

Résonance magnétique nucléaire (XULC MP 2011)

I. PRODUCTION DE CHAMPS MAGNETIQUES INTENSES ET HOMOGENES

I.1 Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ contenant l'axe (Oz) est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant, alors le vecteur $\vec{j}(M)$ est nécessairement perpendiculaire au plan $(\vec{e}_r, \vec{e}_z)$. Ainsi, **les composantes j_r et j_z sont nulles** et on écrit

$$\vec{j}(M) = j_\theta \vec{e}_\theta$$

Par ailleurs, considérons deux points M et M' , images l'un de l'autre par une rotation d'axe (Oz) avec

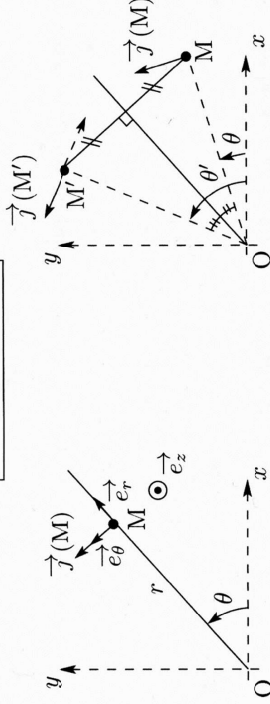
$$\vec{j}(M) = j_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{j}(M') = j_\theta(r, \theta', z) \vec{e}_\theta$$

Ces points sont disposés symétriquement par rapport au plan bissecteur correspondant à l'angle $(\theta + \theta')/2$. Ce plan contient l'axe (Oz) , donc $\vec{j}(M)$ et $\vec{j}(M')$ sont antisymétriques. Comme on le voit sur le schéma ci-après, cela impose

$$j_\theta(r, \theta, z) = j_\theta(r, \theta', z)$$

et que **la composante j_θ est indépendante de θ** . On résume ces conditions en

$$\vec{j}(M) = j_\theta(r, z) \vec{e}_\theta$$



Rappelons que l'antisymétrie d'un vecteur est l'opposé de son symétrique et qu'en un point d'un plan de symétrie (respectivement antisymétrie), un vecteur est nécessairement porté par le plan (resp. orthogonal au plan) pour être confondu avec son symétrique (resp. antisymétrique).

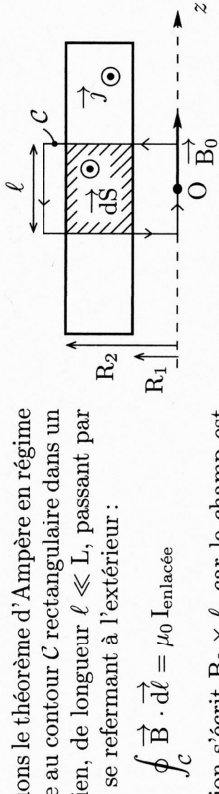
I.2 Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ étant plan d'antisymétrie de la distribution de courant, le champ $\vec{B}(M)$ lui appartient et s'écrit a priori $\vec{B}(M) = B_r \vec{e}_r + B_z \vec{e}_z$. Par ailleurs, la distribution de courant est invariante par rotation d'angle θ , donc les composantes B_r et B_z ne dépendent pas de θ . Finalement,

$$\vec{B}(M) = B_r(r, z) \vec{e}_r + B_z(r, z) \vec{e}_z$$

Rappelons aussi que les seules symétries qui comptent en magnétostatique sont celles de la distribution de courant et que les résultats de la magnétostatique restent valables dans l'approximation des régimes quasi stationnaires.

I.3 Un tel solénoïde peut être vu comme la superposition de solénoïdes minces de grande longueur L , devant leurs rayons compris entre R_1 et R_2 . Ainsi, en négligeant les effets de bords pour chaque solénoïde et donc pour l'ensemble par superposition, on sait que le **champ magnétique est uniforme et porté par $\vec{e}_z$ à l'intérieur et nul à l'extérieur**.

Appliquons le théorème d'Ampère en régime stationnaire au contour C rectangulaire dans un plan méridien, de longueur $\ell \ll L$, passant par le centre et se refermant à l'extérieur :



$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacée}}$$

La circulation s'écrit $B_0 \times \ell$, car le champ est nul à l'extérieur et perpendiculaire au contour sur les deux côtés radiaux. L'intensité enlacée est $I_{\text{enlacée}} = j_\theta \times (R_2 - R_1) \ell$, puisque j_θ est uniforme, donc

$$\vec{B}_0 = \mu_0 j_\theta (R_2 - R_1) \vec{e}_z$$

I.4 La loi d'Ohm locale s'écrit $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ et la puissance volumique dissipée par effet Joule est

$$p_v = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{j^2}{\sigma}$$

Comme p_v est uniforme, la puissance dissipée dans le solénoïde est

$$\mathcal{P}_{\text{Joule}} = p_v \times \pi (R_2^2 - R_1^2) L$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{P}_{\text{Joule}} = \frac{\pi j_\theta^2 (R_2^2 - R_1^2) L}{\sigma}$$

I.5 En remplaçant $j_\theta = B_0 / \mu_0 (R_2 - R_1)$ dans l'expression établie à la question précédente, il vient

$$\mathcal{P}_{\text{Joule}} = \frac{\pi B_0^2 L}{\mu_0^2 \sigma} \times \frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1}$$

À B_0 , L et R_2 fixés, $\mathcal{P}_{\text{Joule}}$ est une fonction croissante de R_1 sur $[0; R_2]$, donc

Il faut prendre $R_1 \ll R_2$ pour minimiser la puissance dissipée.

| Avoir R_1 nul serait physiquement impossible et sans intérêt pratique.

I.6 La borne inférieure de la puissance dissipée atteinte pour $R_1 \ll R_2$ est

$$\mathcal{P}_{\text{Joule}} = \frac{\pi B_0^2 L}{\mu_0^2 \sigma} = 5.10^4 \text{ W}$$

Bien que le cuivre soit un très bon conducteur, cette puissance dissipée est importante comparée à celle d'un radiateur électrique ordinaire, qui est de l'ordre de 10^3 W.

