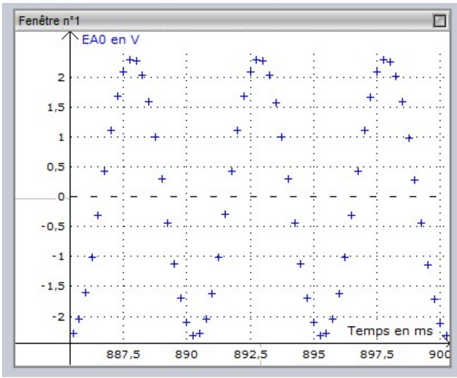
Analyse spectrale d'un signal numérisé

I- Objectifs du TP et découverte du critère de Shannon.

- L'objectif de ce TP est d'apprendre à effectuer correctement des **mesures de fréquence à partir d'un signal temporellement échantillonné**, c'est-à-dire dont on ne connaît la valeur qu'à certains instants particuliers périodiquement espacés, de la forme $t_n = t_0 + n \times T_e$, avec *n* entier.

  Un tel échantillonnage a lieu dès que l'on observe et qu'on analyse le signal à l'aide d'un logiciel d'acquisition comme Latis (voir le schéma ci-contre où l'on étudie une simple sinusoïde), ou d'un oscilloscope numérique (voir plus loin).



  - ➢ T_e est le **pas d'échantillonnage** et $f_e = 1/T_e$ la **fréquence d'échantillonnage.**
  - ➢ En outre, la numérisation n'a lieu que sur une durée finie **Δt** appelée **durée d'acquisition**, qui est souvent inférieure à la durée réelle du signal étudié (évident si le signal étudié est une pure sinusoïde !).
  - ➢ Dans la suite, la ou les fréquence(s) significative(s) du spectre réel du signal étudié seront notées f ou $\{f_k\}$.
  - ➢ L'algorithme intégré à Latis et à l'oscilloscope, qui après numérisation fournit le spectre du signal numérisé, s'appelle la **FFT** pour « **Fast Fourier Transform** », i.e. Transformée de Fourier Rapide en français. Les propriétés de la FFT sont décrites en détail dans l'annexe 2, à laquelle on pourra se référer au fur et à mesure du TP.

    Rappel : Un signal *v* (*t*) quelconque peut être décomposé sur une base de fonctions sinusoïdales par une opération appelée transformée de Fourier (TF). L'ensemble des fréquences apparaissant dans cette décomposition forme un ensemble continu appelé spectre du signal. Si le signal est périodique, le spectre est discret et la TF revient à une décomposition en séries de Fourier.

  - ➢ Si les paramètres de la numérisation Δt et f_e sont bien choisis (si l'on a correctement numérisé le signal), on retrouve bien les fréquences réelles $\{f_k\}$ dans le spectre fourni par la FFT. En revanche, si ces paramètres sont mal choisis, deux problèmes peuvent être observés :
    - Les valeurs des fréquences présentes dans le spectre du signal numérisé ne correspondent que très approximativement aux valeurs des $\{f_k\}$.
    - Il apparait dans le spectre numérisé des fréquences qui n'existent pas dans le spectre réel !

- L'objectif premier du TP est de mettre en évidence et de comprendre un critère quantitatif, appelé critère de Shannon, assurant un bon choix de fréquence d'échantillonnage. L'objectif secondaire du TP est de comprendre l'influence sur le spectre mesuré des paramètres autres que f_e , en particulier l'influence de la durée d'acquisition Δ*t*.
  - ➢ Intuitivement, il semble clair qu'une fréquence d'échantillonnage f_e très grande devant $f_{max} = \max(f_k)$, assure une bonne numérisation ; et qu'a contrario il est impossible de caractériser correctement des variations temporelles de fréquence f supérieure à f_e en échantillonnant à f_e.

- Le **critère de Shannon** précise cela en affirmant que :

  La fréquence d'échantillonnage f_e doit être supérieure au double de f_{max}, la plus haute fréquence significative du spectre du signal étudié.

- D'après ce critère, la plus haute fréquence que l'on puisse correctement mesurer lors de la FFT d'un signal échantillonné à la fréquence f_e est $f_{max} = f_e/2$; ceci explique pourquoi les logiciels et oscilloscopes **n'affichent par défaut le spectre du signal numérisé que sur la plage de fréquences [0 ; f_e/2]**.

