Interférences à ondes multiples - Réseau

I- Présentation des réseaux

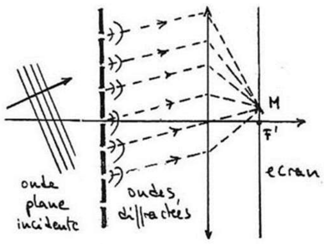
Un réseau (diffractant) est un dispositif interférentiel à division du front d'onde constitué d'un très grand nombre de traits diffractant parallèles répartis périodiquement.

Ordre de grandeur :

- Période spatiale des motifs ou « pas » du réseau : $a \sim 1$ à $10\,\mu m$
- Fréquence spatiale des motifs : $\frac{1}{a} \sim 100$ à 1000 traits par mm (en mm^{-1})
- Longueur du réseau : qq cm
- Nombre de motifs : $N \sim 10^3$ à 10^4

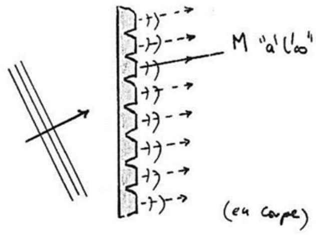
Exemple de travail : plaque opaque percée de N fentes

Le réseau de comporte comme un diviseur d'onde et crée N ondes secondaires cohérentes à partir de l'onde primaire. L'intensité observée en sortie résulte de la superposition de N ondes secondaires. On parle d'interférence à « N ondes » ou « à ondes multiples »



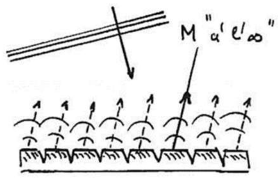
Exemples plus réalistes

En transmission : plaque de verre gravée périodiquement de « traits » La plaque devient opaque un niveau des traits et est transparente ailleurs ; le bloc de verre entre deux traits est le motif diffractant qui émet une onde secondaire.



En réflexion : plaque métallique (miroir) gravé périodiquement de traits. Même principe : chaque « mini miroir » diffracte une onde secondaire.

La face d'un CD se comporte comme un réseau.

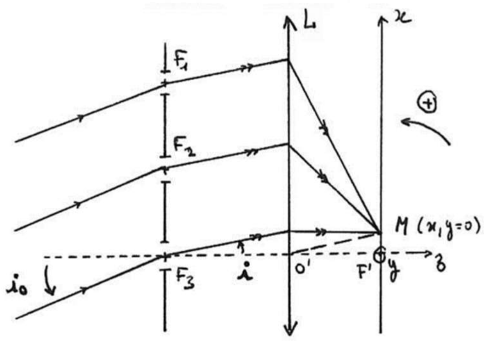


Cadre de l'étude :

- Eclairage par une onde plane monochromatique (lumière cohérente)
- Observation « à l'infini » / dans le plan focal image d'un lentille convergente.

II- Réseau de fente éclairé par une onde plane : condition d'interférences exactement constructives et existence de pics d'intensité. Finesse des pics.

Le réseau est formé de fentes « très longues » parallèles à $\overrightarrow{u_y}$: l'intensité observée est invariante par translation selon $\overrightarrow{u_y}$, comme pour les fentes d'Young.



- On ne s'intéresse par à la diffraction en elle-même mais aux interférences secondaires entre les ondes secondaires (comme dans l'étude des trous d'Young)
- L'invariance permet de chercher l'intensité I(M) pour un plan de coordonnées $(x, y=0)$ et de se limiter à un schéma plan.
- Notations :
  F_1, F_2, etc … sont les centres des fentes considérées comme les sources des ondes secondaires.
  i_0 : angle orienté que fait la direction de l'onde plane incidente avec la normale au réseau.
  i : angle orienté repérant la direction du point M « à l'infini » que l'on étudie par rapport à la normale au réseau.