I.7 L'effet Joule chauffe le solénoïde jusqu'à ce qu'en régime stationnaire, la puissance dissipée soit compensée par la puissance thermique perdue au contact de l'atmosphère. Ce transfert thermique peut se faire de manière conducto-convective et/ou radiative. Dans tous les cas, il est proportionnel à la surface de contact. Cette surface croît avec le rayon extérieur, donc

On doit augmenter R_2 dans le but d'améliorer les échanges thermiques avec l'extérieur et minimiser l'élévation en température.

Quantitativement, notons T la température de surface du solénoïde, T_a la température de l'atmosphère, $S = 2\pi R_2 L$ la surface de contact en négligeant l'aire des extrémités du solénoïde si $R_2 \ll L$. Pour la puissance perdue en direction de l'atmosphère par conducto-convexion, la loi de Newton s'écrit

$$\mathcal{P}_{cc} = k(T - T_a)S$$

où k est un coefficient caractéristique.

Le bilan thermique en régime stationnaire s'écrit $\mathcal{P}_{Joule} = \mathcal{P}_{cc}$ et après simplification, conduit à

$$\frac{B_0^2}{2\mu_0^2\sigma} \times \frac{1 + R_1/R_2}{R_2 - R_1} = k(T - T_a)$$

Le membre de gauche est une fonction décroissante de R_2 et celui de droite une fonction croissante de T . En augmentant R_2 , on diminue bien la température de surface T du solénoïde atteinte en régime stationnaire.

L'encombrement résultant de l'augmentation de R_2 est préjudiciable. Il serait préférable de prévoir un dispositif de refroidissement, tel que des ailettes pour augmenter la surface S de contact ou, comme on le considère ultérieurement, remplacer le cuivre par un matériau supraconducteur, exempt de tout effet Joule.

I.8 Pour que le vecteur densité de courant s'écrive bien $\vec{j}(\mathbf{M}) = j_\theta(r, z)\vec{e}_\theta$, il faudrait que le solénoïde soit constitué de spires circulaires d'axe (Oz) .

En pratique, l'enroulement est au mieux une hélice régulière d'axe (Oz) , dont le pas est au minimum égal au diamètre du fil. Avec un fil de diamètre plus faible, ce pas diminue et le vecteur densité de courant tend à être orthoradial.

Diminuer le diamètre du fil, c'est diminuer sa section S , donc augmenter la résistance $R = \ell/\sigma S$ à longueur ℓ donnée. Cela s'accompagne d'une augmentation de la puissance dissipée par effet Joule. Il y a alors un compromis à trouver entre les différentes exigences de la réalisation.

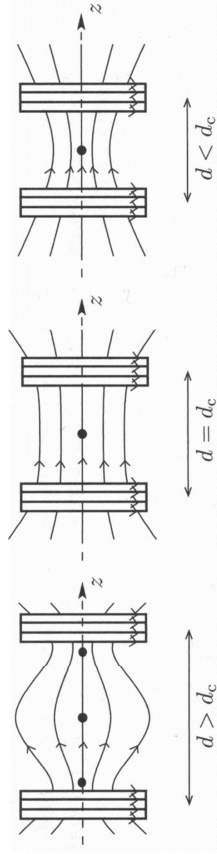
I.9 Les lignes de champ s'écartent en sortant d'un solénoïde de longueur finie, donc l'amplitude du champ magnétique diminue en direction des bords et elle est maximale au centre, là où les lignes de champ sont les plus resserrées.

Le solénoïde de longueur L finie est assimilable à un dipôle magnétique. Sur l'axe (Oz) , à grande distance $|z| \gg L$, l'amplitude du champ magnétique décroît en $1/z^3$.

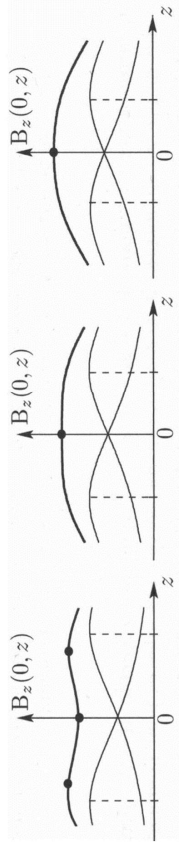
Pour obtenir un champ uniforme il faut :

- Soit utiliser un solénoïde long ($L \gg R$) : le champ est alors quasi uniforme partout à l'intérieur, loin des bords ;
- Soit utiliser deux bobines identiques, plates ($L \ll R$) et coaxiales, écartées d'une distance $d_c = R$ (configuration dite des bobines de Helmholtz) : le champ est alors quasi uniforme au voisinage du « centre », c'est-à-dire sur l'axe à égale distance des deux bobines.

Allure des lignes de champ de deux bobines plates en fonction de la distance d qui les sépare :



Allure de la composante B_z du champ sur l'axe de deux bobines plates en fonction de la distance d qui les sépare (avec en traits fins les composantes des champs individuels des deux bobines) :



Dans la configuration de Helmholtz on montre que toutes les dérivées successives de B_z jusqu'à l'ordre 3 sont nulles en O et qu'à l'ordre le plus bas non nul en z/R on a :

$$B_z(0, z) \approx B_z(0, 0) + \left(\partial^4 B_z(0, 0) / \partial z^4 \right) \times z^4 / 4!$$

II. UTILISATION DE SUPRACONDUCTEURS

II.1 Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron donne

$$m_e \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e \vec{E}$$

en assimilant la vitesse de l'électron au champ eulérien des vitesses pris en la position moyenne de l'électron.