- Lorsque ce critère de Shannon n'est pas rempli on dit que le signal est **sous-échantillonné** et il apparait alors dans le spectre fourni par la FFT des fréquences **plus basses** que les fréquences réelles caractéristique(s) du signal étudié, qualifiées de **fréquences fantômes**.

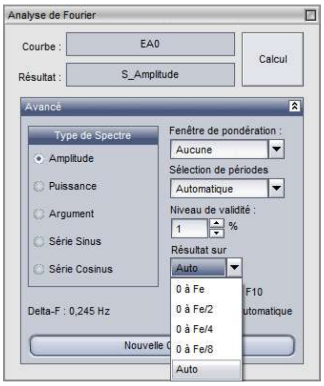
II- Numérisation et analyse spectrale d'un signal à l'aide d'un logiciel d'acquisition (1h15)

A- Prise en main du logiciel Latis-Pro pour l'acquisition du signal et le calcul de la FFT.

- Nous allons commencer par étudier le signal électrique, sinusoïdal ou en créneaux, délivré par un GBF. Nous disposons d'un logiciel (Latis-Pro) avec une interface d'acquisition qui permet d'enregistrer (d'acquérir) ce signal sur une **durée Δt**, de le numériser avec un **pas d'échantillonnage T_e**, et de l'observer temporellement ; ce signal sera donc constitué de **$N = \Delta t/T_e$ points ou « échantillons »** (ne pas relier les points entre eux). Le logiciel permet ensuite d'obtenir le spectre du signal ainsi numérisé en en réalisant une FFT.

- Travail demandé pour la prise en main :
  - ↳ Brancher la sortie du GBF sur l'interface d'acquisition de Latis (bornes EA0 et masse). On commencera par utiliser un signal sinusoïdal de fréquence 196 Hz et d'amplitude crête-crête égale à environ 10 V.
  - ↳ Lancer Latis et activer la borne d'acquisition EA0.
  - ↳ Paramétrer l'acquisition en choisissant N et T_e. On commencera par N = 4000 et T_e = 250 µs.
  - ↳ Lancer l'acquisition (F10).
  - ↳ Zoomer sur le signal temporel obtenu pour observer 2 à 5 périodes et constater que le signal a bien été échantillonné. (On utilise pour cela la « loupe » : placer la souris dans la zone du signal temporel et activer la loupe par un clic droit ; pour désactiver, clic droit de nouveau, puis : terminer).
  - ↳ Lancer une FFT : onglets traitement – calculs spécifiques – analyse de Fourier, ou raccourci F6.
  - ↳ Vérifier que le spectre est conforme à ce que l'on attend, à la fois en termes de fréquence et d'amplitude. (On peut utiliser pour cela le « pointeur » : placer la souris dans la zone du spectre et activer le pointeur par un clic droit ; pour désactiver, clic droit de nouveau, puis : terminer).
  - ↳ Activer les options avancées de l'analyse de Fourier, demander un affichage du spectre sur l'intervalle « 0 à Fe », puis cliquer sur calcul. Commenter.

  Appel professeur pour constater.



- Remarques :
  - ↳ L'amplitude du signal à acquérir ne doit pas sortir de la gamme – 10 V / + 10 V acceptée par l'entrée EA0 de Latis sous peine d'un écrêtage lors de la numérisation. Quel effet cet écrêtage aurait-il sur le spectre calculé lors de l'analyse de Fourier ?
  - ↳ Les 3 paramètres d'acquisition sont évidemment liés les uns aux autres par la relation : $\Delta t = N \times T_e$. Il vous suffit d'entrer deux de ces paramètres et Latis calcule automatiquement le 3ème.

    Exemple : vous choisissez $N = 4000$ et $T_e = 250$ µs ; Latis fixe automatiquement $\Delta t = 1{,}00$ s.
  - ↳ En pratique, lors d'une étude expérimentale, on choisit plutôt T_e et Δt et Latis fixe automatiquement N. Dans ce TP, nous imposerons plutôt N et T_e.

B- Rôle de la fréquence d'échantillonnage : critère de Shannon ; phénomène de repliement de spectre.

Reprendre le travail précédent pour toutes les acquisitions proposées dans le tableau page suivante.

