

Exemples de régimes variables en géométrie planes

I- Durée et portée de la diffusion thermique lors d'un régime transitoire.

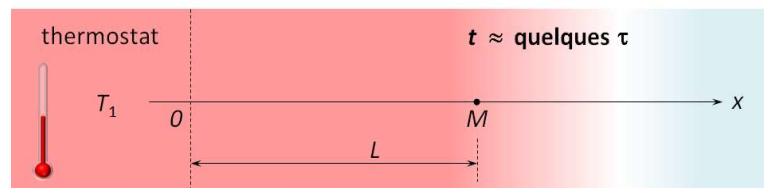
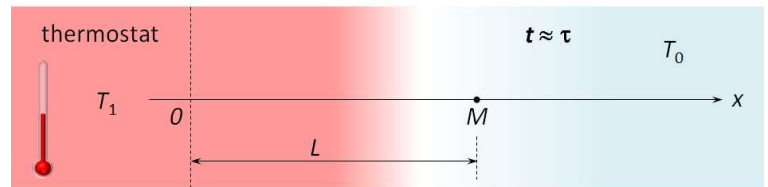
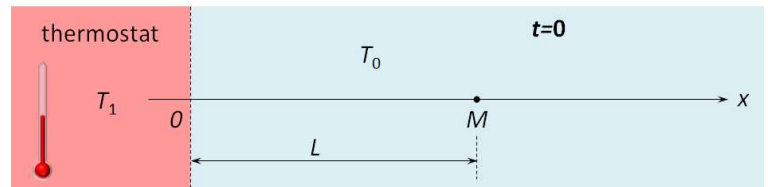
➤ Objectif :

En effectuant un raisonnement en ordres de grandeur à partir de l'équation de diffusion, évaluer rapidement et simplement la **durée typique** τ_{diff} qu'il faut attendre pour observer l'effet de la diffusion thermique sur une **longueur typique** L dans un milieu sans source interne.

➤ Exemple :

Etude de la température en un point M d'un milieu unidimensionnel de température initiale T_0 , mis en contact à $t = 0$ avec un thermostat de température T_1 (figure ci-contre).

La durée τ_{diff} est alors la durée à attendre pour que la température en M , situé à la distance L du thermostat, devienne significativement différente de T_0 , la valeur T_1 étant atteinte au bout de quelques τ_{diff} .



➤ Raisonnement :

- * Dans le cadre d'une diffusion uni-dimensionnelle¹, et en l'absence de source interne, la température en tout point du milieu et à tout instant vérifie l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \Delta T = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad D = \frac{\lambda}{\rho c}$$

- * Que valent, **en ordres de grandeur et au voisinage de $x = L$ et $t = \tau_{diff}$** , les dérivées spatiales et temporelles présentes dans cette équation ? Les évolutions spatiale et temporelle de $T(x,t)$ étant **monotones** et relativement « **douces** », on obtient un bon ordre de grandeur en écrivant² :

$$\left| \frac{\partial T}{\partial t} \right| \approx \frac{T_1 - T_0}{\tau_{diff}} \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial T}{\partial x} \right| \approx \frac{T_1 - T_0}{L} \quad \text{puis} \quad \left| \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right| \approx \frac{T_1 - T_0}{L^2}$$

- * La compatibilité de ces ordres de grandeur avec l'équation de diffusion impose alors :

$$\frac{T_1 - T_0}{\tau_{diff}} \approx D \frac{T_1 - T_0}{L^2} \quad \text{soit, après simplification :} \quad \tau_{diff} \approx \frac{L^2}{D} \quad \text{ou encore} \quad L \approx \sqrt{D \tau_{diff}}.$$

¹ On s'est placé ici en symétrie plane ; une autre symétrie ne change toutefois rien aux ordres de grandeur obtenus.

² On ne se préoccupe pas du signe de ces dérivées : l'équation de diffusion assure que $\partial T / \partial t$ et $\partial^2 T / \partial x^2$ sont de même signe et on se contente donc d'évaluer leurs valeurs absolues pour arriver rapidement au lien entre L et τ .

➤ **Conclusion :**

La **durée typique** d'une **diffusion** thermique sur une longueur L est : $\tau_{\text{diff}} = \frac{L^2}{D}$.

La **portée typique** d'une **diffusion** thermique sur une durée τ est : $L_{\text{diff}} = \sqrt{D\tau}$.

