

## DS5 - Correction

### Problème 1 : Téléobjectif

1-a- Surface du capteur :  $S=L.\ell=36.24=860 \text{ mm}^2$ .

$$\text{Or } S = N \cdot a^2 \text{ avec } N=10^7 \text{ pixels} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{S}{N}} = 9,3 \mu\text{m}.$$

1-b-  $D \gg f_1'$  On peut estimer que l'objet est à l'infini ; son image se formera donc dans le plan focal image.

Le plan du capteur doit donc coïncider avec ce plan et l'encombrement  $E_1 = f_1' = 50 \text{ mm}$ .

1-c- En valeurs algébriques :

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \cdot \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \overline{AB} \cdot \frac{f_1'}{\overline{OA}} \approx -5,0 \text{ mm}$$

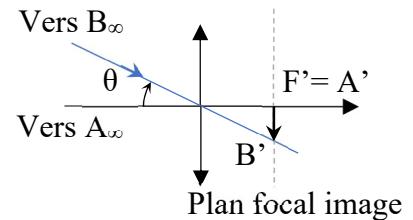
Remarque : ici on aurait pu procéder en deux temps

1- On considère l'objet à l'infini vu sous l'angle  $\theta$  et donc

$$\overline{A'B'} = f_1' \theta$$

2- On détermine le diamètre angulaire  $\theta$  sous lequel est vu la tour AB à une distance D :  $\theta = \frac{\overline{AB}}{-D}$

$$3- \text{ On retrouve } \overline{A'B'} = -f_1' \frac{\overline{AB}}{D}$$



1-d- Si on suppose que le système optique est modifié pour être adapté à la taille du nouveau détecteur

$$\left( \frac{2,4}{10} = \frac{3,6}{15} = 0,24 \right) \text{ Alors la nouvelle taille de la tour sur la photo sera } A''B'' = \frac{\overline{A'B'}}{0,24} = 21 \text{ mm}$$

1-e- Un laveur de carreaux fait environ 2 m. La taille obtenue sur le capteur est :

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \frac{f_1'}{\overline{OA}} = 2 \frac{0,05}{2000} = 50 \mu\text{m} \text{ soit environ 5 pixels : on pourra distinguer sa forme.}$$

2-a-  $A_\infty \xrightarrow{L_1} F'_1 = A' \xrightarrow{L_2} A''$

$$\text{Donc } \overline{O_2A'} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1F'_1} = -31,2 + 50 = 18,8 \text{ mm}$$

A'B' est un **objet virtuel** pour L<sub>2</sub>.

Tracé : voir ci-dessous

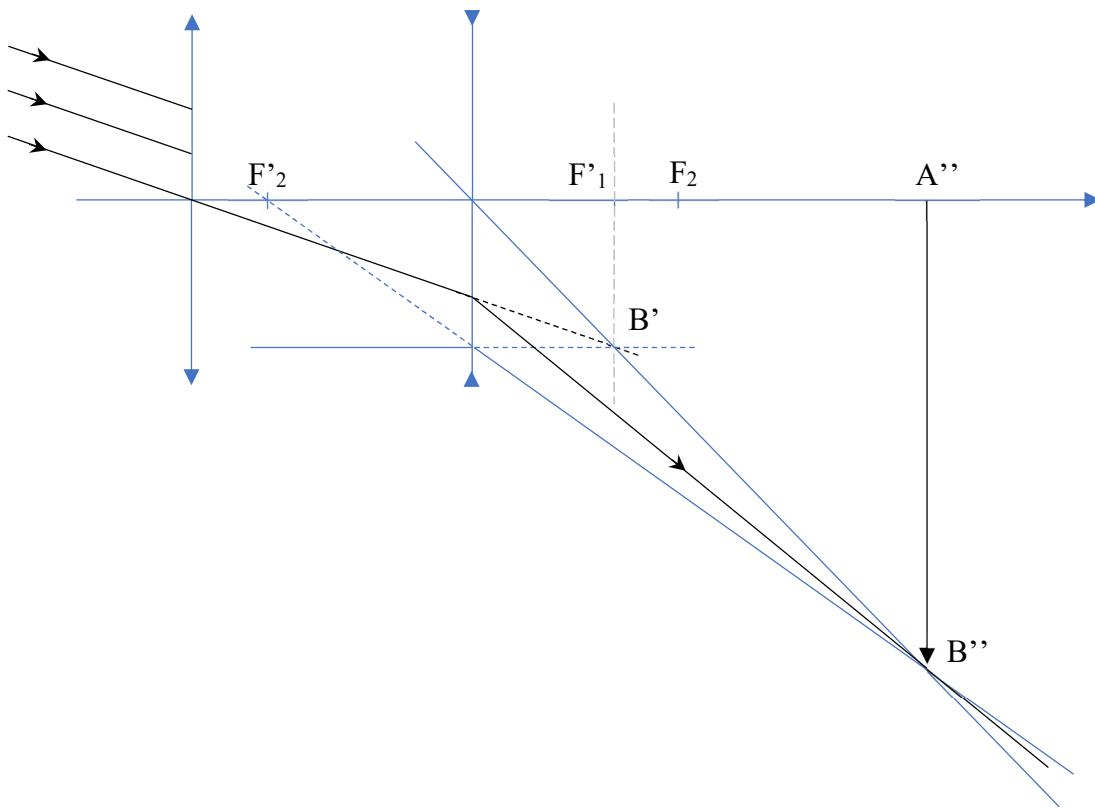
$$2-b- \frac{1}{\overline{O_2A''}} - \frac{1}{\overline{O_2F'_1}} = \frac{1}{f'_2} \quad \boxed{\overline{O_2A''} = \frac{\overline{O_2F'_1}f'_2}{\overline{O_2F'_1} + f'_2} = \frac{18,8 \cdot (-25)}{18,8 - 25} = 75,8 \text{ mm}}$$