II.2 La densité de courant s'écrit $\vec{j} = n \times (-e) \times \vec{v}$

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{n e^2}{m_e} \vec{E}$$

donc

II.3 Dans le cadre de l'approximation des régimes quasi stationnaires, les équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Faraday sont

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Partons du terme en dérivée temporelle de l'équation à établir. Utilisons les équations de Maxwell précédentes ainsi que l'égalité montrée à la question II.2 et intervenissons la dérivée temporelle et les dérivées spatiales du rotationnel,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= - \vec{\text{rot}} \vec{E} \\ &= - \frac{m_e}{n e^2} \vec{\text{rot}} \left(\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \right) \\ &= - \frac{m_e}{n e^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\text{rot}} \vec{j} \right) \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= - \frac{m_e}{\mu_0 n e^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{B} \right) \end{aligned}$$

soit
$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{B} + \frac{1}{\lambda^2} \vec{B} \right) = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \lambda = \sqrt{\frac{m_e}{\mu_0 n e^2}}$$

II.4 On obtient $\lambda = 5.10^{-8} \text{ m}$

II.5 À partir de $\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{B} + \frac{1}{\lambda^2} \vec{B} = \vec{0}$

la formule rappelée en début d'énoncé et l'équation de Maxwell-Thomson

$$\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{B} - \Delta \vec{B} \quad \text{et} \quad \text{div} \vec{B} = 0$$

conduisent à
$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{\lambda^2} \vec{B} = \vec{0}$$

I.10 $\forall M \quad \vec{B}$ s'écrit : $\vec{B}(M) = B_r(r, z) \vec{u}_r + B_z(r, z) \vec{u}_z$; et pour M sur l'axe, $\vec{B}$ étant colinéaire à l'axe, il s'écrit : $\vec{B}(M \in \text{axe}) = B_z(0, z) \vec{u}_z$ et on a $B_r(r=0, z) = 0$.

Or, le champ sur l'axe est quasi uniforme au voisinage de l'origine O, ce qui signifie que si $|z|$ reste faible (typiquement $|z| \ll R$) alors :

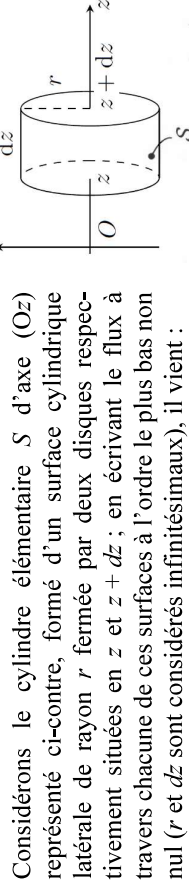
$$B_z(0, z) \approx B_z(0, 0) \quad \text{et} \quad \partial B_z(0, z) / \partial z \text{ peut être considéré nul}$$

Il faut maintenant montrer qu'autour de O le champ est également quasi uniforme au voisinage de l'axe ; cela revient à montrer que pour r faible (typiquement $r \ll R$), on a simultanément :

$$B_r(r, z) \approx 0 \quad \text{et} \quad B_z(r, z) \approx B_z(0, z) \approx B_z(0, 0)$$

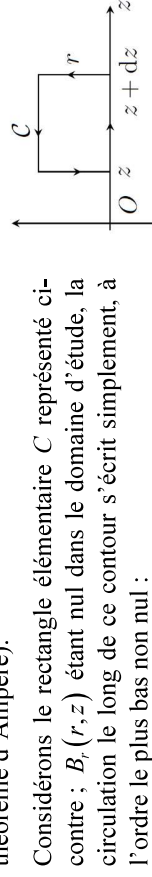
— Dans ce contexte « $\approx$ » signifiera donc « égal à l'ordre 1 en r/R et en z/R »

- Pour montrer $B_r(r, z) \approx 0$, on exploite le fait qu'à travers toute surface fermée le flux magnétique est nul (propriété de flux conservatif).



$$\begin{aligned} 0 &= \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}_{\text{sort}} \approx -\pi r^2 B_z(0, z) + 2\pi r z B_r(r, z) + \pi r^2 B_z(0, z + dz) \\ \text{soit} \quad B_r(r, z) &\approx -\frac{r B_z(0, z + dz) - B_z(0, z)}{2 dz} \approx -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}(0, z) \approx 0 \end{aligned}$$

- Pour montrer $B_z(r, z) \approx B_z(0, z) \approx B_z(0, 0)$, on exploite le fait que dans le vide la circulation du champ magnétique le long de tout contour fermé est nulle (découle du théorème d'Ampère).



$$0 = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_z(0, z) dz - B_z(r, z) dz + B_r(r, z) dz + B_r(0, z) dz \approx B_z(0, z) dz$$

On peut aussi écrire, même si c'est inutilement compliqué, que :

$$0 = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} \approx B_z(0, z) dz - B_z(r, z) dz + \underbrace{B_r(r, z) dz + B_r(0, z) dz}_{B_r(0, z) + \partial B_z / \partial r(0, z) \times r} \approx B_z(0, z) dz$$

$$\text{soit} \quad \partial B_z / \partial r(0, z) \approx -\partial B_r / \partial z(0, z) = 0$$

L'avantage de ce calcul est qu'il se généralise hors d'axe et montre que :

$$\forall (r, z) \quad \partial B_z / \partial r(r, z) = -\partial B_r / \partial z(r, z) = 0 \quad (\text{traduction de } \vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \vec{0})$$

On suppose dans l'énoncé que le champ $\vec{B}$ dans le supraconducteur ne dépend que de x soit

$$\frac{d^2 \vec{B}}{dx^2} - \frac{1}{\lambda^2} \vec{B} = 0$$

La solution générale est

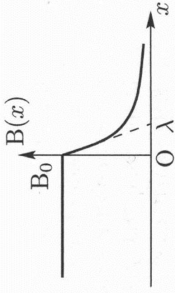
$$\vec{B}(x) = \vec{\alpha} \exp\left(\frac{x}{\lambda}\right) + \vec{\beta} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)$$

Le champ ne peut diverger quand $x \rightarrow +\infty$, on a donc nécessairement $\vec{\alpha} = \vec{0}$. Par ailleurs, en l'absence de courants surfaciques, la continuité du champ magnétique en $x = 0$ impose

$$\vec{B}(0) = \vec{\beta} = B_0 \vec{e}_z$$

$$\vec{B} = B_0 \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \vec{e}_z$$

d'où



À l'intérieur du supraconducteur, le champ magnétique décroît exponentiellement sur la distance caractéristique λ . Sa valeur calculée à la question II.4 est très petite à l'échelle macroscopique, elle correspond à quelques centaines de couches atomiques dans un solide cristallin. Cela montre qu'en accord avec l'effet Meissner, le champ magnétique extérieur ne pénètre pas dans un supraconducteur.