Ainsi, l'**intensité** de la diffusion thermique dépend de la **conductivité thermique** λ du milieu mais la **durée**

et la **portée** de la diffusion dépendent de sa **diffusivité thermique** $D = \frac{\lambda}{\rho c}$

➤ **Comparaison avec un transfert convectif :**

Les relations $\tau_{\text{diff}} = \frac{L^2}{D}$ et $L_{\text{diff}} = \sqrt{D\tau}$ se généralisent à tout phénomène physique de diffusion, c'est-

à-dire à tout phénomène piloté par une équation de la forme $\frac{\partial f}{\partial t} = D \Delta f$ comme par exemple la diffusion de particules (la fonction f est alors la densité particulaire et D l'analogie de la diffusivité thermique relativement à la diffusion des particules).

A contrario, un transfert thermique **convectif** sur une distance L se fait sur une durée typique $\tau_{\text{conv}} = \frac{L}{v}$

où v est la vitesse typique de l'écoulement ; idem pour un phénomène **propagatif** à la vitesse v . La

comparaison de $\tau_{\text{diff}} = \frac{L^2}{D}$ et $\tau_{\text{conv}} = \frac{L}{v}$ montre clairement que :

Contrairement à un transport convectif ou propagatif où la durée typique augmente linéairement avec la distance L , la durée typique de diffusion augmente comme L^2 : le transport par **diffusion** n'est donc **efficace qu'à « courte distance »**³.

Par exemple, pour un solide de diffusivité thermique $D = 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, la diffusion thermique sur 1 cm prend 1 s, alors que sur 1 m elle prend 10^4 s soit environ 3 h !! Un transfert convectif prenant 1 s sur 1 cm ($v = 1 \text{ cm/s}$) ne prendrait que 100 s, soit 1 min 40 s, sur 1 m.

➤ **Généralisation de l'analyse en ordre de grandeur d'une équation différentielle spatio-temporelle :**

En généralisant, on peut dire que dans une équation différentielle portant sur une fonction f de deux variables x et t , donnant lieu à des solutions monotones et suffisamment « douces », les dérivées spatiales et temporelles peuvent être évaluées grossièrement à partir de la taille typique L et de la durée typique τ mises en jeu dans le problème, ainsi que de l'intervalle typique de variation de f ; on peut alors exploiter l'équation différentielle pour relier, en ordres de grandeur, L et τ ⁴.

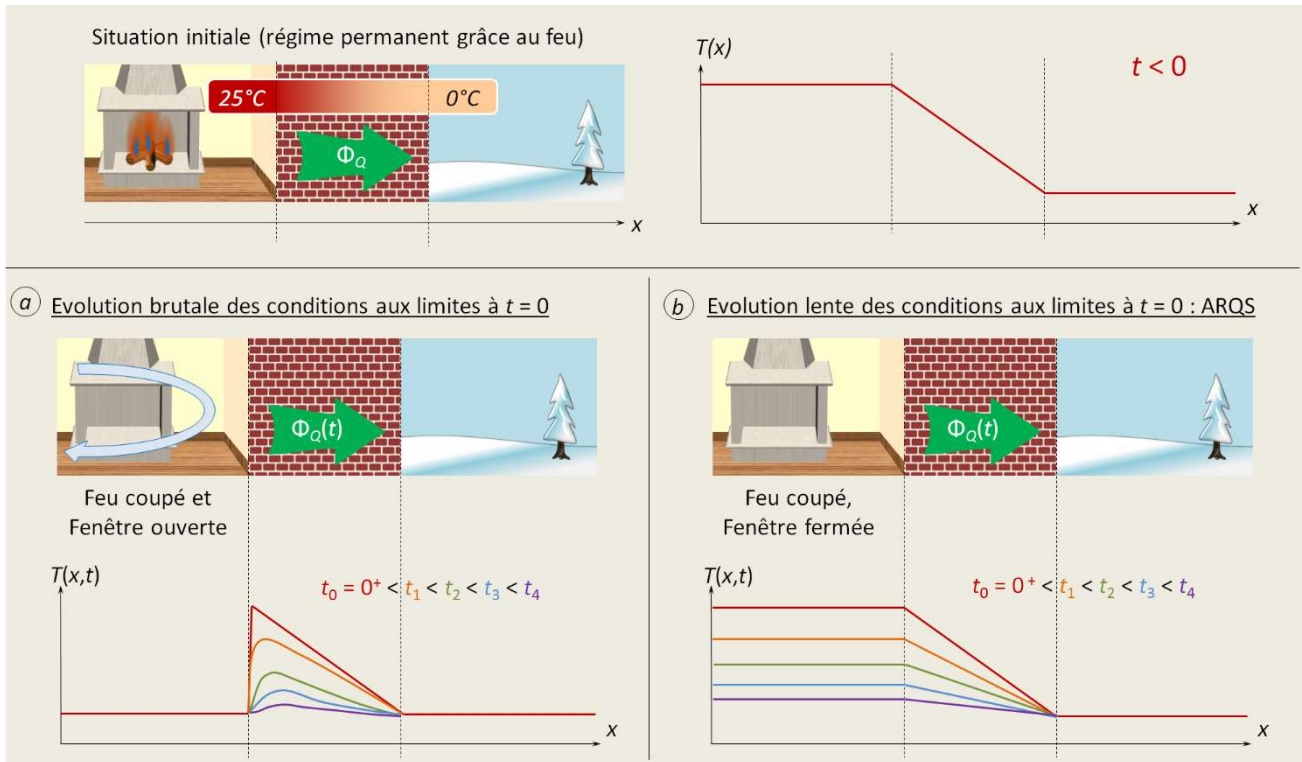
³ Cette différence d'efficacité entre diffusion et convection / propagation pourrait expliquer que le cerveau humain communique avec l'ensemble du corps par propagation d'influx nerveux (« efficace à grande distance » i.e. des pieds à la tête), alors que les neurones du cerveau communiquent entre eux par diffusion de neurotransmetteurs au niveau des synapses (« efficace à très courte distance », i.e. à l'échelle de la synapse) ...