$$\boxed{A''B'' = \gamma_2 \overline{A'B'} = \frac{\overline{O_2A''}}{\overline{O_2A'}} \overline{A'B'} = \frac{75,8}{18,8} (-5,0) = -20,2 \text{ mm}}$$

Zoom : x4



2-c- Photo :



$$2-d- \text{Encombrement } |O_1 A''| = 31,2 + 75,8 = 107 \text{ mm}$$

L'encombrement augmente (gros objectif)

3- Reprenons le raisonnement de la remarque de la question 1c- : la focale de la lentille unique équivalente

$$\text{doit vérifier : } \overline{A''B''} = f_3' \theta \quad \text{avec } \theta = \frac{AB}{-D}$$

Soit

$$f_3' = -\frac{\overline{A''B''}}{AB} D = \frac{20,2}{200} 2000 = 202 \text{ mm}$$

L'image se formerait dans le plan focale image de cette lentille et **l'encombrement serait de 202 mm** (pratiquement deux fois plus grand que l'encombrement du téléobjectif, d'où son intérêt)

## Problème 2 : Contrôle non destructif (inspiré de CCS MP)

### A – Expression approchée du champ magnétique créé par la bobine excitatrice dans la plaque

A.1) Le plan contenant  $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$  (plan de la figure) est un plan d'antisymétrie pour la distribution de courants. Donc le champ magnétique est contenu dans ce plan ; ainsi  $B_\theta = 0$ .

De plus, il y a invariance de la distribution de courant sous toute rotation d'axe Oz ; les coordonnées du champ magnétique sont donc indépendantes de la coordonnée  $\theta$

$$\text{Donc : } \boxed{\vec{B}(M, t) = B_r(r, z, t) \vec{e}_r + B_z(r, z, t) \vec{e}_z}$$

A.2) On constate que l'amplitude du champ diminue à cause de la présence de la plaque conductrice. En effet, le champ magnétique ne rentre dans un conducteur que sur une distance  $d$  (effet de peau) : le champ magnétique créé par la bobine crée des courants de Foucault dans la plaque qui induisent un champ magnétique induit opposé aux variations de  $\vec{B}$

Remarque : normalement l'atténuation est d'ailleurs plus forte à 200 Hz qu'à 50 Hz.