- ↳ Pour chaque acquisition proposée, imposer le nombre de points et le pas d'échantillonnage, et noter dans le tableau la valeur de la durée totale d'acquisition Δt calculée par Latis.
- ↳ A l'aide de votre calculatrice, déterminer dans chaque cas la fréquence d'échantillonnage f_e et la grandeur $\delta f = 1/\Delta t$ et les indiquer dans le tableau.
- ↳ Cette série d'expérience correspond à des acquisitions sur des durées totales Δt toutes du même ordre de grandeur, mais avec des fréquences d'échantillonnage variables. En analysant les résultats obtenus, *retrouver le critère de Shannon et expliquer le terme de « repliement de spectre »* associé au spectre d'un signal sous-échantillonné. Conclure sur le rôle de la fréquence d'échantillonnage dans l'analyse de Fourier d'un signal numérique.

  En fin d'étude, rendre compte oralement.

Acquisition n°		1	2	3	(3bis)	4	5	6
Signal étudié	Forme	SINUSOÏDE				CRENEAUX **		
	Fréquence f	196 Hz (T ≈ 5,10 ms)				196 Hz		
Paramètres de l'acquisition	Nombre N de points d'acquisit° *	4000	2040	1020	1020	4000	4000	1020
	Pas d'échantillonnage T_e	**250 µs**	**2 ms**	**3 ms**	**4 ms**	**250 µs**	**1 ms**	**3 ms**
	Durée totale d'acquisition Δt							
Grandeurs associées	**Fréquence d'échantillonnage f_e**							
	$\delta f = 1/\Delta t$							
Paramètres avancés lors du calcul de la FFT		Laisser tous les paramètres par défaut. Pour la plage d'affichage de la FFT (« Résultat sur »), on testera les modes Auto (on n'hésitera pas à zoomer sur le pic) et « 0 à Fe ».						

* Les valeurs choisies ici pour N sont des valeurs légèrement inférieures à des puissances de 2 ($4000 < 4096 = 2^{12}$; $2040 < 2048 = 2^{11}$; $1020 < 1024 = 2^{10}$) afin de pouvoir interpréter simplement la FFT mais il s'agit d'un détail technique sans importance pour nous. **Vérifiez juste que Latis ne modifie pas trop la valeur de N que vous avez entrée : il ne faut pas que N dépasse la puissance de 2 indiquée ci-dessus**.

** On rappelle que le développement de Fourier d'un signal en créneaux d'amplitude E s'écrit : $V(t) = \dfrac{4E}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\dfrac{\sin\left((2p+1)\omega t\right)}{2p+1}$

C- Rôle de la durée d'acquisition : résolution spectrale de la FFT.

Reprendre le travail précédent pour les acquisitions proposées dans le tableau ci-dessous en vous intéressant désormais à la *résolution spectrale de la FFT* et *à l'incertitude sur la mesure de fréquence* effectuée à partir de cette FFT.

↳ Cette série d'expérience correspond à des acquisitions sur des durées totales Δt variables, avec des fréquences d'échantillonnage égales. En analysant les résultats obtenus et en vous reportant aux propriétés 1 et 2 de la FFT (annexe 2), conclure sur le *rôle de la durée d'acquisition* dans l'analyse de Fourier d'un signal numérique.

↳ L'acquisition n°7 correspond aux mêmes paramètres que la n°4 mais il faut la refaire pour analyser plus en détails les aspects résolution / incertitude.

↳ Si on a le temps, pour chaque jeu de paramètres d'acquisition, on refera l'acquisition deux ou trois fois d'affilée afin de déterminer si la FFT donne quelque chose de « robuste » ou non. Pour cela, il suffit d'appuyer sur F10 : cela relance une acquisition puis le calcul de la FFT est automatiquement refait.

En fin d'étude, rendre compte oralement.

Acquisition n°		7	8	9
Signal étudié	Forme	CRENEAUX		
	Fréquence f	196 Hz		
Paramètres de l'acquisition	Nombre de points N d'acquisition *	4000	1020	60
	Pas d'échantillonnage T_e	250 µs	250 µs	250 µs
	Durée totale d'acquisition Δt			
Grandeurs associées	Fréquence d'échantillonnage f_e			
	$\delta f = 1/\Delta t$			
	Nombre de périodes T acquises			
Paramètres avancés lors du calcul de la FFT		Idem § 4		

* Même consigne que précédemment sur le choix de N ($60 < 64 = 2^6$).

