueur) dans la base des coordonnées cylindriques $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

On montrera que $\vec{j}_s = n I_0 \vec{e}_\theta$.

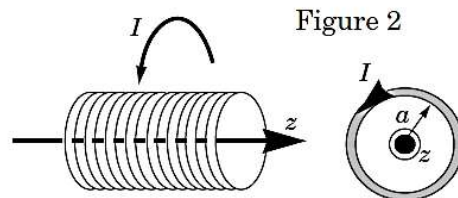


Figure 2

II.A.3) Déterminer précisément les éléments de symétrie de la distribution de courant. En déduire les composantes et les variables intervenant dans l'expression de \vec{B} . Justifier que \vec{B} est uniforme dans les deux régions de l'espace délimitées par le solénoïde.

II.A.4) Donner la relation entre le champ extérieur \vec{B}_{ext} , le champ intérieur \vec{B}_{int} , μ_0 et \vec{j}_s . Sachant que \vec{B}_{ext} est nul, exprimer \vec{B}_{int} en fonction de μ_0 , perméabilité du vide, n et I_0 .

II.B - L'intensité du courant est à présent variable et sinusoïdale. On utilise la notation complexe pour le courant et pour les champs :

$$I = I_0 e^{j\omega_0 t}, \quad \vec{B}(r, t) = \vec{B}(r) e^{j\omega_0 t}, \quad \text{et} \quad \vec{E}(r, t) = \vec{E}(r) e^{j\omega_0 t}.$$

II.B.1) Montrer qu'il doit obligatoirement exister un champ électrique \vec{E} non nul dans une partie de l'espace.

II.B.2) On cherche des solutions de la forme $\vec{E}(r)\vec{e}_\theta$ et $\vec{B}(r)\vec{e}_z$.

Déterminer les deux équations différentielles du premier ordre en r vérifiées par $\vec{E}(r)$ et $\vec{B}(r)$, pour $r \neq a$.

II.C - Le solénoïde est à présent complètement rempli par un cylindre conducteur, de conductivité électrique γ , et le courant qui l'alimente est sinusoïdal, de pulsation ω_0 : $I(t) = I_0 \cos(\omega_0 t)$. Localement, on pourra écrire $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ où \vec{j} est l'amplitude complexe de la densité volumique de courant.

II.C.1) Déterminer les deux équations différentielles du premier ordre en r vérifiées par $\vec{E}(r)$ et $\vec{B}(r)$, pour $r < a$.

II.C.2) Montrer que l'on peut négliger ici la densité de courant de déplacement devant la densité de courant de conduction dans le cas d'un cylindre de cuivre ($\gamma_{Cu} = 6,0 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$) ou de silicium ($\gamma_{Si} = 1,0 \times 10^3 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$), pour une fréquence de 100 kHz. Simplifier alors les équations précédentes.

II.C.3) Écrire l'équation différentielle (Eq) vérifiée par $\vec{E}(r)$ seul puis l'équation vérifiée par $\vec{B}(r)$ seul.

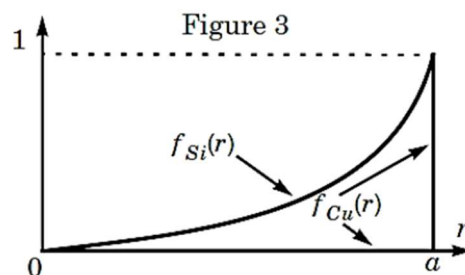
II.C.4)

a) L'équation (Eq) fait apparaître une constante homogène à une longueur, que l'on notera λ . Donner l'expression de λ et calculer sa valeur pour le cuivre λ_{Cu} et pour le silicium λ_{Si} pour une fréquence de 100 kHz.

Pour la suite on adopte la valeur $a = 15 \text{ cm}$.

b) La résolution de l'équation différentielle (Eq) fournit la fonction complexe $\vec{E}(r)$. On a représenté les courbes (figure 3) $f(r) = |\vec{E}(r)|$ avec $f(a) = 1$, pour un barreau de silicium et pour un barreau de cuivre.

Décrire les propriétés des champs \vec{E} et \vec{B} dans les barreaux, dans chacun des cas. Interpréter le rôle de la constante λ .



II.C.5) Dans le barreau de cuivre, on décrit la répartition des courants volumiques par le modèle suivant :

$$\begin{array}{ll} r < a - \lambda & \vec{j} = \vec{0} \\ a - \lambda < r < a & \vec{j} = j_0(t) \vec{e}_\theta \end{array} \quad \text{où } j_0(t) \text{ est une fonction réelle.}$$

- Écrire les deux équations de Maxwell relatives au champ magnétique, dans l'approximation de la question II.C.2.
- Montrer que l'ensemble {barreau de cuivre + solénoïde} est assimilable à un seul solénoïde de rayon $\approx a$, parcouru par une intensité I que l'on exprimera en fonction de I_0 , n , λ , j_0 et ω_0 .
- De la valeur de B pour $r < a - \lambda$, déduire l'expression de j_0 en fonction de I_0 , n , ω_0 et λ .

II.C.6) On utilise le modèle de la question précédente.

