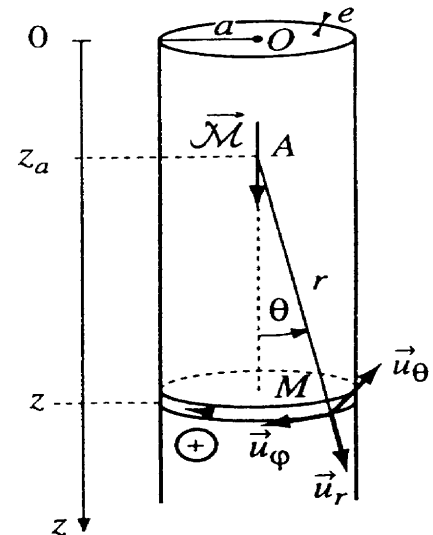


Partie 1 : Analyse documentaire sur l'expérience de Stern et Gerlach (voir document annexe)

Partie 2 : Chute d'un aimant dans un tuyau métallique.

L'expérience montre que le temps de chute d'un petit aimant est beaucoup plus important dans un tuyau métallique que dans un tuyau de PVC de même géométrie. Ce problème se propose de comprendre l'origine de la différence et de la quantifier.

Un petit aimant A est lâché sans vitesse initiale du point O ($z = 0$) (schéma ci-contre) ; son moment magnétique $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \vec{u}_z$ est, au cours du mouvement, toujours vertical et dirigé vers le bas ; son abscisse au cours de la chute est notée $z_a(t)$, l'axe Oz étant orienté suivant la verticale descendante. Cette chute s'effectue à l'intérieur d'un tuyau métallique creux, d'épaisseur e faible devant le rayon moyen a . L'extrémité supérieure du tuyau est placée en $z = 0$ et sa longueur, notée L , est très supérieure au rayon a . La conductivité électrique du métal est σ . Les frottements de l'air sont négligés.



A. Courant induit dans un circuit élémentaire

Dans un premier temps il est commode de raisonner sur un circuit (C) de cote z constitué par un tronçon de tuyau de hauteur dz (schéma ci-dessus). Un point M de cette boucle est repéré par ses coordonnées sphériques d'origine l'aimant A et l'orientation positive du circuit est choisie suivant $+\vec{u}_\phi$.

- 1). Expliquer qualitativement l'origine d'un courant i induit dans le circuit (C) ; en discutant selon les positions relatives de l'aimant et de la boucle, prévoir le sens de ce courant et le représenter sur un dessin. Interpréter alors l'existence d'une force de freinage s'exerçant sur l'aimant.
- 2). On considère une calotte sphérique Σ de rayon r , centrée en A , et s'appuyant sur le contour du circuit (C). On note P un point quelconque de cette calotte et θ_P et ϕ_P les coordonnées angulaires de P .

En découpant astucieusement Σ en bandes infinitésimales, montrer que le flux à travers Σ du champ magnétique créé par le dipôle magnétique A s'écrit :

$$\Phi_{\vec{B}, \Sigma} = \frac{\mu_0 \mathcal{M} \sin^2 \theta}{2r}$$

- 3). En déduire l'expression du champ électrique induit $\vec{E}_m(M)$, en notant v la vitesse de chute de l'aimant le long de (Oz) :

$$\vec{E}_m(M) = -\frac{3\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M}a(z-z_a)v}{(a^2 + (z-z_a)^2)^{5/2}} \vec{u}_\phi$$

Ce champ peut être qualifié d'électromoteur : justifier.

Dans la suite il est supposé uniforme sur l'épaisseur e du métal (car $e \ll a$) ainsi que sur sa hauteur dz .

- 4). Déterminer le courant i induit par ce champ électromoteur dans le circuit (C) par la loi d'Ohm locale et le flux du vecteur densité de courant \vec{j} à travers une surface adéquate.

Retrouver ce résultat par la force électromotrice induite \mathcal{E}_i et la résistance δR du circuit (C) dont la limite lorsque dz tend vers zéro est à commenter. Le signe de i est-il conforme à la prévision faite à la question 1.a) ?

B. Force exercée par le tuyau sur l'aimant

Soit \vec{F} la force exercée par le tuyau sur l'aimant et F_Z sa projection sur l'axe Oz. Il est plus simple d'évaluer la force réciproque F_Z' exercée par l'aimant sur le tuyau.

- 5). Exprimer sur la base \vec{u}_r et \vec{u}_θ la force $d^2\vec{F}'$ exercée par le champ de l'aimant sur un élément $d\vec{l} = dl \vec{u}_\phi$ du circuit (C) et la représenter sur un dessin, puis la projeter sur Oz et donner la résultante dF_Z' pour le circuit (C) entier en fonction de \mathcal{M} , di, a, r et θ .
- 6). En déduire que F_Z , la composante de la force exercée par le tuyau entier sur l'aimant, est finalement donnée par l'intégrale :

$$F_Z = -\frac{9\mu_0^2\sigma e\mathcal{M}^2 a^3 v}{8\pi} \int_0^L \frac{(z-z_a)^2 dz}{(a^2 + (z-z_a)^2)^5}$$

- 7). Effectuer dans l'expression précédente le changement de variable $x = \frac{(z-z_a)}{a}$ et justifier physiquement que l'intégrale obtenue se ramène à :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^5} = \frac{5\pi}{128}$$

- 8). En déduire que la force de freinage du tuyau sur l'aimant est du type $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$ où α est un coefficient positif indépendant de la position z_a de l'aimant. Donner l'expression de α et commenter la forme générale de cette force.
- 9). **Application numérique.** L'expérience est facilement réalisable en prenant :
- pour le tuyau de cuivre : $a = 3,5 \text{ mm}$; $e = 1,0 \text{ mm}$; $L = 1,0 \text{ m}$; $\sigma = 5,8.10^7 \text{ S.m}^{-1}$.
 - pour l'aimant en Néodyme-Fer-Bore de masse m (en forme de petit disque de 5 mm de diamètre et 2 mm de haut), le constructeur fournit les valeurs : $m = 0,29 \text{ g}$; $\mathcal{M} = 3,7 \cdot 10^{-2} \text{ A.m}^2$.
 - par ailleurs : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$.

Donner la valeur numérique de α .

C. Mouvement de chute de l'aimant dans le tuyau métallique

- 10). Intégrer l'équation différentielle du mouvement de l'aimant et exprimer sa vitesse $v(t)$ et sa cote $z_a(t)$ à l'aide de la vitesse limite atteinte v_1 et d'un temps τ caractéristique du régime transitoire. Donner l'expression de v_1 en fonction de α et la relation entre v_1 et τ .
- 11). Calculer numériquement v_1 , τ et $z_a(\tau)$ dans des unités convenables en reprenant les données et résultats de la question 9) ou, à défaut, en prenant $\alpha = 3,7.10^{-2} \text{ kg.s}^{-1}$; commenter. On donne : $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.
- 12). En déduire simplement le temps de chute total t_c de l'aimant dans le tuyau et le comparer à celui t_c' de sa chute dans un tuyau de PVC de mêmes caractéristiques géométriques. Commenter. L'expérience donne pour le tuyau de cuivre un temps de chute de l'ordre de 10 s ; le modèle développé dans ce problème paraît-il satisfaisant ?
- 13). Les frottements de l'air ont été négligés dans cette étude. Est-ce raisonnable ?

Fin