⁴ Par exemple, le même raisonnement réalisé à partir de l'équation de d'Alembert fournit, pour une onde monochromatique $f(x,t)$, le lien entre la période T et la longueur d'onde λ . En effet, par définition, f et ses dérivées varient de façon monotone de f_{\min} à f_{\max} sur la durée $T/2$ et sur la longueur $\lambda/2$; on a donc :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{avec :} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \approx \frac{f_{\max} - f_{\min}}{(T/2)^2} \quad \text{et :} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{f_{\max} - f_{\min}}{(\lambda/2)^2}$$

II- A.R.Q.S. thermique.

A- Exemple introductif :



B- Définition de l'ARQS thermique :

C- Condition validité de l'ARQS thermique :

$$d'où : \frac{1}{c^2} \frac{f_{\max} - f_{\min}}{T^2/4} \approx \frac{f_{\max} - f_{\min}}{\lambda^2/4} \quad \text{soit, après simplification : } \boxed{\lambda \approx cT}$$

Quel est l'intérêt de cette étude ? De montrer, sans avoir besoin de chercher explicitement les solutions $f(x,t)$, que le terme c de l'équation représente la vitesse de propagation !

Attention : dans un problème où un point M se trouve à une distance L d'une source monochromatique, on ne peut pas montrer que l'onde arrive en M au bout d'une durée $\tau = L/c$ en faisant la même analyse que pour la diffusion, c'est-à-dire en évaluant : $\partial^2 f / \partial t^2 \approx (f_{\max} - f_{\min}) / \tau^2$ et $\partial^2 f / \partial x^2 \approx (f_{\max} - f_{\min}) / L^2$. En effet, bien que l'onde se propage de $x = 0$ à L entre $t = 0$ et τ , la fonction f ne varie pas de façon monotone entre $x = 0$ et L et $t = 0$ et τ ; sur ces intervalles-là f oscille, et ce sont donc T et λ qui doivent être utilisés pour évaluer correctement les dérivées ! A méditer...

D- Intérêt de l'ARQS thermique :

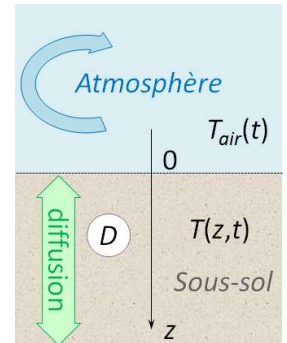
E- Equation de diffusion dans l'ARQS :

F- Exemple d'application :

III- Diffusion thermique en régime sinusoïdal forcé. « Onde thermique ».

A- Exemple de référence : température du sous-sol.