A.3)a) Cette question n'est pas extrêmement claire. La zone A est-elle seulement la zone où les spires de la bobine sont en contact avec la plaque. On cherchera alors la valeur de  $B(x = 0, z = \frac{L}{2})$ , on lira alors que

$$\text{le premier graphique de la carte 2 } \boxed{B = 2,7 \text{ mT}}$$

On s'agit-il de la valeur moyenne du champ à l'intérieur de la bobine au niveau de la plaque que l'on peut évaluer 1,5 mT ou que l'on peut calculer en approximant l'évolution de  $|\vec{B}|$  par une évolution parabolique au voisinage de son minimum :

$$B\left(x, z = \frac{L}{2}\right) = \underbrace{\left(B_{\text{surface}} - B_{\text{centre}}\right)}_{2,3 \text{ mT}} \frac{(x - R_b)^2}{R_b^2} + \underbrace{B_{\text{centre}}}_{0,5 \text{ mT}} = \underbrace{\left(B_{\text{surface}} - B_{\text{centre}}\right) \frac{r^2}{R_b^2} + B_{\text{centre}}}_{\text{en coordonnées polaires dans le plan } z = \frac{L}{2}}$$

Cela donne alors

$$\begin{aligned} B_{\text{moy}} &= \frac{1}{\pi R_b^2} \int_0^{R_b} \left( \left( B_{\text{surface}} - B_{\text{centre}} \right) \frac{r^2}{R_b^2} + B_{\text{centre}} \right) 2\pi r dr = \\ &= \frac{2}{R_b^2} \left[ \frac{B_{\text{surface}} - B_{\text{centre}}}{R_b^2} \frac{r^4}{4} + B_{\text{centre}} \frac{r^2}{2} \right]_0^{R_b} \\ &= 2 \left( \left( B_{\text{surface}} - B_{\text{centre}} \right) \frac{1}{4} + \frac{B_{\text{centre}}}{2} \right) \\ &= \frac{B_{\text{surface}} + B_{\text{centre}}}{2} \\ &= \frac{2,7 + 0,5}{2} \\ &= \boxed{1,6 \text{ mT}} \end{aligned}$$

A.3)b)  $\mu_0 \frac{N}{L_b} i_0$  est le champ magnétique créé par un solénoïde infini à l'intérieur. On peut lire cette valeur en

utilisant la carte 1 au centre de la bobine (sans plaque, y a-t-il eu une erreur dans le texte en faisant référence à la carte 2 ; c'était dans le texte de CentraleSupélec)  $B(x = R_b, z = 0) = \mu_0 \frac{N}{L_b} i_0 = 10,8 \text{ mT}$

On obtiendra donc  $\alpha = \frac{2,7}{10,8} = 0,25$  ou  $\alpha = \frac{1,6}{10,8} = 0,15$

## B – Courants de Foucault

B.1) Appliquons la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\oint_{M \in \Gamma} E_\theta(r, z) \vec{e}_\theta \cdot d\vec{l}_M = - \iint_{\substack{P \in \Sigma \\ \text{s'appuyant} \\ \text{sur } \Gamma}} \frac{\partial B_z}{\partial t} \vec{e}_z \cdot d\vec{S}_P \cdot \vec{n}(P)$$

On choisit comme contour le cercle centré sur l'axe de la bobine de rayon  $r$  et orienté dans le sens de  $\vec{e}_\theta$  :

$$2\pi r E_\theta(r, z) = B_0 \omega \sin(\omega t) \cdot \pi r^2$$

$$\vec{E}(r, z) = \frac{r}{2} \omega B_0 \sin(\omega t) \vec{e}_\theta$$

Remarque en dehors de la zone A, en considérant que  $\vec{B} = 0$   $\vec{E}(r, z) = \frac{R_b^2}{2r} \omega B_0 \sin(\omega t) \vec{e}_\theta$

B.2) La loi d'Ohm locale impose :  $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E} = \frac{\gamma_0 \omega B_0}{2} r \sin(\omega t) \vec{e}_\theta$  (dans la zone A)

En dehors de la zone A :  $\vec{j}(r, z) = \gamma_0 \frac{R_b^2}{2r} \omega B_0 \sin(\omega t) \vec{e}_\theta$

## C – Modification de l'impédance de la bobine excitatrice

C.1) Le montage à ALI est un suiveur.

$$i_+ = 0 \text{ donc } v_+ = e(t)$$

L'ALI fonctionne en régime linéaire (rétroaction sur l'entrée inverseuse) :

$$v_+ = v_- = e(t) \text{ et } v_s = v_- = e(t)$$

Par conséquent, la tension  $Y_1(t)$  qui s'applique est  $E=5,00 \text{ V}$  dans l'intervalle de temps représenté sur l'oscilloscopogramme.