Le champ $\vec{B}$ induit dans le supraconducteur par le champ extérieur $B_0 \vec{e}_z$ est lui aussi dirigé selon $\vec{e}_z$, car selon le principe de Curie, les effets ont au moins les symétries de leurs causes.

II.6 On obtient la densité de courant $\vec{j}$ par l'équation de Maxwell-Ampère

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B} \quad \text{avec} \quad \text{rot } \vec{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B(x) \end{bmatrix} = -\frac{dB}{dx} \vec{e}_y$$

d'où

$$\vec{j} = \frac{B_0}{\mu_0 \lambda} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \vec{e}_y$$

Ces courants induits par le champ magnétique extérieur se développent sur une épaisseur de quelques λ . La longueur caractéristique λ , dite de London, étant de quelques dizaines de nanomètres, ces courants pourraient être considérés comme surfaciques. Le champ magnétique qu'ils créent s'oppose à la pénétration du champ extérieur dans le matériau. Il s'agit d'un phénomène d'induction similaire à l'effet de peau dans un conducteur ohmique. Mais, chose singulière, il est ici permis en régime stationnaire par l'absence de résistance du matériau supraconducteur.

III. MOMENTS MAGNETIQUES ET AIMANTATION

III.1 Dans un champ magnétique $\vec{B}_0$ extérieur, l'énergie potentielle d'un moment magnétique $\vec{\mu}$ est

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_0$$

soit, avec θ l'inclinaison du moment par rapport au champ,

$$U = -\mu B_0 \cos \theta$$

Les valeurs extrémales de U sont obtenues pour $\theta = \pi$ et $\theta = 0$ avec

$$\begin{cases} U_{\max} = \mu B_0 = 2.10^{-26} \text{ J} \\ U_{\min} = -\mu B_0 = -2.10^{-26} \text{ J} \end{cases}$$

Ces états d'énergie potentielle U maximale et minimale correspondent à des positions d'équilibre respectivement instable et stable. Par ailleurs, un moment magnétique s'exprime usuellement en A.m^2 . L'énoncé associe à μ l'unité équivalente J.T^{-1} , adaptée à l'expression de l'énergie U .

III.2 Cette loi de probabilité est la **loi de Boltzmann**, qui dit que la probabilité de trouver un système microscopique dans un état d'énergie U à la température T , est proportionnelle au facteur

$$\exp\left(-\frac{U}{k_B T}\right)$$

L'état le plus probable correspond à l'énergie potentielle U minimale, donc à $\theta = 0$ selon la question III.1, c'est-à-dire à l'**alignement du moment dans le sens du champ magnétique**.

On peut utiliser la loi de Boltzmann pour rendre compte de l'évolution avec l'altitude z de la densité moléculaire n^* dans une atmosphère isotherme

$$n^*(z) = n^*(0) \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right) = n^*(0) \exp\left(-\frac{mgz}{k_B T}\right)$$

où $R = \mathcal{N}_A k_B$ est la constante des gaz parfaits, M la masse molaire d'une molécule, $m = M/\mathcal{N}_A$ sa masse et $U = mgz$ son énergie potentielle dans un champ pesanteur uniforme $\vec{g} = -g \vec{e}_z$.

III.3 Comme à la question III.1,

$$U = -\mu B_0 \cos \theta$$

L'angle solide sous lequel est vue une surface sphérique dS à la distance r de O est

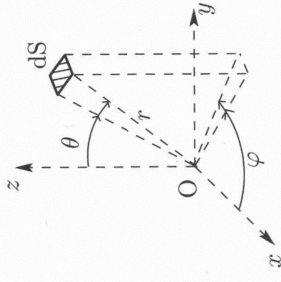
$$d^2\Omega = \frac{dS}{r^2}$$

En coordonnées sphériques, pour les directions spatiales comprises entre $\theta + d\theta$ et $\varphi + d\varphi$, la surface sphérique qui correspond à ces intervalles angulaires est

$$dS = r d\theta \times r \sin \theta d\varphi$$

Ainsi,

$$d^2\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$$



III.4 À température ambiante $T \simeq 300 \text{ K}$, l'énergie $k_B T \simeq 4.10^{-21} \text{ J}$ est très grande devant l'amplitude des variations de U , calculée à la question III.1.

Il y a cinq ordres de grandeur entre ces énergies.

La linéarisation de la loi de Boltzmann, effectuée à la question III.6, est donc bien justifiée.

III.5 Selon l'énoncé, l'aimantation de N protons de moment magnétique $\vec{\mu}_i$ est

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^N \vec{\mu}_i$$

En négligeant l'interaction des dipôles magnétiques devant l'interaction avec le champ extérieur, on se trouve en présence de N dipôles découplés. Ces dipôles constituent N répétitions d'une expérience, où un seul dipôle est plongé dans le champ extérieur. Avec $N \gg 1$, on dispose de suffisamment de valeurs pour décrire à chaque instant quasi continûment l'ensemble des directions θ et φ possibles. Alors, on a la moyenne statistique sur l'assemblée de protons

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{\mu}_i$$

quasiment égale à la valeur moyenne $\langle \vec{\mu} \rangle$ calculée selon la loi de probabilité (3). Par conséquent,

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^N \vec{\mu}_i = N \times \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{\mu}_i$$

$$\vec{M} \simeq N \langle \vec{\mu} \rangle$$

En toute rigueur, l'aimantation est la somme des moments magnétiques de N protons *dans un volume unité*. C'est un moment magnétique par unité de volume qui n'a donc pas la dimension d'un moment magnétique.