D- S'il reste du temps - Rôle de la fenêtre de calcul de la FFT et des « fenêtres de pondération ».

- Relancer l'acquisition n°7, qui est optimale, puis modifier les paramètres avancés de la FFT en changeant la « sélection des périodes » de « automatique » à « manuelle » ; choisir alors un intervalle de calcul de la FFT approximativement égal à la durée totale du signal acquis mais dont les instants de début et de fin sont choisis au hasard ; sans relancer l'acquisition, relancer alors le calcul de la FFT en cliquant sur « nouvelle courbe » (pour conserver la version optimale précédente et pouvoir la comparer au nouveau calcul).

  ↳ Comment le spectre est-il modifié ? Proposer une explication.

  ↳ Le choix de la fenêtre de calcul de la FFT est-il un facteur important ?

- Lors de l'acquisition d'un signal complexe, même la sélection automatique des périodes peut conduire à un bruit spectral excessif. Afin de corriger cet effet, les logiciels de FFT proposent d'ajouter des « fenêtres de pondération » avant d'appliquer la FFT.

  ↳ Sans modifier votre sélection des périodes, changer maintenant la « fenêtre de pondération » de « aucune » à « Haming » ; relancer de nouveau la FFT en cliquant sur « nouvelle courbe ».

  ↳ Comment le spectre est-il modifié ? En quoi consiste à votre avis cette fenêtre de pondération ?

  ↳ S'il reste du temps, on pourra tester rapidement l'effet des autres fenêtres.

En fin d'étude, rendre compte oralement.

III- Analyse spectrale à l'oscilloscope numérique (30 min)

Il est possible d'obtenir la FFT d'un signal mesuré à l'oscilloscope numérique, directement sur l'écran de l'appareil.

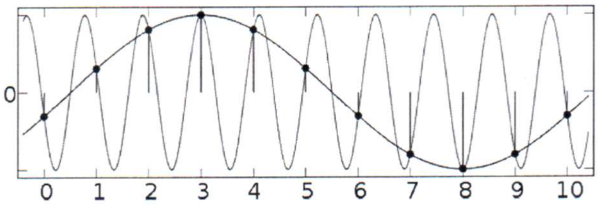
↳ En utilisant la notice fournie dans l'annexe 3, effectuer la FFT d'un créneau de fréquence 196 Hz ; à l'aide des **curseurs**, mesurer avec le plus de précision possible les fréquences et les amplitudes des « pics » observés et comparer à la théorie.

Rendre compte oralement.

↳ Repliement de spectre : effectuer la FFT d'une sinusoïde (puis d'un créneau) de fréquence 196 Hz. Puis sans modifier l'échelle temporelle (et sans modifier la plage et la fréquence centrale de l'analyse spectrale) augmenter la fréquence du signal à observer. A quelle fréquence observe-t-on un repliement de spectre ?

↳ Résolution : revenir à un spectre correct du créneau puis diminuer le nombre de périodes visibles à l'écran (échelle temporelle) tout en modifiant les paramètres « plage » et « fréquence centrale » de la FFT pour maintenir l'échelle du spectre inchangée. Observer et évaluer l'élargissement des pics.