On s'intéresse à une situation modèle où l'espace est rapporté à un repère (Oxyz) dont l'axe (Oz) est confondu avec la verticale **descendante** et le plan $z = 0$ avec la surface du sol (figure ci-contre).



- Le demi-espace $z < 0$ modélise l'atmosphère, dont la température $T_{\text{air}}(t)$ est supposée uniforme et variable au cours du temps, sous forme d'oscillations périodiques de pulsation ω .
 - ↳ Cette oscillation peut modéliser les variations ayant lieu sur une journée, du fait de **l'alternance jour-nuit**, auquel cas $\omega = \frac{2\pi}{1 \text{ jour}} = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$;
 - ↳ Si l'on considère les températures mises en jeu comme des températures moyennes sur une journée, l'oscillation peut modéliser les variations ayant lieu sur une année, du fait de **l'alternance des saisons**, auquel cas $\omega = \frac{2\pi}{1 \text{ an}} = 2,0 \cdot 10^{-7} \text{ rad.s}^{-1}$.
- Le demi-espace $z > 0$ modélise le sous-sol, dont la température $T(z, t)$ dépend uniquement de la profondeur z et du temps ; les variations temporelles de T sont dues à celles de T_{air} et à la diffusion thermique de la surface vers le sous-sol, dont la diffusivité thermique est notée D et est $\approx 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. On néglige toute discontinuité de température due à la conducto-convection à la surface du sol.

L'objectif de l'étude est de déterminer le champ de température $T(z, t)$ et de comprendre comment les oscillations de température de la surface se répercutent en profondeur.

B- Approche semi-qualitative du problème.

Sans calculer le champ de température $T(z, t)$ mais en utilisant les résultats du § 1 ci-dessus, montrer qu'il existe une profondeur critique au-delà de laquelle la température ne varie quasiment pas au cours du temps, malgré les oscillations périodiques existant à la surface.

C- Propriétés du champ de température.

Le champ de température recherché $T(z,t)$ doit vérifier les propriétés suivantes :

- Il est solution de l'équation de diffusion : $\frac{\partial T}{\partial t} = D \Delta T = D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad \forall t \quad \forall z \geq 0$
- Il est continu en $z = 0$: $T(z=0,t) = T_{\text{air}}(t) \quad \forall t$
- Il ne diverge pas lorsque $z \rightarrow \infty$

D- Modélisation par une oscillation sinusoïdale en surface et un régime sinusoïdal forcé.

Commençons par un modèle simple dans lequel la température de **l'air oscille sinusoïdalement** autour d'une température moyenne T_0 : $T_{\text{air}}(t) = T_0 + \theta_1 \sin(\omega t)$

Afin de satisfaire la condition limite : $T(z=0,t) = T_{\text{air}}(t) \quad \forall t$, et compte tenu de la linéarité de l'équation de diffusion, on est conduit à chercher une solution $T(z,t)$ elle-même sinusoïdale de pulsation ω autour d'une température moyenne $\bar{T}(z)$, toutes les grandeurs (valeur moyenne, amplitude et phase) étant a priori fonction de la profondeur ; on pose donc ⁵ : $T(z,t) = \bar{T}(z) + \theta_1(z,t)$ avec $\theta_1(z,t) = a_1(z) \sin(\omega t + \varphi_1(z))$

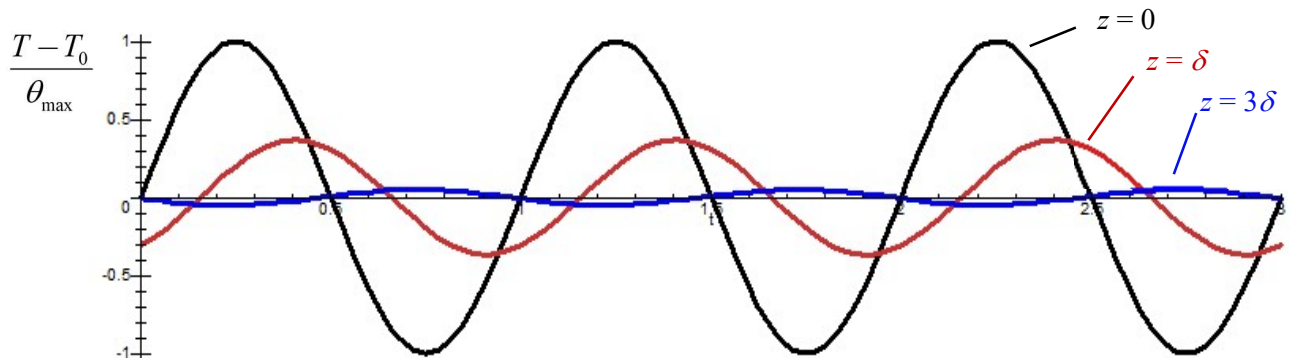
Il faut alors injecter cette expression dans l'équation de diffusion afin de montrer qu'elle en est bien solution, et de déterminer les fonctions inconnues : $\bar{T}(z)$, $a_1(z)$ et $\varphi_1(z)$; ou mieux : imposer séparément à $\bar{T}(z)$ et $\theta_1(z,t)$ de vérifier l'équation de diffusion ⁶ :