III.6 Avec $|U|/k_B T \ll 1$ et $e^u \simeq 1 + u$ à l'ordre 1, la loi de probabilité (3) devient

$$dp \simeq \frac{1}{Z} \left(1 - \frac{U}{k_B T} \right) d^2\Omega \quad \text{où} \quad Z \simeq \iint \left(1 - \frac{U}{k_B T} \right) d^2\Omega$$

Commençons par évaluer le paramètre Z :

$$\begin{aligned} Z &\simeq \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(1 - \frac{U}{k_B T} \right) d^2\Omega \\ &\simeq \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta \left(1 + \frac{\mu B_0 \cos \theta}{k_B T} \right) d\theta \times \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \\ &\simeq \left[-\cos \theta - \frac{\mu B_0 \cos^2 \theta}{2k_B T} \right]_{\theta=0}^{\pi} \times 2\pi \\ Z &\simeq 4\pi \end{aligned}$$

La valeur moyenne du moment magnétique $\vec{\mu}$ doit maintenant être calculée comme la somme de tous les moments magnétiques accessibles, pondérés par leur probabilité :

$$\langle \vec{\mu} \rangle = \iint \vec{\mu} dp$$

Deux directions angulaires symétriques, qui correspondent à une même valeur de θ et à des angles φ et $\varphi + \pi$, sont équiprobables et leur somme s'aligne selon $\vec{e}_z$. Après intégration, la valeur moyenne $\langle \vec{\mu} \rangle$ est nécessairement selon $\vec{e}_z$ et on s'en tient au calcul de la projection

$$\begin{aligned} \langle \mu_z \rangle &= \iint \mu \cos \theta dp \\ &\simeq \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \mu \cos \theta \times \frac{1}{Z} \left(1 - \frac{U}{k_B T} \right) d^2\Omega \end{aligned}$$

En remplaçant U et $d^2\Omega$ par leurs expressions établies à la question III.3 et en séparant les variables d'intégration, il vient

$$\begin{aligned} \langle \mu_z \rangle &\simeq \frac{\mu}{Z} \times \int_{\theta=0}^{\pi} \cos \theta \sin \theta \left(1 + \frac{\mu B_0 \cos \theta}{k_B T} \right) d\theta \times \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \\ &\simeq \frac{\mu}{Z} \times \left[-\frac{\cos^2 \theta}{2} - \frac{\mu B_0 \cos^3 \theta}{3k_B T} \right]_{\theta=0}^{\pi} \times 2\pi \\ \langle \mu_z \rangle &\simeq \frac{4\pi \mu^2 B_0}{3Z k_B T} \end{aligned}$$

Avec $Z \simeq 4\pi$, la valeur moyenne $\langle \vec{\mu} \rangle = \langle \mu_z \rangle \vec{e}_z$ s'écrit $\langle \vec{\mu} \rangle \simeq \frac{\mu^2 B_0}{3k_B T} \vec{e}_z$

et l'aimantation $\vec{M} \simeq N \langle \vec{\mu} \rangle$ vérifie bien la loi de Curie

$$\vec{M} \simeq \frac{C}{T} \vec{B}_0 \quad \text{avec} \quad C = \frac{N \mu^2}{3k_B} \quad (4)$$

Si l'on n'utilise pas l'argument de symétrie pour limiter au préalable le calcul à la seule composante $\langle \mu_z \rangle$, on peut écrire pour les deux autres composantes

$$\langle \mu_x \rangle = \iint \mu \cos \theta \cos \varphi dp \quad \text{et} \quad \langle \mu_y \rangle = \iint \mu \cos \theta \sin \varphi dp$$

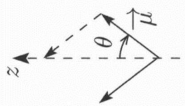
et l'intégration sur la variable φ entre 0 et 2π conduit à

$$\langle \mu_x \rangle = \langle \mu_y \rangle = 0$$

III.7 Le couple de Laplace, exercé par le champ extérieur $\vec{B}_0$ sur le moment $\vec{\mu}$, est

$$\vec{M}_L = \vec{\mu} \wedge \vec{B}_0$$

Ce couple tend à aligner le moment magnétique $\vec{\mu}$ sur le champ $\vec{B}_0$. Il s'annule bien pour les deux positions d'équilibre correspondant à $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, évoquées à la question III.1.



III.8 Le théorème du moment cinétique, appliqué au proton en son centre fixe dans le référentiel absolu $\mathcal{R}$, donne selon l'expression du couple de Laplace

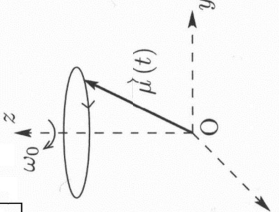
$$\left[\frac{d\vec{S}}{dt} \right]_{/\mathcal{R}} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}_0$$

$$\text{Avec } \vec{\mu} = \gamma \vec{S}, \quad \left[\frac{d\vec{\mu}}{dt} \right]_{/\mathcal{R}} = \vec{\omega}_0 \wedge \vec{\mu} \quad \text{où} \quad \vec{\omega}_0 = -\gamma \vec{B}_0$$

