

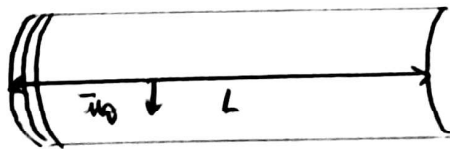
Champ variable au sein d'un solénoïde.

1

A1.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= +\mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

A2 -



Intensité totale traversant la ligne de longueur l
 $\vec{j}_s l \vec{e}_z$ ml I_0 .

D'autre part $\vec{j}_s = j_s \vec{e}_z$

Donc $\vec{j}_s = n I_0 \vec{e}_z$

A3. * La distribution de courant est invariante sous toute rotation autour de l'axe Oz et toute translation le long de Oz .
Donc les coordonnées usuelles de $\vec{B}$ ne dépendent ni de θ ni de z .

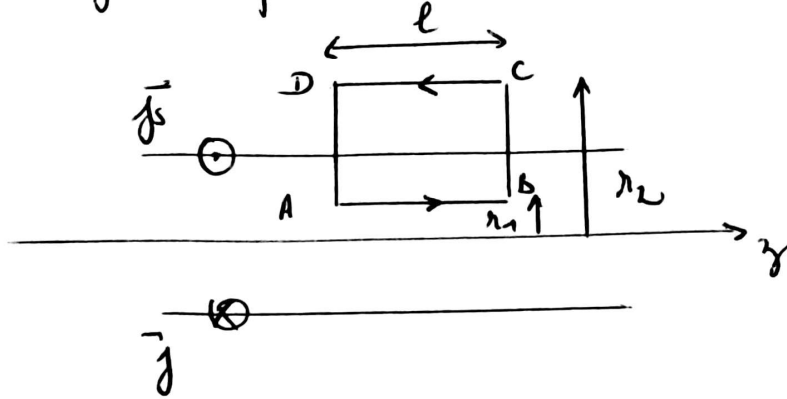
* Si π un point quelconque.

Le plan $(\pi \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie de $\mathcal{D}$ et donc d'antisymétrie de $\vec{B}$.

Donc $\vec{B} = B_z(r) \vec{u}_z$

(le plan $(\pi \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est également un plan d'antisymétrie de $\mathcal{D}$; ce qui redonne $B_\theta = 0$)

A4 - Appliquons le théorème d'Ampère en choisissant le contour rectangulaire représenté ci-dessous.



avec $r_1 < a < r_2$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} = +\mu_0 J_s l$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \int_{A \rightarrow B} B_z(r_1) \vec{u}_z \cdot d\vec{u}_z + \int_{B \rightarrow C} B_r(r_2) d\vec{u}_r \cdot d\vec{u}_r \\ &\quad + \int_{C \rightarrow D} B_z(r_2) \vec{u}_z \cdot (-d\vec{u}_z) + \int_{D \rightarrow A} B_r(r_1) d\vec{u}_r \cdot d\vec{u}_r \\ &= l (B_z(r_1) - B_z(r_2)) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } B_z(r_1) - B_z(r_2) = \mu_0 J_s$$

Ceci étant valable pour tout $r_1 < a$ et $r_2 > a$, on en déduit que $\vec{B}$ est uniforme à l'intérieur et à l'extérieur du solénoïde.

$$\underline{B_{\text{int}} - B_{\text{ext}} = \mu_0 J_s}$$

$$\text{Si } \underline{B_{\text{ext}} = 0} \quad \underline{B_{\text{int}} = \mu_0 J_s = \mu_0 n I_0}$$

Rq on aurait pu aussi n'utiliser que les équations locales

→ symétrie et invariance $\vec{B} = B_z(r) \vec{u}_z$

→ à l'int et à l'ext $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{0}$

$$- \frac{\partial B_z}{\partial r} \vec{u}_\theta = \vec{0} \quad \frac{dB_z}{dr} = 0$$

Donc B_z est uniforme à l'intérieur et à l'extérieur

→ La relation de passage donne $\vec{B}_{ext} - \vec{B}_{int} = \mu_0 j_s \vec{u}_\phi \wedge \vec{u}_r$
 $= -\mu_0 j_s \vec{u}_z$

donc $B_{int} - B_{ext} = \mu_0 j_s$

B1- $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ comme il y a un champ $\vec{B}$ non nul et variable à l'intérieur du cylindre, il y a forcément un champ $\vec{E}$ non nul.