Attention, les angles sont orientés : **faire le schéma avec i et i_0 positifs.**

Proposition :

Le déphasage en M entre deux ondes diffractées par deux fentes successives s'écrit :

$$\boxed{\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} a\left(\sin i - \sin i_0\right)}$$

Démonstration :

Proposition :

En tout point M repéré par un angle i vérifiant $\varphi = p.2\pi$ **avec** $p \in \mathbb{Z}$ **c'est-à-dire** $\boxed{\sin i - \sin i_0 = p\frac{\lambda}{a},\ p \in \mathbb{Z}}$ **, on observe un important maximum d'intensité appelé « pic d'intensité du réseau ».**

L'entier relatif p permet de numéroter les pics. On l'appelle « ordre » du pic

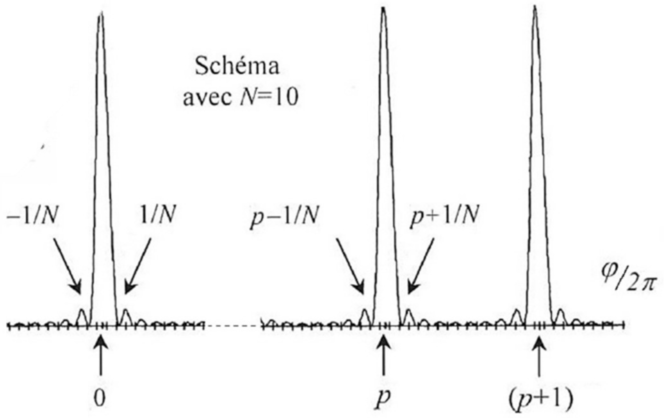
Démonstration :

Proposition :

L'intensité diffractée par un réseau hors de pics est quasi nulle.

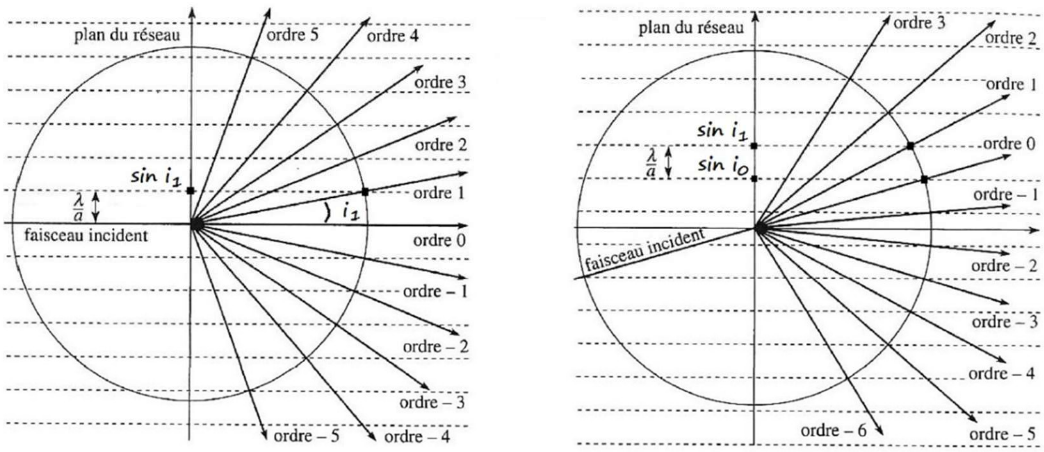
La largeur du pic d'ordre p est obtenue par la condition : $\boxed{p - \frac{1}{N} \le \frac{\varphi}{2\pi} \le p + \frac{1}{N}}$

Comme $N \gg 1$, les pics sont extrêmement « fins ».



Justification :

Réseau éclairé par un faisceau laser - illustration des pics observés : $\boxed{\sin i = \sin i_0 + p\lambda/a}$



On peut se contenter d'une approche qualitative. Plus quantitativement, on peut exploiter la formule $\sin i = \sin i_0 + p\lambda/a$, en construisant un cercle unité et une « échelle » de pas λ/a, normale au plan du réseau, dont les intersections avec le cercle donnent les directions des pics. Il faut bien positionner l'échelle à partir du pic d'ordre 0 qui se trouve dans la direction de l'optique géométrique.