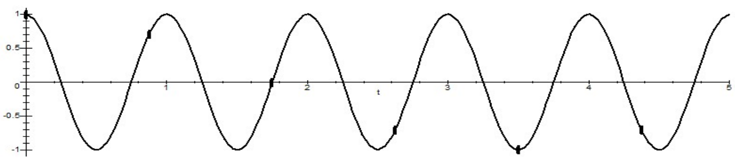
Annexe 1

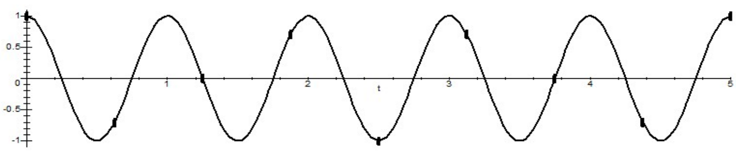


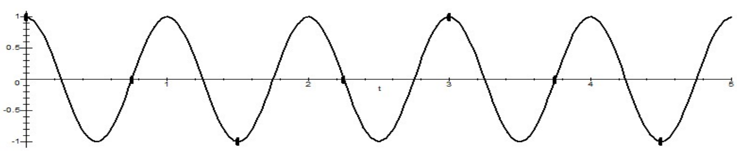
1. Sur la figure ci-dessus, supposons que le signal en trait épais soit le signal $s(t)$ étudié et les points les échantillons associés à la numérisation. Notons f la fréquence de ce signal et f_e la fréquence d'échantillonnage.
   * Déterminer le rapport f_e/f puis la fréquence f_{app} du signal en traits fins en fonction de f.
   * Lorsqu'on effectue la FFT d'un signal sinusoïdal de fréquence f comme le signal s et qu'on affiche le spectre dans l'intervalle de fréquences $[0\ ;f_e]$, on observe systématiquement deux pics fréquentiels, l'un à f, l'autre à $f_e - f$: commenter.
   * Que verra-t-on à votre avis si l'on affiche le spectre sur une plage de fréquence encore plus élevée ?

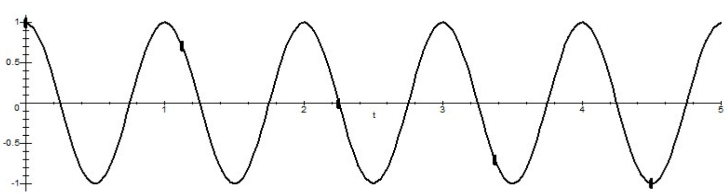
2. Sur la figure ci-dessus, supposons que le signal $s(t)$ étudié soit maintenant le signal en traits fins et les points les échantillons associés à la numérisation.
   * Déterminer à nouveau le rapport f_e/f puis la fréquence f_{app} du signal en traits pleins en fonction de f.
   * Que va-t-on à votre avis observer lorsqu'on effectue la FFT du signal s ?
   * A quelle condition sur le rapport f_e/f la FFT sera-t-elle satisfaisante ?

3. Sur chaque figure ci-dessous, on a représenté un même signal sinusoïdal $s(t)$ de fréquence f, avec un échantillonnage associé à une fréquence f_e variable d'une figure à l'autre. Dans chaque cas, on demande de :
   * Déterminer le rapport f_e/f.
   * Dessiner un signal sinusoïdal s_{app} plus basse fréquence que s, compatible avec les échantillons.
   * Vérifier que la fréquence f_{app} de ce signal vaut $f_e - f$ lorsque $f_e/2 < f < f_e$, puis $f - f_e$ lorsque $f_e < f$.









Annexe 2 : Propriétés de la FFT

La FFT consiste en un calcul **approché** du spectre du signal, basé sur un algorithme ayant été optimisé pour obtenir un résultat **rapide**, là où un calcul rigoureux serait trop coûteux en temps.

- **Propriété n°1 :** ♥♥♥

> La TF n'est pas calculée pour toute valeur de fréquence mais uniquement pour des **valeurs discrètes de la fréquence**, de la forme :
> $f = k \times \delta f$ avec $k \in [\ 0\ ;\ N\text{-}1\ ]$ et $\delta f = f_e/N = 1/\Delta t$
> **soit un spectre limité à $f \in [\ 0\ ;\ f_e\ [$ avec une résolution limitée à :**
> **$\delta f = f_e/N = 1/\Delta t$.**

Conséquences : $\begin{cases} N \text{ est le nombre de points total d'acquisition} \\ f_e \text{ est la fréquence d'échantillonnage du signal,} \\ \Delta t = N \times T_e = N / f_e \text{ est la durée totale d'acquisition} \end{cases}$

- On observe un spectre discret, comme pour une décomposition en série de Fourier, alors qu'il s'agit bien d'un calcul approché de la transformée de Fourier.
- Une bonne **résolution du spectre**, i.e. une détermination précise des pics de fréquence présents dans le spectre, nécessite un pas fréquentiel δf le plus faible possible, donc une durée d'acquisition **Δt la plus grande possible**.
- On n'a pas accès aux fréquences supérieures à f_e : c'est logique puisque la durée T_e d'échantillonnage élimine toutes les variations temporelles de fréquence supérieur à f_e ; on a même intérêt à se limiter à **$f \in [\ 0\ ;\ f_e/2]$** afin de respecter le **critère de Shannon** et éviter les fréquences fantômes.

- **Propriété n°2 :** (*moins important*)

> En théorie, le calcul de la TF d'un signal nécessite de connaître la valeur de ce signal de $t = -\infty$ à $+\infty$. Le signal n'étant acquis que sur une durée finie Δt, il est traité par le logiciel comme s'il était **périodique de période Δt** (*).

