DS4 CORRECTION

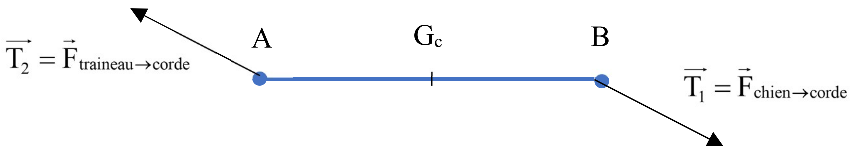
Partie 1 :

$\boxed{12}$ La notion d'élément de corde n'a pas été définie et n'est pas très claire ici… Compte tenu du programme, interprétons tout simplement cela comme un morceau de corde rectiligne liant un chien au traineau (comme sur la figure 4) et pour lequel on veut montrer que les tensions aux deux extrémités sont opposées et colinéaires à la corde.

Pour démontrer que les tensions aux deux extrémités sont *opposées*, il faut appliquer le théorème du centre d'inertie au morceau de corde ; sa masse étant négligeable, on obtient immédiatement le résultat (cf. résultat vu en TD).

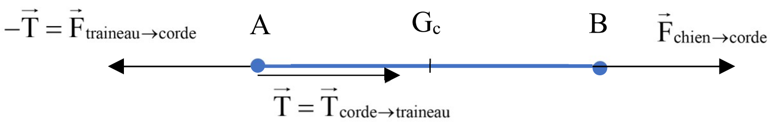
$$m_c.\vec{a}(G_c) = \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2} + m_c\vec{g} \text{ ; si } m_c = 0 \text{ alors } \boxed{\overrightarrow{T_1} = -\overrightarrow{T_2}}$$

Pour démontrer que les tensions aux deux extrémités sont *colinéaires à la corde*, il faut maintenant lui appliquer le théorème du moment cinétique ; sa masse étant négligeable, son moment d'inertie l'est aussi et le théorème implique la nécessaire nullité de la somme des moments des deux tensions ; ce qui n'est possible que si ces forces de tension sont colinéaires à la corde.



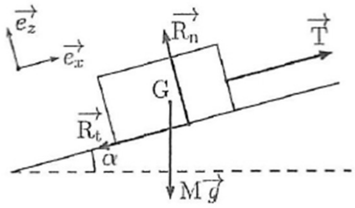
$$\vec{0} = \overrightarrow{\mathcal{M}^{ext}_{G_c}} = \overrightarrow{G_cB} \wedge \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{G_cA} \wedge \overrightarrow{T_2} = \overrightarrow{G_cB} \wedge \overrightarrow{T_1} - \overrightarrow{G_cA} \wedge \overrightarrow{T_1} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{T_1} \text{ donc } \boxed{\overrightarrow{T_1} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{AB}}$$

L'intérêt de ces résultats pour la suite de l'exo est de pouvoir identifier la force F de traction des chiens (mentionnée dans le texte juste avant la question 14) et la force T appliquée par la corde sur le traineau .



$$\vec{T} = \vec{F}$$

$\boxed{13}$ Notons $\overrightarrow{\mathrm{T}}$ la force de traction, $\overrightarrow{\mathrm{R}_n}$ et $\overrightarrow{\mathrm{R}_t}$ les composantes normale et tangentielle de la réaction de la glace sur le traîneau.



Appliquons le théorème de la résultante dynamique au traîneau dans le référentiel du sol, supposé galiléen :

$$\mathrm{M}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{M}\overrightarrow{g} + \overrightarrow{\mathrm{T}} + \overrightarrow{\mathrm{R}_n} + \overrightarrow{\mathrm{R}_t}$$

Projetons sur les vecteurs $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_z}$:

$$\begin{cases} \mathrm{M}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \mathrm{T} - \mathrm{R}_t - \mathrm{M}g\sin\alpha \\ 0 = \mathrm{R}_n - \mathrm{M}g\cos\alpha \end{cases}$$

D'après la loi de Coulomb pour le glissement, $\mathrm{R}_t = \mu_d \mathrm{R}_n$. Ainsi,

$$\mathrm{M}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \mathrm{T} - \mu_d \mathrm{M}g\cos\alpha - \mathrm{M}g\sin\alpha$$

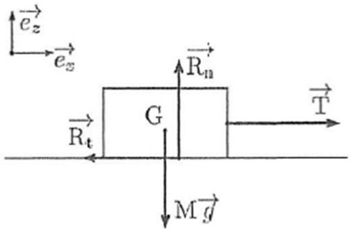
Dans le cas d'un glissement horizontal, cette expression devient

$$\mathrm{M}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \mathrm{T} - \mu_d \mathrm{M}g$$

Il apparaît que $\mu_d \mathrm{M}g\cos\alpha + \mathrm{M}g\sin\alpha$ se met sous la forme $\mu'_d \mathrm{M}g$ en posant

$$\boxed{\mu'_d = \mu_d\cos\alpha + \sin\alpha}$$

$\boxed{14}$ On procède comme à la question précédente (même système, même référentiel).