Remarque : les ordres p visibles sont ceux vérifiant $\left|\sin i_0 + p\frac{\lambda}{a}\right| \leq 1$

III- Calcul de l'éclairement à l'infini

On souhaite ici calculer explicitement I(M). Les N ondes qui se superposent en M étant cohérentes, il faut d'abord calculer $\underline{s}(M,t)$ en sommant les contributions de ces N ondes, puis en déduire $I(M)=|\underline{s}|^2$

Pour y arriver simplement, il faut s'appuyer sur le schéma ci-contre (repris du paragraphe I-) où on aura choisi i_0 et i positifs et numéroté les fentes de 0 à N-1.
Remarque : il faut choisir un indice de sommation sur les N fentes : i et p sont proscrits (angle repérant M et ordre des pics par la suite) ; n et k sont possibles mais attention à ne pas confondre avec un indice optique ou un vecteur d'onde ! Nous choisirons m. On appellera F_m le centre de la fente numéro m.

$$\underline{s}(M,t)=\sum_{m=0}^{N-1}\underline{s_m}(M,t)=\sum_{m=0}^{N-1}s_0e^{j\left(-\omega t+\frac{2\pi}{\lambda}(SF_mM)+\varphi^0\right)}$$

Attention : S étant à l'infini (onde plane), le chemin optique (SF_mM) diverge pour tout m.
Idée : on met en facteur dans la somme l'amplitude $\underline{s_0}(M,t)$ correspondant à l'onde diffractée par la fente numérotée O, ce qui fait apparaître la différence $(SF_mM)-(SF_0M)$ qui est finie.
D'une certaine façon, cela revient à choisir (SF_0M) comme chemin « de référence ».

$$\underline{s}(M,t)=\underbrace{s_0e^{\overbrace{j\left(-\omega t+\frac{2\pi}{\lambda}(SF_0M)+\varphi^0\right)}^{\Phi_0(M,t)}}}_{\underline{s_0}(M,t)}.\sum_{m=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{\lambda}[(SF_mM)-(SF_0M)]}$$

$\Phi_0(M,t)$ est la phase de M à t de l'onde qui a suivi le chemin « de référence » SF_0M.

Or, en introduisant φ, déphasage entre deux ondes diffractées par deux fentes successives, on a par périodicité du motif : $\frac{2\pi}{\lambda}\left[(SF_mM)-(SF_0M)\right]=m\varphi$ et $\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}a(\sin i-\sin i_0)$

Remarque : On voit ici l'intérêt de numéroter à partir de 0 car si on part de $m=1$, on a $\frac{2\pi}{\lambda}\left[(SF_mM)-(SF_1M)\right]=(m-1)\varphi$; ce qui est moins pratique.

Et si on numérote les fentes de bas en haut : $\frac{2\pi}{\lambda}\left[(SF_mM)-(SF_0M)\right]=-m\varphi$; le signe n'est pas gênant, mais sera toujours présent.

On a alors : $\underline{s}(M,t)=s_0e^{j\Phi_0(M,t)}.\sum_{m=0}^{N-1}e^{jm\varphi}=s_0e^{j\Phi_0(M,t)}.\sum_{m=0}^{N-1}\left(e^{j\varphi}\right)^m=s_0e^{j\Phi_0(M,t)}\frac{1-\left(e^{j\varphi}\right)^N}{1-e^{j\varphi}}$

Astuce calculatoire : $\frac{1-\left(e^{j\varphi}\right)^N}{1-e^{j\varphi}}=\frac{e^{j\frac{N\varphi}{2}}}{e^{j\frac{\varphi}{2}}}.\frac{e^{-j\frac{N\varphi}{2}}-e^{j\frac{N\varphi}{2}}}{e^{-j\frac{\varphi}{2}}-e^{j\frac{\varphi}{2}}}=e^{j(N-1)\frac{\varphi}{2}}.\frac{\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$

Ainsi $I(M)=|\underline{s}|^2=s_0^2\underbrace{\left|e^{j\left(\Phi_0+(N-1)\frac{\varphi}{2}\right)}\right|^2}_{1}\frac{\sin^2\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$