B2- $\star \vec{\text{rot}} \vec{E} = -j\omega \vec{B}$
 $\left| \frac{1}{r} \frac{d(rE)}{dr} = -j\omega B \right.$
 $\star \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
 $\vec{\text{rot}}(B(r) e^{j\omega t} \vec{e}_\phi) = -\frac{dB}{dr} e^{j\omega t} \vec{u}_r$
 Donc $\left| \frac{dB}{dr} = -j\omega \epsilon \mu_0 E = -j\frac{\omega}{c^2} E \right.$

c1 On reprend les équations précédentes en ajoutant un courant $\vec{j} = \sigma \vec{E}$.

$\left| \frac{1}{r} \frac{d(rE)}{dr} = -j^* \omega B \right.$ $j^* \text{ ou } j$
 $\left| \frac{dB}{dr} = -\mu_0 (\sigma + j\omega \epsilon) E \right.$

c2- Cuivre $\sigma_{cu} = 6,0 \cdot 10^7 \text{ S m}^{-1}$ silicium $\sigma_{si} = 1,0 \cdot 10^3 \text{ S m}^{-1}$

$\omega_0 \epsilon_0 = 2\pi f \epsilon_0 = 2\pi \cdot 10^5 \cdot 10^{-12} \approx 6 \cdot 10^{-6}$

$\epsilon_0 \omega_0$ est bien très négligeable.

On simplifie les eq.

$\left| \frac{1}{r} \frac{d(rE)}{dr} = -j\omega B \right.$
 $\left| \frac{dB}{dr} = -\mu_0 \sigma E \right.$

C3. On a donc
$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{drE}{dr} \right) = -j\omega_0 \frac{dB}{dr} = +j\omega_0 \mu_0 \gamma E$$

De même
$$r \frac{dB}{dr} = -\mu_0 \gamma r E$$

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dB}{dr} \right) = -\mu_0 \gamma \frac{drE}{dr} = +j\omega_0 \mu_0 \gamma r B$$

C4a -
$$\dim \left(\frac{d}{dr} \left(r \frac{dB}{dr} \right) \right) = L^{-1} L \dim B L^{-1} = \dim B \cdot L^{-1}$$

$$\dim (j\omega_0 \mu_0 \gamma r B) = \dim (\omega_0 \mu_0 \gamma) L \dim B$$

Donc $\dim (\omega_0 \mu_0 \gamma) = L^{-2}$.

On pose $\omega_0 \mu_0 \gamma = \frac{1}{\lambda^2}$
$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \gamma}}$$

AN
$$\begin{array}{|l} \text{Cuivre } \lambda_{Cu} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ m} \\ \text{Silicium } \lambda_{Si} = 36 \cdot 10^{-4} \text{ m} \end{array}$$

Rq on comprend que le problème traite de l'effet de peau, mais en géométrie cylindrique.

C4b. Propriétés des champs

$(\vec{B})$ ont le m type d'équation que $\vec{E}$ donc a le m ordre que $\vec{E}$ qualitativement.

* Cu : $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont pratiquement nuls sauf au voisinage de la surface : c'est l'effet de peau. Les champs créés par le solénoïde ne pénètrent pas dans le métal (discontinuité très vite à l'intérieur du métal)

* Si : $(\vec{E}, \vec{B})$ devraient des bords vers l'intérieur mais plus lentement que pour le cuivre

Rôle de λ : Le genre de constante dans une équation différentielle n'intervient pas nécessairement dans la solution et joue un rôle de constante caractéristique de l'évolution spatiale.

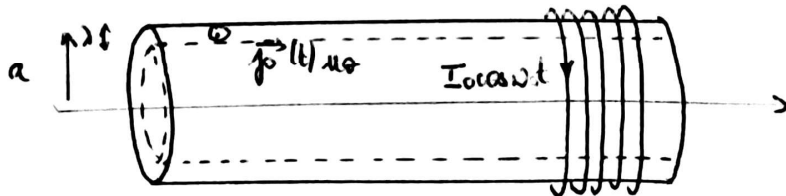
Ici on constate qu'elle joue le rôle de profondeur de pénétration du champ de la métal.