Cette relation montre que le moment $\vec{\mu}$ tourne dans $\mathcal{R}$ autour de $\vec{e}_z$ (ie il précesse) à la pulsation de Larmor $\omega_0 = -\gamma B_0$. Pour le proton,

$$\gamma = \frac{\mu}{S} = \frac{2\mu}{\hbar} = 2,5.10^8 \text{ s}^{-1} \cdot \text{T}^{-1}$$

$$\text{et} \quad \omega_0 = -\gamma B_0 = -4.10^8 \text{ rad.s}^{-1}$$



Pour comprendre que l'équation obtenue caractérise bien la rotation du moment $\vec{\mu}$ à la vitesse angulaire $\vec{\omega}_0$, il suffit de la considérer comme une relation de composition des dérivées temporelles

$$\left[\frac{d\vec{\mu}}{dt} \right]_{/\mathcal{R}} = \left[\frac{d\vec{\mu}}{dt} \right]_{/\mathcal{R}_0} + \vec{\omega}_0 \wedge \vec{\mu}$$

où $\mathcal{R}_0$ serait un référentiel tournant dans $\mathcal{R}$ à la vitesse angulaire $\vec{\omega}_0$ et où, le moment $\vec{\mu}$ étant fixe dans $\mathcal{R}_0$, on aurait

$$\left[\frac{d\vec{\mu}}{dt} \right]_{/\mathcal{R}_0} = \vec{0}$$

III.9 La force de Lorentz, exercée par le champ magnétique extérieur $\vec{B}_0$ sur le proton de vitesse $\vec{v}$ et de charge e , est

$$\vec{F}_m = e \vec{v} \wedge \vec{B}_0$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au proton dans le référentiel absolu $\mathcal{R}$ donne

$$m_p \left[\frac{d\vec{v}}{dt} \right]_{/\mathcal{R}} = -e \vec{B}_0 \wedge \vec{v}$$

qui se met sous la forme

$$\left[\frac{d\vec{v}}{dt} \right]_{/\mathcal{R}} = \vec{\omega}_c \wedge \vec{v} \quad \text{où} \quad \vec{\omega}_c = -\frac{e B_0}{m_p} \vec{e}_z$$

Selon le même principe d'identification qu'à la question III.8, on montre ainsi que le vecteur vitesse tourne dans $\mathcal{R}$ autour de $\vec{e}_z$ à la pulsation cyclotron

$$\omega_c = -\frac{e B_0}{m_p} = -1.10^8 \text{ rad.s}^{-1}$$

Elle est du même ordre de grandeur que la pulsation de Larmor ω_0 .

Les notions au programme ne permettent pas de faire d'autre commentaire. Cependant, en physique quantique, le rapport adimensionné $2\omega_0/\omega_c$ est appelé facteur de Landé. Il est de l'ordre de l'unité et on le note g_s dans le cas du spin. L'accord entre sa valeur mesurée par l'expérience et celle prévue par la théorie a eu une grande importance dans le développement de la physique quantique. Enfin, signalons que l'association du spin du proton à un mouvement de rotation propre, comme le fait l'énoncé, est volontairement simpliste. Le proton n'est pas une particule solide classique que l'on pourrait comparer à une toupie.

IV. RESONANCE MAGNETIQUE

IV.1 Dans le champ $\vec{B}_0 + \vec{B}_1(t)$, par analogie avec la question III.8, on a pour chaque moment $\vec{\mu}_i$

$$\left[\frac{d\vec{\mu}_i}{dt} \right]_{/\mathcal{R}} = -\gamma (\vec{B}_0 + \vec{B}_1) \wedge \vec{\mu}_i$$

L'équation est linéaire, donc l'aimantation $\vec{M} = \sum_{i=1}^N \vec{\mu}_i$ vérifie de même

$$\left[\frac{d\vec{M}}{dt} \right]_{/\mathcal{R}} = -\gamma (\vec{B}_0 + \vec{B}_1) \wedge \vec{M}$$

qui se met sous la forme

$$\left[\frac{d\vec{M}}{dt} \right]_{/\mathcal{R}} = (\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1(t)) \wedge \vec{M} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \vec{\omega}_0 = -\gamma \vec{B}_0 \\ \vec{\omega}_1(t) = -\gamma \vec{B}_1(t) \end{cases} \quad (5)$$

IV.2 Comme $\mathcal{R}'$ tourne dans $\mathcal{R}$ autour de $\vec{e}_z$ à la vitesse angulaire ω , la relation de composition des dérivées temporelles donne

$$\left[\frac{d\vec{M}}{dt} \right]_{/\mathcal{R}} = \left[\frac{d\vec{M}}{dt} \right]_{/\mathcal{R}'} + \vec{\omega} \wedge \vec{M} \quad \text{avec} \quad \vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$$

Ainsi, avec l'équation (5) et $\vec{B}_1 = B_1 \vec{u}_X$ par définition du référentiel tournant $\mathcal{R}'$,

$$\left[\frac{d\vec{M}}{dt} \right]_{/\mathcal{R}'} = (\vec{\omega}_0 - \vec{\omega} + \vec{\omega}_1) \wedge \vec{M} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \vec{\omega}_0 = -\gamma B_0 \vec{e}_z \\ \vec{\omega} = \omega \vec{e}_z \\ \vec{\omega}_1 = -\gamma B_1 \vec{u}_X \end{cases} \quad (6)$$

IV.3 D'après l'équation (6), l'aimantation $\vec{M}$ tourne dans $\mathcal{R}'$ avec un vecteur rotation

$$\vec{\Omega}' = (\omega_0 - \omega) \vec{e}_z + \omega_1 \vec{u}_X$$

dont l'inclinaison θ par rapport $\vec{e}_z$ vérifie

$$\tan \theta = \frac{\Omega'_X}{\Omega'_z} = \frac{\omega_1}{\omega_0 - \omega}$$

On sait que $|\vec{B}_1| \ll |\vec{B}_0|$ donc $|\omega_1| \ll |\omega_0|$ et, **à moins que ω ne soit très proche de ω_0** , on a