Conclusion : $\boxed{I(M) = s_0^2 \dfrac{\sin^2\left(\dfrac{N\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)} = I_0 \dfrac{\sin^2\left(\dfrac{N\varphi}{2}\right)}{N^2\sin^2\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} I_0 = N^2 s_0^2 = I_{max} \\ \varphi = \dfrac{2\pi}{\lambda} a\left(\sin i - \sin i_0\right) \end{array}}$

I est maximale pour $\varphi = 0\,[2\pi]$ et vaut $I_{max} = N^2 s_0^2$

I s'annule pour $\varphi = \dfrac{2\pi}{N}\left[\dfrac{2\pi}{N}\right]$ (sauf $\varphi = 0\,[2\pi]$)

I présente des maximums secondaires pour $\varphi = \dfrac{3\pi}{N}, \dfrac{5\pi}{N}, \ldots$ d'intensité $\dfrac{I_0}{N^2} \ll I_0$

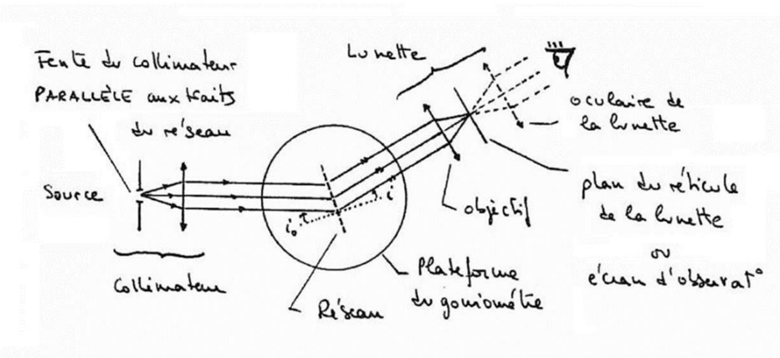
Toute la lumière est concentrée dans les pics.

IV- Utilisation d'un réseau en spectroscopie

Idée : La position angulaire d'un pic lumineux d'ordre $p \neq 0$ dépend de λ.

On peut se servir d'un réseau comme d'un **élément dispersif** pour faire de la spectroscopie (analyse d'un spectre inconnu)

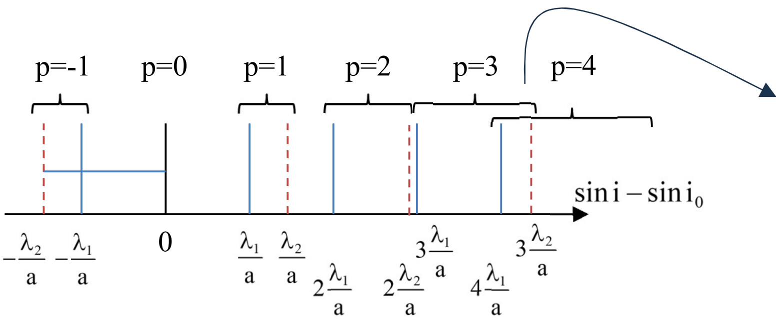
Montage : le réseau est posé sur la plateforme d'un goniomètre, éclairé via un collimateur à fente et l'observation se fait à l'aide d'une lunette.



i_0 est réglable par orientation du réseau par rapport au collimateur.

Si la fente du collimateur est infiniment fine, l'onde incidente est associée à une unique valeur de i_0 (inexact en pratique)

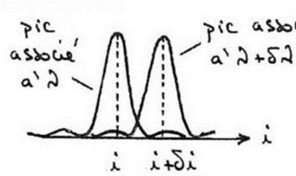
Observation : on utilise l'ordre 1 ou 2 et on relie la position angulaire de la raie à la longueur d'onde par $\sin i - \sin i_0 = p\dfrac{\lambda}{a},\ p \in \mathbb{Z}$



Lorsque p devient grand ($p > 3$ avec $\dfrac{1}{a} \sim 100$ traits / mm) on bserve un **recouvrement d'ordre**