Conséquence :

Cette périodisation risque d'introduire artificiellement des petites discontinuités dans le signal analysé, donc des **fréquences « parasites » dans le spectre** : on observe alors un « bruit » de fond dans le spectre obtenu.

Les options de « sélection des périodes », manuelle ou automatique, ainsi que les « **fenêtres de pondération** » sont des options avancées qui permettent parfois d'éviter ces fréquences parasites ou d'en minimiser les effets.

(*) Cette périodisation du signal fait apparaître $\delta f = 1/\Delta t$ comme une fréquence « fondamentale » artificiellement associée au signal et explique que le calcul du spectre sur les fréquences $f = k \times \delta f$ soit particulièrement simple et rapide.

- **Propriété n°3 :** (*vraiment pas important, pour information*)

> Pour que l'algorithme tourne, le signal traité doit être échantillonné avec un **nombre total *N* de points égal à une puissance de 2** (valeurs usuelles : de $128 = 2^7$ à $16384 = 2^{14}$).

Conséquence :

Si l'acquisition est effectuée sur un nombre N d'échantillons qui n'est pas une puissance de 2 (ou si seule une partie du signal est sélectionnée pour la FFT et que le nombre N d'échantillons sélectionnés n'est pas une puissance de 2), le logiciel **recalcule le signal à traiter par interpolation,** avec un nombre de points N' égal à la puissance de 2 immédiatement supérieure à N. La fréquence d'échantillonnage effective devient donc $f_e' = N' / \Delta t$ au lieu de $N / \Delta t$ (**).

(**) Ce n'est pas grave en soi mais si, comme dans ce TP, on veut analyser des spectres en connaissant la valeur exacte de la fréquence d'échantillonnage, cette propriété impose de *choisir des puissances de 2 pour N*. Pourquoi alors avoir choisi des valeurs *légèrement inférieures à des puissances de 2* ? Parce que quand on entre dans Latis les valeurs de N (par exemple 16384) et T_e, le logiciel peut être amené à modifier légèrement ces valeurs (en imposant par exemple $N = 16400$) et N peut alors dépasser la puissance de 2 souhaitée ; par la suite, sans que cela apparaisse, la FFT est calculée sur un nombre de points N' égal à la première puissance de 2 supérieure à N (ici 32768 au lieu des 16384 attendus), ce qui fausse les interprétations. En choisissant N légèrement inférieur à une puissance de 2, nous sommes ainsi certains d'avoir un nombre de points de calcul N' de la FFT quasi égal à N.

Annexe 3 :
Analyse spectrale à l'oscilloscope numérique (Keysight)

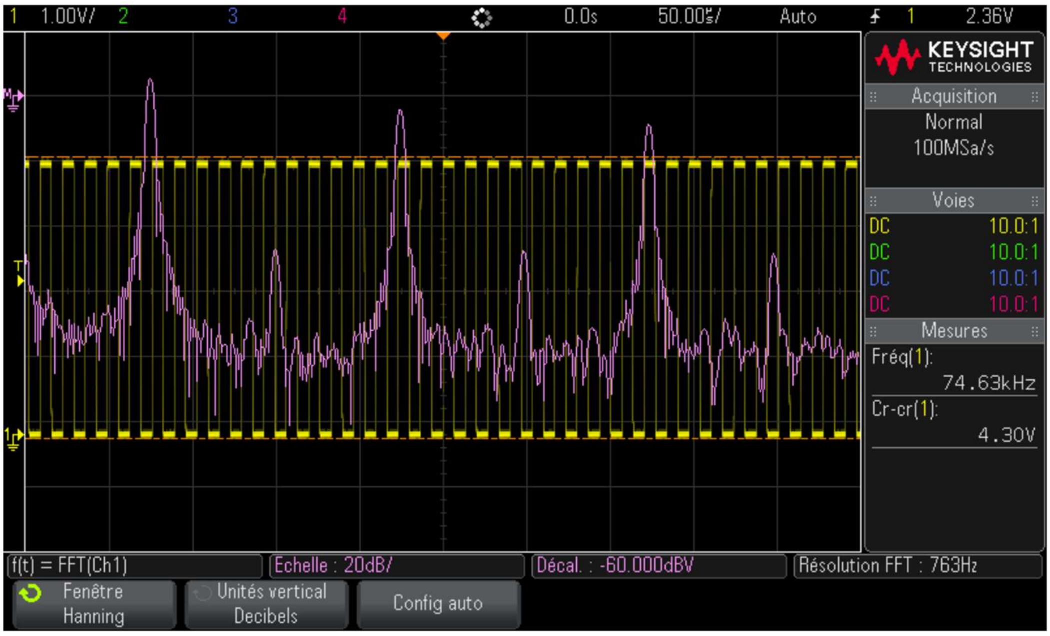
Vous pouvez obtenir et analyser la FFT d'un signal mesuré à l'oscilloscope numérique de la façon suivante :