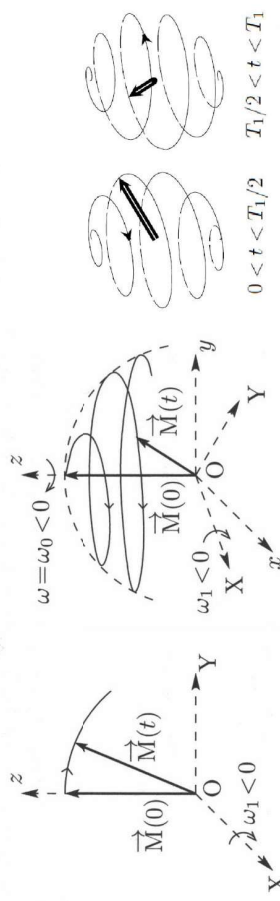
$$|\tan \theta| \ll 1$$

L'aimantation $\vec{M}$ est supposée initialement dirigée selon $\vec{e}_z$ et tourne ensuite autour d'une direction faiblement inclinée par rapport à $\vec{e}_z$. **Les composantes perpendiculaires à $\vec{e}_z$ restent petites.**

IV.4 Dans $\mathcal{R}'$, avec $\omega = \omega_0$ à la résonance, le vecteur rotation devient

$$\vec{\Omega}' = \omega_1 \vec{u}_X$$

alors l'aimantation $\vec{M}$ précesse autour de $\vec{u}_X$ à la pulsation $\omega_1 = -\gamma B_1 < 0$. L'extrémité du vecteur aimantation évolue sur un cercle dans le plan (YOz) .



Dans $\mathcal{R}$, cette rotation est composée avec celle de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$. Il s'ajoute donc une rotation autour de l'axe $\vec{e}_z$ à la pulsation $\omega = \omega_0 = -\gamma B_0 < 0$. Désormais, l'extrémité du vecteur aimantation s'inscrit, dans l'espace, sur une sphère de centre O et avec $|\omega| = |\omega_0| \gg |\omega_1|$, son évolution a l'allure représentée ci-dessus.

On a supposé implicitement B_0 et B_1 positifs pour déterminer les signes des vitesses de rotation ω_0 et ω_1 .

IV.5 Avec $\omega = \omega_0$ à la résonance, le champ tournant $\vec{B}_1(t)$ oscille à la pulsation $|\omega_0| = 4.10^8 \text{ rad.s}^{-1}$, qui correspond à une fréquence

$$f_0 = \frac{|\omega_0|}{2\pi} = 6.10^7 \text{ Hz}$$

Cette fréquence correspond au **domaine des ondes radio**.

On se situe à proximité de la bande F.M. dont les fréquences sont comprises entre 88 et 108 MHz.

IV.6 Dans le vide, le vecteur d'onde $\vec{k}$ et les champs $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$ d'une onde plane forment un trièdre orthogonal direct et vérifient la relation de structure

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

Avec $k = \omega/c$, on a

$$\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$$

et la norme du vecteur de Poynting $\vec{\Pi} = (\vec{E} \wedge \vec{B})/\mu_0$ est

$$\|\vec{\Pi}\| = \frac{c \|\vec{B}\|^2}{\mu_0}$$

Une onde plane, dont l'amplitude magnétique $B_1 = 3.10^{-5} \text{ T}$ est égale à celle du champ $\vec{B}_1(t)$, présente un vecteur de Poynting $\vec{\Pi}_1(t)$ d'amplitude

$$\Pi_1 = \frac{c B_1^2}{\mu_0} = 2.10^5 \text{ W.m}^{-2}$$

Le flux surfacique solaire moyen sur Terre est de l'ordre de 10^3 W.m^{-2} . La puissance surfacique à laquelle est soumis l'échantillon lors de l'IRM est élevée, mais la question IV.7 montre que l'échantillon n'est exposé au champ $\vec{B}_1(t)$ que sur une durée très brève. Quant au champ $\vec{B}_0$, comme il est stationnaire et n'est couplé à aucun champ électrique. Il ne contribue pas au vecteur de Poynting.

IV.7 À la résonance, l'aimantation $\vec{M}$ tourne dans $\mathcal{R}'$ autour de $\vec{u}_X$ à la pulsation $\omega_1 = -\gamma B_1 < 0$, donc elle effectue un quart de tour en une durée τ , telle que

$$\omega_1 \tau = -\frac{\pi}{2}$$

Pour $\gamma = 2.5.10^8 \text{ s}^{-1} \cdot \text{T}^{-1}$ obtenu à la question III.8, on a

$$\omega_1 = -\gamma B_1 = -8.10^3 \text{ rad.s}^{-1}$$

et

$$\tau = -\frac{\pi}{2\omega_1} = 2.10^{-4} \text{ s}$$

À l'issue de ce quart de tour, l'aimantation $\vec{M}$ est alignée selon $\vec{u}_X$. Une fois $\vec{B}_1(t)$ coupé pour $t > \tau$, ω_1 devient nulle, et avec $\omega = \omega_0$, le vecteur rotation est

$$\vec{\Omega}' = \vec{0}$$

L'aimantation de l'échantillon est un vecteur constant pour $t > \tau$ dans $\mathcal{R}'$.

IV.8 Dans $\mathcal{R}'$, l'écart à la résonance donne un vecteur rotation

$$\vec{\Omega}' = -\delta\omega \vec{e}_z + \omega_1 \vec{u}_X$$

Avec $|\delta\omega| \ll |\omega_1|$, on a

$$|\delta\omega| \tau \ll |\omega_1| \tau = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi, cet écart n'a pas d'effet significatif pendant le quart de tour initial. En revanche, une fois $\vec{B}_1(t)$ coupé pour $t > \tau$, le vecteur rotation n'est pas nul, mais vaut

$$\vec{\Omega}' = -\delta\omega \vec{e}_z$$

L'aimantation ne reste pas fixe, mais tourne autour de $\vec{e}_z$ dans le plan (XOY). En pratique, cette rotation n'est pas homogène, car l'écart à la résonance fluctue d'un bout à l'autre de l'échantillon.