Le traîneau étant immobile, il vient

$$\begin{cases} 0 = \mathrm{F}_0 - \mathrm{R}_t \\ \mathrm{R}_n = \mathrm{M}g \end{cases}$$

car $\mathrm{T} = \mathrm{F}_0$ en l'absence de vitesse. D'après la loi de Coulomb pour l'adhérence, il n'y a pas glissement tant que

$$\mathrm{R}_t < \mu_s \mathrm{R}_n$$

Pour que le glissement s'amorce, il faut que R_t atteigne la valeur $\mu_s \mathrm{R}_n$, soit

$$\boxed{\mathrm{F}_0 = \mu_s \mathrm{M}g = 8.10^{-2} \times 5.10^2 \times 10 = 4.10^2\ \mathrm{N}}$$

15 En raisonnant sur le traîneau dans le même référentiel que précédemment, on a

$$\begin{cases} M\dfrac{dv}{dt} = F_0 - \beta v - R_t \\ R_n = Mg \end{cases}$$

Comme $R_t = \mu_d R_n$ en présence de glissement,

$$M\frac{dv}{dt} = F_0 - \beta v - \mu_d\, Mg$$

soit encore $\quad \dfrac{dv}{dt} + \dfrac{1}{\tau}\, v = \dfrac{F_0}{M} - \mu_d\, g \qquad$ avec $\quad \dfrac{1}{\tau} = \dfrac{\beta}{M}$

On reconnaît une équation différentielle du premier ordre, linéaire, à coefficients constants dont la solution aux temps longs est

$$v_0 = \frac{F_0}{\beta} - \frac{\mu_d\, Mg}{\beta}$$

d'où

$$\boxed{F_0 = \beta v_0 + \mu_d\, Mg}$$

L'équation différentielle se réécrit $\quad \dfrac{dv}{dt} + \dfrac{1}{\tau}\, v = \dfrac{1}{\tau}\, v_0$

sa solution à tout instant est $\quad v(t) = v_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \qquad$ (avec $v(0) = 0$)

L'instant t_1 est défini par $\quad 0{,}95\, v_0 = v_0\left(1 - e^{-t_1/\tau}\right)$

soit encore $\quad 0{,}05 = \dfrac{1}{20} = e^{-t_1/\tau}$

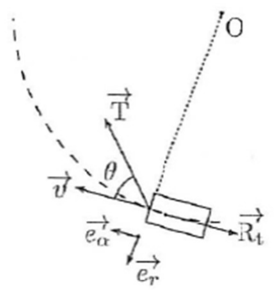
Composons par la fonction logarithme népérien pour obtenir $\quad \ln 20 = \dfrac{t_1}{\tau}$

soit $\quad t_1 = 3\tau \qquad$ (résultat classique)

Ainsi

$$\boxed{\beta = \frac{3\,M}{t_1} = 3.10^2 \text{ kg.s}^{-1} \qquad \text{et} \qquad F_0 = 1{,}2 \text{ kN}}$$

16 Pour un mouvement circulaire uniforme de rayon R à la vitesse v_0, l'accélération est purement radiale et s'écrit $-{v_0}^2/R\,\overrightarrow{e_r}$. Appliquons le théorème de la résultante dynamique au traîneau, dans le référentiel du sol, galiléen :



$$-\frac{M\,{v_0}^2}{R}\,\overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{T} + \overrightarrow{R_t}$$

puisque le poids et la réaction normale du sol se compensent en l'absence de mouvement sur la verticale. Projetons cette équation sur la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\alpha})$:

$$\begin{cases} -\dfrac{M\,{v_0}^2}{R} = -T\sin\theta \\ 0 = T\cos\theta - \mu_d\, Mg \end{cases}$$

car $R_t = \mu_d\, Mg$, d'où

$$\begin{cases} T\sin\theta = \dfrac{M\,{v_0}^2}{R} \\ T\cos\theta = \mu_d\, Mg \end{cases}$$

Élevons chaque équation au carré et sommons membre à membre :

$$(\mathrm{T}\cos\theta)^2 + (\mathrm{T}\sin\theta)^2 = \left(\frac{\mathrm{M}\,{v_0}^2}{\mathrm{R}}\right)^2 + (\mu_\mathrm{d}\,\mathrm{M}g)^2$$

donc $$\boxed{\mathrm{T} = \mathrm{M}\sqrt{\left(\frac{{v_0}^2}{\mathrm{R}}\right)^2 + (\mu_\mathrm{d}\,g)^2}}$$

Divisons membre à membre la première équation du système par la seconde :

$$\boxed{\tan\theta = \frac{{v_0}^2}{\mu_\mathrm{d}\,\mathrm{R}g}}$$