Car : $\lambda = 0,15 \text{ mm} \ll a (15 \text{ cm}) \Rightarrow (\vec{E}, \vec{B}) \approx 0$ ds lt le métal.

Si : $\lambda = 3,6 \text{ cm}$ non négligeable devant $a = 15 \text{ cm}$ et on constate une pénétration non négligeable de $(\vec{E}, \vec{B})$ ds le métal.

C5 a. $\left| \begin{array}{l} \text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{et} \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \text{ en négligeant le} \\ \text{courant de déplacement} \end{array} \right.$

C5 b.



Dans la cuivre $\lambda \ll a$ donc les courants peuvent être pris en modèle surfacique

$$\begin{cases} \vec{j} = \vec{0} & r < a - \lambda \\ \vec{j} = j(t) \vec{e}_z & a - \lambda < r < a \end{cases} \Rightarrow \vec{j}_s = \lambda j(t) \vec{e}_z$$

Le cylindre est lui-même associé à un courant surfacique $m I_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$

Conclusion : On peut dire l'ensemble {cylindre + barreau de Cu} par une nappe de courant avec

$$\vec{j}_{s \text{ tot}} = \left(\lambda j(t) + m I_0 \cos(\omega t) \right) \vec{e}_z$$

Soit par un unique cylindre de rayon a et courant

$$\underline{I_{\text{tot}}(t) = \frac{\lambda}{a} j(t) + I_0 \cos(\omega t)}$$

c5c - $\vec{B}(r < a - \lambda) \approx \vec{0}$ d'après le cours fourni

Or pour le solénoïde $\vec{B}_{int} = \mu_0 n I_{tot}(t)$

Donc
$$j(t) = - \frac{n}{\lambda} I_0 \cos(\omega t)$$

Physiquement: les courants quasi surfaciques qui apparaissent de la barrière s'opposent exactement au courant du solénoïde inducteur ce qui permet d'obtenir un champ nul dans le solénoïde. (on retrouve bien le bi de long)

c6a - $dP = \vec{j} \cdot \vec{E} dt = \frac{1}{\gamma} j^2 dt = \frac{n^2 I_0^2}{8 \lambda^2} \cos^2(\omega t) dt$

$$\langle dP \rangle = \frac{1}{L} \frac{n^2 I_0^2}{8 \lambda^2} dt$$

c6b
$$\langle P \rangle = \frac{1}{L} \frac{n^2 I_0^2}{8 \lambda^2} 2\pi a h$$
 car $\langle dP \rangle$ est uniforme et $\lambda \ll a$.

$$= \frac{\pi a h}{\gamma} \frac{n^2 I_0^2}{\lambda}$$

c6c - Symétrie et invariance $\vec{B}(r) = B(r) \vec{u}_z$
 Théorème d'Ampère: $B(r) = \mu_0 n I_0 \cos(\omega t) \left(1 - \frac{a-r}{\lambda}\right)$
 $a - \lambda \leq r \leq a$

c6d - $\vec{E}(r=a) = \frac{1}{\gamma} \vec{j}(r=a) = - \frac{n}{\lambda \gamma} I_0 \cos(\omega t) \vec{u}_\phi$
 Uniforme pour $r \in [a-\lambda, a]$.

c6e
$$\vec{\pi}(t) = \vec{E}(r=a, t) \wedge \vec{B}(r=a, t) = - \frac{n^2 I_0^2}{\lambda \gamma} \cos^2 \omega t \vec{u}_r$$

$$\langle \vec{\pi} \rangle = - \frac{1}{L} \frac{n^2 I_0^2}{8 \lambda} \vec{u}_r$$

c6f - $\langle \Phi \rangle = \langle \vec{\pi}_r \rangle 2\pi a h = \pi a h \frac{n^2 I_0^2}{\lambda h} = \langle P \rangle$ d'après ds le barreau -
 car $\vec{\pi}_{entrant} = -\vec{e}_r$