⁵ Ce régime peut être qualifié de **sinusoïdal forcé** ou de **permanent sinusoïdal** (RPS). Il n'est pas instantanément observé si on imagine une situation initiale où la température serait uniforme dans l'air et dans le sous-sol, et à partir de laquelle les oscillations de T_{air} commenceraient à se produire : en effet, on observerait dans ce cas un régime transitoire compliqué avant d'atteindre ce RPS. Toutefois ce type de régime transitoire n'a pas d'intérêt dans le cadre d'une étude de la température du sol sous l'effet de l'alternance jour-nuit ou de l'alternance des saisons !

⁶ Si à $\bar{T}(z)$ et $\theta_1(z,t)$ vérifient séparément l'équation de diffusion qui est linéaire, leur somme aussi ; réciproquement, une fonction constante et une fonction sinusoïdale formant une famille libre, si leur somme vérifie une équation différentielle linéaire *et homogène*, chacune des deux fonctions doit vérifier cette équation.

Ainsi : $T(z,t) = T_0 + \theta_1 e^{-z/\delta(\omega)} \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta(\omega)}\right)$ avec : $\delta(\omega) = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$

Représentation de $T(z \text{ fixé}, t)$ à différentes profondeurs z :



Commentaires :

Les oscillations de température de surface se répercutent en profondeur dans le sous-sol, avec :

- une amplitude qui **s'atténue** exponentiellement à mesure que l'on descend en profondeur,
- et un **retard** (un déphasage) qui croît à mesure que l'on descend en profondeur.

Ce retard peut donner l'impression d'un phénomène propagatif et c'est pourquoi on parle parfois d'**onde thermique** mais il s'agit bien d'un phénomène purement diffusif et non propagatif !

$\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$ représente la **profondeur de pénétration** des oscillations de température dans le sous-sol et est d'autant plus faible que ces oscillations sont rapides ⁷. Cette propriété peut être qualifiée d'**effet de peau thermique** ! ⁸

A ω fixée, δ est logiquement d'autant plus faible que D est faible, c'est-à-dire que les transferts thermiques sont lents.

Ces résultats se généralisent à tous les matériaux.

Applications numériques (avec $D \approx 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$) :

- Dans le cas de l'**alternance jour-nuit**, $\omega = 7,3.10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$, d'où : **$\delta = 17 \text{ cm}$** .
Et dans le cas de l'**alternance des saisons**, $\omega = 2,0.10^{-7} \text{ rad.s}^{-1}$, d'où : **$\delta = 3,2 \text{ m}$** .

Conclusion : La température d'une cave creusée à une profondeur moyenne de 3 m ne varie absolument pas à l'échelle d'une journée ! En revanche, elle varie d'une saison à l'autre, mais avec une atténuation significative par rapport aux variations observées en surface.

⁷ Lors de l'analyse qualitative effectuée plus haut, on avait prédit une profondeur typique de l'ordre de $\sqrt{\pi D / \omega}$, qui est bien cohérente avec la valeur $\sqrt{2D/\omega}$ obtenue par calcul.

⁸ L'équation de diffusion et la résolution en RPS que nous venons de faire sont totalement analogues à l'équation qui pilote le champ électromagnétique dans un métal et à sa résolution qui conduit à l'effet de peau électromagnétique (cf. 1^{er} TD sur les équations locales de l'électromagnétisme). Cette analogie explique également le recours au terme d'onde thermique, qui renvoie à une onde électromagnétique absorbée au voisinage de la surface d'un métal.

- Si on envisage des oscillations rapides de T_{air} , de fréquence > 1 Hz, on obtient : $\delta < 0,6$ mm.