- Sélectionnez la voie associée au signal étudié (et, le cas échéant, supprimez l'affichage de l'autre voie).
- Choisissez la base de temps de façon à afficher à l'écran la durée totale Δt sur laquelle vous souhaitez effectuer la FFT.
  - ➢ La FFT est systématiquement effectuée sur la durée affichée à l'écran : on ne peut pas simultanément observer 3 périodes du signal et effectuer la FFT sur 100 périodes.
- Appuyez sur la touche **Math**, puis sur la touche de fonction **Fonction** et sélectionnez **f(t)**. Appuyez sur la touche de fonction **Opérateur** et sélectionnez **FFT.** LA FFT apparaît alors à l'écran, au bas duquel on lit les indications suivantes :

  - ➢ Source 1 : sélectionne la source de la fonction FFT.
  - ➢ Plage : définit la largeur totale du spectre FFT que vous observez à l'écran (de gauche à droite). Il est possible de régler la bande d'analyse au-delà de la fréquence maximale disponible, auquel cas le spectre ne sera pas totalement affiché à l'écran.
  - ➢ Centre : définit la fréquence du spectre FFT représentée par le trait central de la ligne de grille de l'écran. Il est possible de régler cette fréquence centrale sur des valeurs inférieures à la moitié de la bande d'analyse ou supérieures à la fréquence maximale disponible, auquel cas le spectre affiché n'occupera pas tout l'écran.
  - ➢ Autre FFT — Affiche le Menu Autres param. FFT.

  - ➢ Fenêtre : sélectionne une fenêtre à appliquer à votre signal d'entrée FFT :
    - ▪ Hanning (fenêtre permettant de réaliser des mesures de fréquence précises ou de détecter deux fréquences proches l'une de l'autre).
    - ▪ Som(met) plat (pour réaliser des mesures d'amplitude précises de pics de fréquence.
  - ➢ Unités verticales : permet de sélectionner les unités Décibels $\left(\hat{V}_{dB} = 20\log\left(\left|\hat{V}(f)\right|\right)\right)$ ou V RMS $\left(\hat{V}_{rms} = \left|\hat{V}(f)\right|/\sqrt{2}\right)$ pour l'échelle verticale FFT. Les valeurs de la FFT sont affichées par défaut en **échelle logarithmique**). 0 dBV correspond à l'amplitude d'une sinusoïde de 1 V efficace.
  - ➢ Config auto : règle la bande d'analyse Plage et la fréquence centrale Centre sur des valeurs permettant d'afficher la totalité du spectre disponible à l'écran. La fréquence maximale disponible est égale à $f_e/2$, qui est fonction du réglage de temps par division. La résolution FFT est le quotient de la fréquence d'échantillonnage et du nombre de points FFT (f_e/N). La résolution FFT actuelle est affichée au-dessus des touches de fonction

- Affichage sur l'écran



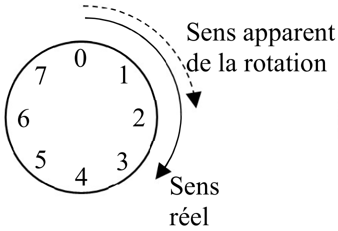
> La fréquence d'échantillonnage f_e ; si elle vaut 100 MHz, par exemple, l'affichage indique : « 100 MSa/s » qui signifie : « échantillonnage = 100.10^6 échantillons par seconde » (Sa = « sample » qui signifie échantillon).