- Calculer la puissance instantanée dP dissipée par effet Joule dans un volume élémentaire $d\tau$ de barreau puis la puissance moyenne temporelle $\langle dP \rangle$.
- Exprimer la puissance moyenne $\langle P \rangle$ dissipée sur une hauteur h du barreau de cuivre, en fonction de I_0 , n , h , γ , μ_0 , ω_0 et λ .
- Déterminer l'expression du champ magnétique pour $a - \lambda < r < a$.
- En déduire le champ électrique \vec{E} en $r = a$.
- Calculer la valeur instantanée du vecteur de Poynting \vec{R} en $r = a$ puis sa valeur moyenne temporelle $\langle \vec{R} \rangle$ en fonction de I_0 , n , γ , μ_0 et ω_0 .
- Calculer le flux moyen entrant $\langle \Phi \rangle$ du vecteur de Poynting sur une hauteur h de cylindre. Commenter le bilan énergétique.

PARTIE 3 : Principe du moteur asynchrone. (Centrale TSI 2004)
Calculatrice autorisée.

Une petite bobine plate, de centre O, formée de N spires de section A, fermée sur elle-même, d'inductance propre L et de résistance r tourne à la vitesse angulaire constante ω autour de l'axe Oz ; sa position est repérée par l'angle entre \vec{e}_x et le vecteur unitaire \vec{n} normal au plan de la bobine : $(\vec{e}_x, \vec{n}) = \omega t - \alpha_0$ (α_0 désignant une constante positive)

Cette bobine est plongée dans un champ magnétique \vec{B} , de norme B constante, « tournant » lui aussi autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire ω_0 constante : $(\vec{e}_x, \vec{B}) = \omega_0 t$ (figure 2)

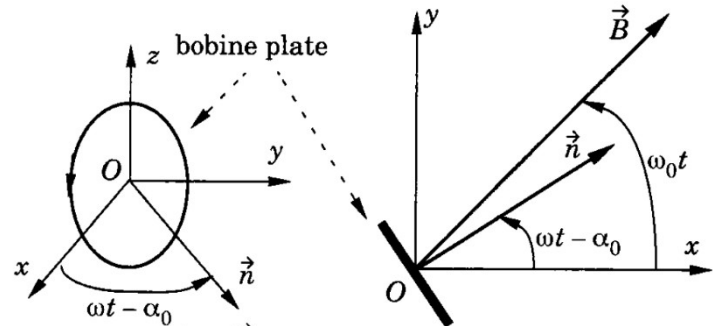


Figure 2 : \vec{n} et \vec{B} sont constamment dans le plan Oxy

- 1- Déterminer la valeur, à l'instant t, de l'angle $(\vec{n}, \vec{B}) = \alpha$ en fonction de ω , ω_0 , α_0 et t. En déduire le flux Φ du champ B à travers la bobine. Quelle est la force électromotrice induite e correspondante ?
- 2- En régime établi, cette force électromotrice engendre dans le circuit (r , L) un courant sinusoïdal $i(t)$ de même pulsation que e que l'on exprime sous la forme $i = I \sin(\alpha - \varphi)$. Déterminer I et $\tan \varphi$ (on précisera l'intervalle de largeur π chercher φ)
- 3- A quel couple $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{e}_z$ le circuit est-il soumis ? Quelle est la valeur moyenne Γ_m de Γ ? A quelle condition ce couple est-il moteur ?
- 4- On se propose d'étudier la variation du couple moyen Γ_m en fonction de la vitesse angulaire ω
- 4a- Vérifier qu'il est possible d'écrire Γ_m sous la forme

$$\Gamma_m = \frac{\Phi_0^2}{2y} \quad \text{avec} \quad \Phi_0^2 = (NBA)^2 \quad \text{et} \quad y = \frac{r}{\omega_0 - \omega} + \frac{L^2}{r}(\omega_0 - \omega)$$

Pour toutes les interprétations, on raisonne comme si le couple moteur appliqué au circuit (également désigné par « cadre ») était à tout instant le couple moteur **moyen**.
- 4b- Pour quelle valeur de ω la quantité y est-elle minimale ?
- 4c- Soit ω_M la valeur de la pulsation qui donne le maximum de Γ_m , notée Γ_{Max} . Exprimer Γ_{Max} et vérifier que couple moyen maximal est indépendant de la résistance r.
- 4d- Donner l'allure de la courbe $\Gamma_m(\omega)$ pour tout le domaine de variation de ω (y compris les valeurs négatives). On désignera les extrema par les points M et M'.
- 4e- Interpréter les branches $\omega < 0$, puis $0 < \omega < \omega_0$ et $\omega > \omega_0$. Justifier le terme de « moteur asynchrone » de ce dispositif.

5- On suppose que le moteur ait à vaincre un couple résistant de norme constante Γ_r , produit par les machines qu'il doit entraîner et par les frottements.

5a- Le cadre primitivement au repos ($\omega = 0$), est soumis au couple moyen $\Gamma_0 = \Gamma_m(0)$

i- Exprimer Γ_0 .

ii- Que se passe-t-il si $\Gamma_0 > \Gamma_r$?

iii- A partir de la comparaison des graphes $\Gamma = \Gamma_m(\omega)$ et $\Gamma = \Gamma_r$ (on appelle P le point d'intersection entre les deux graphes), préciser qualitativement l'évolution du mouvement du cadre. Caractériser le régime atteint par le moteur.

- 5b-** On charge davantage le moteur en maintenant la condition $\Gamma_0 > \Gamma_r$. Comment évolue le point figuratif P ?
- 5c-** Quel est sur le graphique la zone de fonctionnement stable ? Justifier la réponse