Conclusion : Aucune variation rapide de la température de surface n'est ressentie en profondeur. On peut dire que la matière possède une importante **inertie thermique**. En généralisant ce résultat, on comprend pourquoi un courant alternatif à 50 Hz produisant de l'effet Joule dans un métal ne produit pas d'oscillations de température à 50 Hz (cf. § II.4).

E- Etude d'une oscillation périodique quelconque ; utilisation de l'analyse de Fourier.

Pour traiter une oscillation périodique de forme quelconque (par exemple triangulaire si l'on suppose que la température croît quasi linéairement le jour et décroît quasi linéairement la nuit), il faut la **décomposer en série de Fourier** puis utiliser les résultats vus lors de l'étude du RPS. En choisissant bien l'origine des temps, on peut

donc écrire ⁹ : $T_{\text{air}}(t) = T_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k \sin(k\omega t)$

et on cherche : $T(z, t) = \bar{T}(z) + \sum_{p=0}^{\infty} a_p(z) \sin(k\omega t + \varphi_p(z))$

L'étude du RPS effectuée précédemment montre alors que :

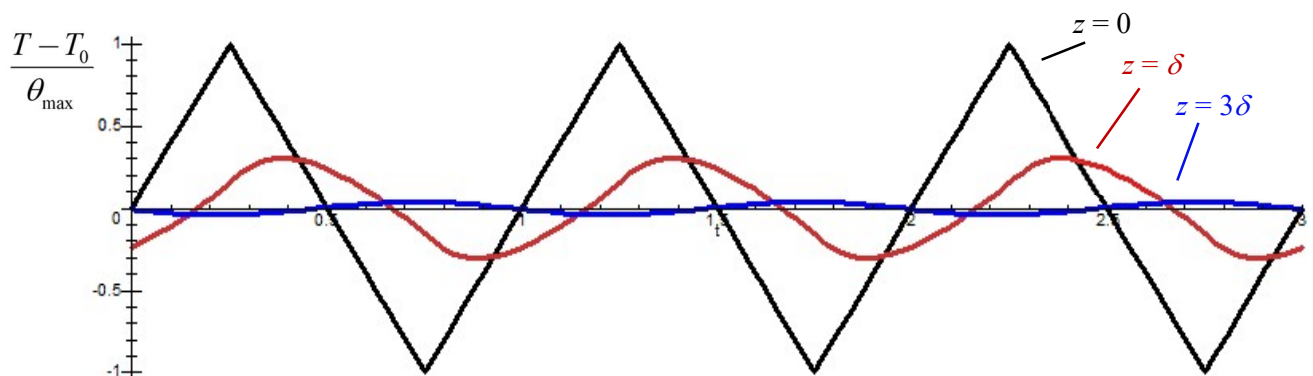
$$T(z, t) = T_0 + \sum_{p=0}^{\infty} \theta_p e^{-\frac{z}{\delta(p\omega)}} \sin\left(p\omega t - \frac{z}{\delta(p\omega)}\right) \quad \text{avec : } \delta(p\omega) = \sqrt{\frac{2D}{p\omega}} \quad \text{qui diminue quand } k \text{ augmente}$$

Commentaires :

Les oscillations de température de surface se répercutent en profondeur dans le sous-sol, avec :

- une amplitude qui **s'atténue** à mesure que l'on descend en profondeur, puisque chaque composante de Fourier est atténuée exponentiellement ;
- un **retard** (un déphasage) qui croît à mesure que l'on descend en profondeur, puisque chaque composante de Fourier est ainsi déphasée ;
- et une **forme temporelle qui est modifiée** par rapport à celle observée en surface, puisque l'atténuation diffère d'une composante de Fourier à l'autre ¹⁰.

Représentation de $T(z, t)$ à différentes profondeurs z :



⁹ Par exemple, si le signal est triangulaire d'amplitude θ_{max} , on aura : $\left\{ \theta_{2p} = 0 ; \theta_{2p+1} = \frac{8\theta_{\text{max}}}{\pi^2} \frac{(-1)^p}{2p+1} \right\}$

¹⁰ La profondeur de pénétration diminuant avec la fréquence, les composantes les plus rapidement atténuées lorsqu'on descend en profondeur sont celles de plus hautes fréquences : ainsi, la forme des oscillations de température se rapproche d'une pure sinusoïde lorsqu'on descend en profondeur.