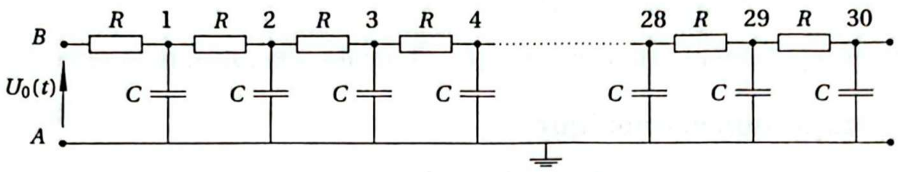
Etude d'une ligne RC

On dispose d'une ligne RC constituée par la mise en cascade de $N = 30$ cellules RC identiques



Le montage permet d'alimenter le circuit entre les entrées A et B avec une tension $u_0(t)$, et de mesurer les tensions aux points 1, 2, 3, …, 29, 30

I – Etude expérimentale

A- Régime stationnaire

A l'aide d'une alimentation stabilisée, on applique une tension constante $u_0(t) = U_0 = 10,00\,\text{V}$ à l'entrée de la ligne

L'extrémité de la ligne est en court-circuit (on ne considérera que les 20 premières cellules)

1- A l'aide d'un multimètre, relever les valeurs des tensions u_n et représenter $u_n = f(n)$. Est-ce conforme à la théorie ? On établira l'expression de u_n en fonction de n, N = 20 (ici), et U_0

2- Quel est le circuit équivalent en régime stationnaire ? Mesurer l'intensité traversant les 20 résistances et en déduire la valeur de R.

B- Régime harmonique

L'extrémité de la ligne est en sortie ouverte (on utilisera ici les N = 30 cellules)

On applique une tension $u_0(t) = U_0 \cos(2\pi f t)$

On réglera l'amplitude à la valeur maximale accessible.

Une étude prévoit, sous certaines hypothèses, que la tension aux bornes de la cellule de rang n est donnée par

$$u_n(t) = U_0 e^{-\frac{n}{n_0}} \cos(2\pi f t - \varphi_n) \quad \text{avec} \quad n_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi R C f}} \quad \text{et} \quad \varphi_n = n\sqrt{\pi R C f}$$

Il s'agit ici de valider ce modèle en vérifiant :

- la décroissance exponentielle de l'amplitude selon $e^{-\frac{n}{n_0}}$ le long de la ligne à une fréquence donnée ;
- la loi de dépendance de n_0 avec la fréquence f.
- l'évolution du retard de phase du terme sinusoïdal le long de la ligne à une fréquence donnée.

3- Pour un ensemble de fréquences (de f = 10 Hz à f = 100 Hz environ, on prendra 5 à 6 valeurs de f différentes), mesurer l'amplitude Un de la tension $u_n(t)$ et son déphasage φ_n avec la tension $u_0(t)$. On cessera les mesures le long de la ligne lorsque la tension sera trop faible pour permettre des mesures précises.

4- Pour chaque valeur de la fréquence, proposer et effectuer une représentation graphique afin de vérifier la décroissance de l'amplitude selon la loi proposée.

5- En déduire par un ajustement linéaire adaptée la valeur de $n_0(f)$ pour chaque valeur de f considérée.

6- Pour chaque valeur d la fréquence, représenter le retard de phase φ_n en fonction de n. Obtient-on la loi attendue ? En déduire une valeur e C pour chaque fréquence étudiée.

7- Proposer et réaliser une représentation graphique afin de vérifier si le coefficient n_0 obéit à une loi du type $n_0 = Af^{\alpha}$

Déterminer α par une représentation graphique linéaire adaptée. Comparer à la valeur théorique.

C- Régime périodique non harmonique

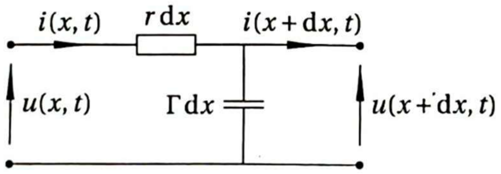
La ligne, toujours en sortie ouverte, est alimentée par le GBF délivrant un signal carré de fréquence f = 50 Hz.

8- Observer à l'oscilloscope l'évolution de la forme du signal. Expliquer la forme du signal observé à la cellule n = 10.

II- Etude théorique

A- Modèle de la ligne à constantes réparties

Ce modèle, assez éloigné de la ligne réelle, permet de faire apparaître les phénomènes en jeu avec des équation simples.
On considère une ligne électrique de longueur L possédant une résistance linéique r et une capacité linéique Γ.
Une longueur dx de cette ligne a donc pour modèle électrique équivalent :



9- Etablir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la tension u(x,t) le long de la ligne. Cette équation est une équation de **diffusion**.

10- Dans le cas d'une ligne semi-infinie (x > 0), on cherche une solution en régime harmonique sous la forme complexe : $\underline{u}(x,t) = \underline{U}(x)e^{j\omega t}$

Etablir l'équation différentielle vérifiée par la fonction complexe $\underline{U}$.

La résoudre dans le cas de la ligne semi infinie, avec la condition à l'origine $u(0,t) = U_0\cos(\omega t)$.

11- En notant $\underline{u}(x,t) = \underline{U}(x)e^{j\omega t} = U(x)e^{j(\omega t - \varphi(x))}$, montrer que $U(x) = U_0 e^{-\frac{x}{\delta}}$ et préciser l'expression de δ en fonction de la fréquence f et des paramètres de la ligne.

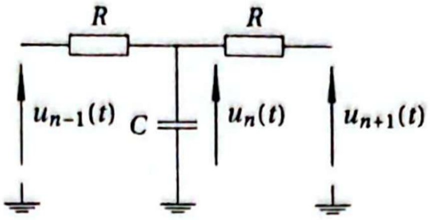
Donner l'expression de $\varphi(x)$ en fonction des paramètres de la ligne.