Toutes ces fonctionnalités existent avec tous les oscilloscopes numériques (il faudra chercher où effectuer les réglages sur la notice, si on vous fournit un modèle différent du RIGOL). Afin de vous familiariser avec ces réglages, vous pouvez :

- Tester la façon dont f_e varie lorsque la durée totale d'affichage du signal temporel Δt varie ; vous constaterez que f_e est inversement proportionnelle à Δt, ce qui signifie que la FFT est effectuée sur un nombre fixe de points N et que l'on a donc : $f_e = N/\Delta t$.
- Constater que, quels que soient vos réglages, l'analyse spectrale est limité à l'intervalle $f \in [\ 0\ ; f_e/2[$ et que, même si vous sélectionnez une plage fréquentielle plus large, vous n'obtiendrez aucun affichage au-delà de $f_e/2$.
- Observer le *repliement de spectre* lorsque le signal est mal échantillonné, en alternant entre un affichage en décibels et un affichage linéaire.
- Observez également l'amélioration de la *résolution en fréquence* de la FFT à mesure que Δt augmente ; ceci est conforme à la propriété n°1 de la FFT : le spectre est calculé pour des valeurs discrètes de fréquences avec un pas $\delta f = f_e/N = 1/\Delta t$.
- « Zoomer » sur certains pics du spectre en modifiant simultanément la sensibilité horizontale du spectre et la fréquence centrale affichée, puis effectuer des mesures de fréquence et d'amplitude.

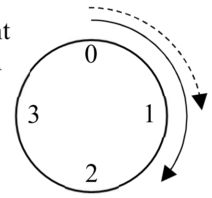
Annexe 4 :
Mouvement apparent du disque tournant

$T_e = T/8$
$f = f_e/8$
$f_e = 8f$



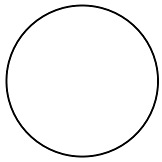
$T_{app} = 8T_e = T$
$f_{app} = f$

$T_e = 2T/8 = T/4$
$f = f_e/4$
$f_e = 4f$



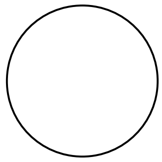
$T_{app} = 4T_e = T$
$f_{app} = f$

$T_e = 3T/8$
$f = 3f_e/8$
$f_e = 8/3\ f = 2{,}67\ f$



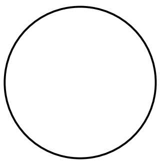
$T_{app} =$
$f_{app} =$

$T_e = T/2$
$f = f_e/2$
$f_e = 2f$



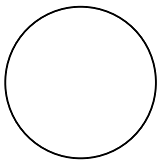
$T_{app} =$
$f_{app} =$

$T_e = 5T/8$
$f = 5f_e/8$
$f_e = 8f/5$



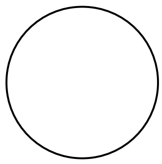
$T_{app} =$
$f_{app} =$

$T_e = 6T/8 = 3T/4$
$f = 3f_e/4$
$f_e = 4f/3 = 1{,}33f$



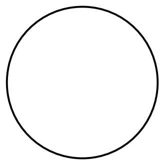
$T_{app} =$
$f_{app} =$

$T_e = 7T/8$
$f = 7f_e/8$
$f_e = 8/7\ f = 1{,}14\ f$



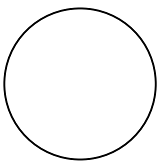
$T_{app} =$
$f_{app} =$

$T_e = T$
$f = f_e$
$f_e = f$



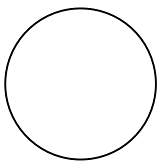
$T_{app} =$
$f_{app} =$

$T_e = 9T/8$
$f = 9f_e/8$
$f_e = 8f/9 = 0{,}89\ f$



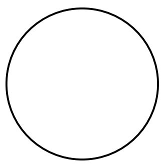
$T_{app} =$
$f_{app} =$

$T_e = 10T/8 = 5T/4$
$f = 5f_e/4$
$f_e = 4f/5 = 0{,}8\ f$



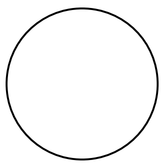
$T_{app} =$
$f_{app} =$

$T_e = 11T/8$
$f = 11f_e/8$
$f_e = 8/11\ f = 0{,}73\ f$



$T_{app} =$
$f_{app} =$

$T_e = 12T/8 = 3T/2$
$f = 3f_e/2$
$f_e = 2/3\ f = 0{,}67\ f$



$T_{app} =$
$f_{app} =$