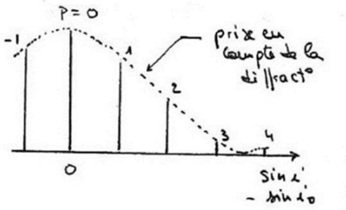
Calcul de l'écart angulaire entre deux pics associés à deux longueurs d'ondes proches

$$\begin{cases} 1^{er} \text{ pic :} & \{\lambda, i(\lambda) \text{ noté } i\} : & \sin i = p\dfrac{\lambda}{a} + \sin i_0 \\ 2^{ème} \text{ pic :} & \{\lambda + \delta\lambda, i(\lambda + \delta\lambda) \text{ noté } i + \delta i\} : & \underbrace{\sin(i + \delta i)}_{\sin(i)+\cos(i)\delta i} = p\dfrac{\lambda + \delta\lambda}{a} + \sin i_0 \end{cases}$$



Ainsi $\boxed{\cos(i)\delta i = p\dfrac{\lambda}{a}}$ p ordre dans lequel on travaille et a le pas du réseau

- Pour séparer les deux pics, on a intérêt à travailler dans un ordre élevé avec un réseau de faible pas (ie avec un grand nombre de traits pas mm)
  Au lbao : 300, 600, 1000 traits par mm.
- P est limité par le recouvrement des ordres, le nombre d'ordre visibles et la chute d'intensité à mesure que l'ordre augmente, la diffraction se faisant préférentiellement dans la direction i = i_0



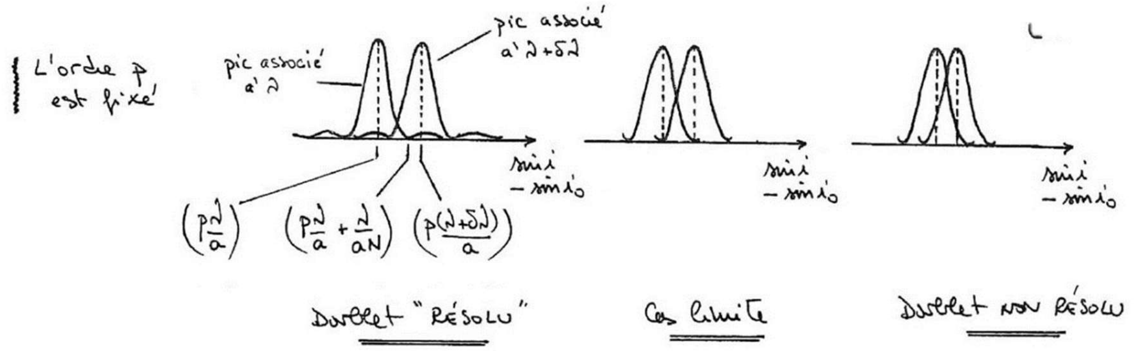
Séparation d'un doublet dans un ordre p fixé. Critère de Rayleigh.

Il n'est pas toujours pratique de raisonner sur l'angle i ; il est préférable de raisonner sur la quantité $\sin i - \sin i_0$; sur un axe de cette variable.

Un pic de longueur d'onde λ est centré en $p\dfrac{\lambda}{a}$ (ce qui correspond à $\dfrac{\varphi}{2\pi} = p$)

La demie largeur d'un pic (pour tout p) est de $\dfrac{\lambda}{Na}$ (ce qui correspond à $\dfrac{\varphi}{2\pi} = p \pm \dfrac{1}{N}$)

Qualitativement



Quantitativement : $p\dfrac{(\lambda + \delta\lambda)}{a} \geq p\dfrac{\lambda}{a} + \dfrac{\lambda}{Na} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dfrac{\delta\lambda}{\lambda} \geq \dfrac{1}{pN}}$

Remarque : la quantité $\dfrac{\lambda}{\delta\lambda_{\substack{\min \\ \text{résolu}}}} = pN$ est appelée pouvoir de résolution intrinsèque du réseau dans l'ordre p.

Cette notion est très théorique : en pratique, la résolution est limitée par la taille de la fente du collimateur qui « étale » géométriquement les pics.

V- Complément : minimum de déviation