Donner l'expression réelle de $u(x,t)$.

12- Faire apparaître une distance caractéristique δ décrivant la décroissance de U(x) avec x. Comment varie δ avec la fréquence f ? Est-ce compatible avec les résultats expérimentaux ? Que peut-on dire de δ quand la fréquence de vient élevée ? Comment s'appelle ce phénomène ?

B- Modèle de la ligne à constante localisées

Il s'agit de la ligne réelle constituée de la succession des cellules RC.
On s'intéresse à la tension $u_n(t)$



B1- Mise en équation

13- Etablir la relation entre $\frac{du_n}{dt}$ et le tensions $u_{n-1}(t)$, $u_n(t)$ et $u_{n+1}(t)$

Passage à la limite de la ligne continue

On interpole les tensions discrètes $u_n(t)$)par une fonction continue $u(x,t)$ telle que $u_n(t) = u(x_n = na, t)$
La ligne discrète est ainsi vue comme une ligne continue où les tensions sont mesurées aux points $x_n = na$ équidistants de a. Cette approximation est d'autant plus justifiée que a est « petit » ; ce que l'on précisera par la suite.

14- En effectuant un développement au second ordre en a de $u_{n-1}(t)$ et $u_{n+1}(t)$ et en assimilant $\frac{du_n}{dt}$ à $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ montrer que l'équation de récurrence établie à la question **13-** se ramène à l'équation aux dérivée partielle de la question **9-**, en prenant $r = \frac{R}{a}$ et $\Gamma = \frac{C}{a}$

15- En utilisant l'expression de $u(x,t)$ établie à la question **9-** et en considérant $u_n(t) = u(na,t)$, montrer que l'on peut écrire $u_n(t) = U_0 e^{-\frac{n}{n_0}} \cos\left(2\pi ft - \frac{n}{n_0}\right)$ où l'on exprimera n_0 en fonction de f et des paramètres r, Γ et a de ligne continue, puis en fonction de f et des paramètre R et C de la ligne discrète.

B2- Validité du passage à la ligne continue

16- Comment interpréter, en termes d'onde, le terme $\cos\left(2\pi ft - \frac{x}{\delta}\right)$ de l'expression de $u(x,t)$?

Exprimer la longueur d'onde associée.
Le passage au milieu continu est valide si la variation spatiale de l'onde de tension, à un instant t donné, est faible à l'échelle d'une cellule, c'est-à-dire si $a \ll \lambda$
Montrer que cette condition se ramène à $RCf \ll \beta$ où β est un coefficient numérique que l'on précisera.

17- Discuter de la validité du modèle de la ligne continue étudiée aux fréquences considérées.

B3- Validité du modèle de la ligne semi-infinie.
On a considéré la ligne comme semi-infinie $(N \to \infty)$, ce qui revient à négliger tout effet de bord en bout de ligne.

18- Comment serait modifiée l'expression de $u(x,t)$ établie à la question 11- si la ligne était de longueur finie ? On donnera la forme générale de son expression sans chercher à déterminer d'éventuelles constantes dépendant des conditions aux extrémités.

19- En admettant que l'effet de l'extrémité de la ligne est négligeable si $U_N < \frac{U_0}{100}$, montrer que le nombre de cellules doit être au moins égal à un nombre N_{min} que l'on exprimera en fonction de n_0.

20- Discuter de la validité du modèle de la ligne semi-infinie lors des mesures expérimentales effectuées.

B4- Etude directe de ligne à constantes réparties (d'après un écrit de Centrale PC)
On part de l'équation de récurrence établie à la question **13-**.

21- En régime harmonique, on note $\underline{u_n}(t) = \underline{U_n} e^{j\omega t} = U_n e^{j(\omega t + \varphi_n)}$ la tension au point.
Montrer que cette équation admet une solution de la forme $\underline{U_n} = \underline{k}^n \underline{U_0}$ où $\underline{k}$ satisfait à une équation du second degré à expliciter.

22- On se place dans la limite des basses fréquences, soit $X = RC\omega \ll 1$. Montrer alors que, au deuxième ordre près en $\sqrt{X}$, le paramètre $\underline{k}$ est donné par $\underline{k} = 1 \pm (1+j)\sqrt{\frac{X}{2}}$

23- Montrer que, au premier ordre en $\sqrt{X}$, $|\underline{k}| = 1 \pm \sqrt{\frac{X}{2}}$
En envisageant la limite $n \to \infty$ d'une ligne très longue, lever l'indétermination sur le signe apparaissant dans l'expression de $|\underline{k}|$.
En déduire l'expression, entièrement déterminée de $\underline{k}$.

24- Comme $X = RC\omega \ll 1$, $|\underline{k}|$ est proche de l'unité. Montrer que l'amplitude U_n de $u_n(t)$ présente alors une décroissance quasi exponentielle du type : $\frac{U_n}{U_0} \approx e^{-\frac{n}{n_0}}$. Exprimer n_0.

25- Comparer l'hypothèse $X \ll 1$ effectuée ici avec l'hypothèse nécessaire pour utiliser le modèle de la ligne continue étudiée en II-B-2.

Annexe : python

On peut utiliser python pour effectuer des régressions linéaires (ou ajustements linéaires). On charge la bibliothèque :

```
import pylab as plb
```

Pour effectuer une régression linéaire à partir des listes X et Y des abscisses et des ordonnées des points, il faut procéder comme suit :

```
P=plb.polyfit(X,Y,1)
```

Le résultat p est une liste de deux valeurs : p[0] retourne la pente et p[1] l'ordonnée à l'origine de la régression linéaire.