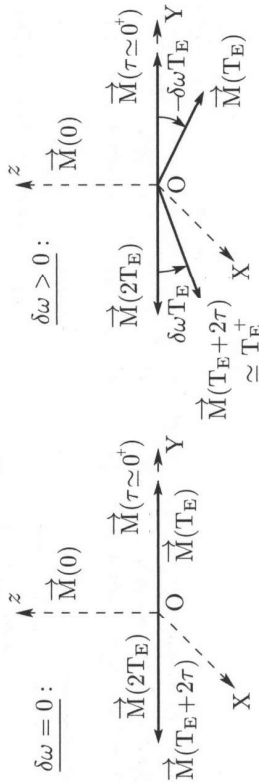
L'aimantation locale présente une direction aléatoire dans le plan (XOY) pour $t \gg \tau$ dans $\mathcal{R}'$ et l'aimantation résultante de l'échantillon est donc nulle.

IV.9 L'application de $\vec{B}_1(t)$ sur une durée 2τ provoque une rotation de l'aimantation de $-\pi$ autour $\vec{u}_X$, c'est à dire une symétrie par rapport à cet axe.

Les séquences sont les suivantes :

Pour $\delta\omega = 0$:

- L'aimantation locale est selon $\vec{u}_z$ à $t = 0$.
- Elle se retrouve selon $\vec{u}_Y$ à $t = \tau$. Une fois $\vec{B}_1(t)$ coupé, elle reste fixe dans $\mathcal{R}'$.
- L'aimantation locale est donc selon $\vec{u}_Y$ à $t = T_E$.
- Elle se retrouve selon $-\vec{u}_Y$ à $t = T_E + 2\tau$. Une fois $\vec{B}_1(t)$ coupé, elle reste fixe et conserve cette orientation jusqu'à $t = 2T_E$.



Pour $\delta\omega \neq 0$:

- L'aimantation locale est selon $\vec{u}_z$ à $t = 0$.
- Elle se retrouve selon $\vec{u}_Y$ à $t = \tau$. Une fois $\vec{B}_1(t)$ coupé, elle tourne autour de $\vec{e}_z$.
- Elle présente donc un décalage angulaire de $-\delta\omega T_E$ par rapport à $\vec{u}_Y$ à $t = T_E$.
- Elle se retrouve décalée de $\delta\omega T_E$ par rapport à $-\vec{u}_Y$ à $t = T_E + 2\tau \simeq T_E^+$ (rotation de $-\pi$ autour $\vec{u}_X$).
- Une fois $\vec{B}_1(t)$ coupé, elle tourne autour de $\vec{e}_z$ à $-\delta\omega$ et, après une durée T_E , elle a subi une rotation supplémentaire de $-\delta\omega T_E$. À $t = 2T_E$, la rotation totale autour de $\vec{e}_z$ dans le plan (XOY) est donc de π et l'aimantation est alignée selon $-\vec{u}_Y$.

Le résultat de l'application de $\vec{B}_1(t)$ suivant cette séquence d'écho de spin est indécidable pendant de la rotation initiale $-\delta\omega T_E$.

En dépit de l'inhomogénéité de l'écart à la résonance, l'aimantation locale est uniformément alignée selon $-\vec{u}_Y$ à l'instant $t = 2T_E$ dans $\mathcal{R}'$ et l'aimantation résultante de l'échantillon n'est plus nulle.

IV.10 Les durées caractéristiques $T_1 = 0,9$ s et $T_2 = 0,1$ s des processus de relaxation sont très grandes, devant la durée τ calculée à la question IV.8. Le phénomène de relaxation est suffisamment lent pour être négligé entre les instants $t = 0$ et $t = \tau$.

Les équations de relaxation sont des équations différentielles du premier ordre découplées, admettant pour solutions générales

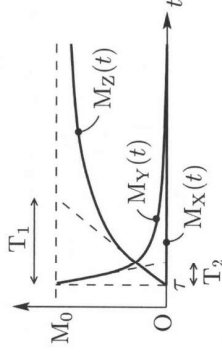
$$\begin{cases} M_X(t) = A_X \exp(-t/T_2) \\ M_Y(t) = A_Y \exp(-t/T_2) \\ M_Z(t) = A_Z \exp(-t/T_1) + M_0 \end{cases}$$

L'aimantation $\vec{M}(0) = M_0 \vec{e}_z$ à $t = 0$ devient $\vec{M}(\tau) = M_0 \vec{u}_Y$ à $t = \tau$ dans le cas simple de la question IV.7. Les conditions initiales sont donc

$$\begin{cases} M_X(\tau) = 0 \\ M_Y(\tau) = M_0 \\ M_Z(\tau) = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} A_X = 0 \\ A_Y = M_0 \exp(\tau/T_2) \\ A_Z = -M_0 \exp(\tau/T_1) \end{cases}$$

Ainsi, pour $t > \tau$,

$$\begin{cases} M_X(t) = 0 \\ M_Y(t) = M_0 \exp\left(-\frac{t-\tau}{T_2}\right) \\ M_Z(t) = M_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t-\tau}{T_1}\right)\right] \end{cases}$$



Ces expressions ne prennent en compte ni l'effet de l'écart à la résonance, qui provoque une rotation progressive de l'aimantation dans le plan (XOY), ni celui de la séquence d'écho de spin, qui conduit à l'alignement uniforme de l'aimantation selon $-\vec{u}_Y$.

IV.11 La technique d'écho de spin exposée à la question IV.9 permet, en dépit des inhomogénéités, un alignement uniforme dans le plan (XOY) de l'aimantation dans tout l'échantillon à l'instant $t = 2T_E$. Sans cet alignement, les composantes M_X et M_Y seraient nulles en valeur moyenne dans l'échantillon et aucune relaxation associée à T_2 ne pourrait être observée. Comme il est souhaitable que cet alignement ait lieu avant un avancement significatif du processus de relaxation, soit avant $3T_2$, on doit choisir $T_E \simeq T_2$.

$$T_E \simeq T_2$$

FIN