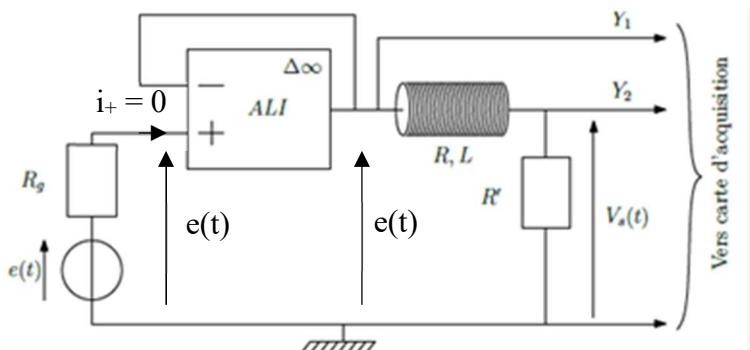
Calculons l'expression de  $Y_2(t)$  :

$$E = (R + R')i + L \frac{di}{dt} = (R + R') \frac{Vs}{R'} + \frac{L}{R'} \frac{dVs}{dt}$$

$$\frac{R'}{L} E = \frac{dVs}{dt} + \underbrace{\frac{R + R'}{L}}_{\frac{1}{\tau}} Vs$$

Sur le graphique on lit :  $\tau = \frac{L}{R + R'} = 78,4 \cdot 10^{-6} \text{ s}$  et  $V_{\infty} = \frac{R'}{R + R'} E = 4,90 \text{ V}$

On en déduit :  $R = R' \left( \frac{E}{V_{\infty}} - 1 \right) = 10,2 \Omega$



$$L = \tau (R + R') = \tau R' \frac{E}{V_{\infty}} = 40,0 \cdot 10^{-3} \text{ H}$$

$$C.2) \text{ La puissance électrique moyenne fournie à la bobine vaudra } \langle P_{\text{elec}} \rangle = (R + \delta R) \frac{I_0^2}{2} = P_{\text{Joule bobine}} + P_{\text{Joule Plaque}}$$

Les pertes Joule dans la bobine ne sont pas modifiées (à amplitude de  $i_0$  constante) et restent égales à  $R \frac{I_0^2}{2} = P_{\text{Joule bobine}}$  et les pertes joules dans la plaque sont positives (effet Joule) donc  $P_{\text{Joule Plaque}} = \delta R \frac{I_0^2}{2} > 0$ .

**Ainsi la partie réelle de l'inductance de la bobine augmente.**

C.3) On constate que la présence de la plaque fait diminuer le champ magnétique, donc fait diminuer

$$l'énergie stockée sous forme magnétique  $E_{\text{m totale}} = \frac{1}{2} L \langle i^2 \rangle$ . Donc **L diminue**.$$

$$C.4) P_j = \iiint_{M \in \mathbb{R}^3} \vec{j}(M) \cdot \vec{E}(M) d\tau_M = \iiint_{M \in \text{Zone A}} \frac{1}{\gamma} \vec{j}(M)^2 d\tau_M \text{ c'est ce que semble suggérer le texte (faudrait-il considérer également les pertes joules hors de la zone A ?)}$$

$$P_j = \int_{r=0}^{R_b} \frac{1}{\gamma_0} \left( \frac{\gamma_0 \omega B_0}{2} r \sin(\omega t) \right)^2 2\pi r d.r = \gamma_0 \left( \frac{\omega B_0}{2} \sin(\omega t) \right)^2 2\pi d \int_{r=0}^{R_b} r^3 d.r = \gamma_0 \pi d \frac{R_b^4 \omega^2 B_0^2}{8} (\sin(\omega t))^2$$

En utilisant l'expression  $B_0$  donnée partie A :

$$P_j = \gamma_0 \pi d \alpha^2 \frac{R_b^4 \omega^2 \mu_0^2 N^2 i_0^2}{8 \ell_b^2} (\sin(\omega t))^2$$

$$\text{On a donc en valeur moyenne : } \langle P_j \rangle = \gamma_0 \pi d \alpha^2 \frac{R_b^4 \omega^2 \mu_0^2 N^2 i_0^2}{8 \ell_b^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \delta R i_0^2$$

$$\text{Ainsi : } \boxed{\delta R = \gamma_0 \pi d \alpha^2 \frac{R_b^4 \omega^2 \mu_0^2 N^2}{8 \ell_b^2}}$$

Remarque si on tient compte des pertes en dehors de la zone A : il faut ajouter

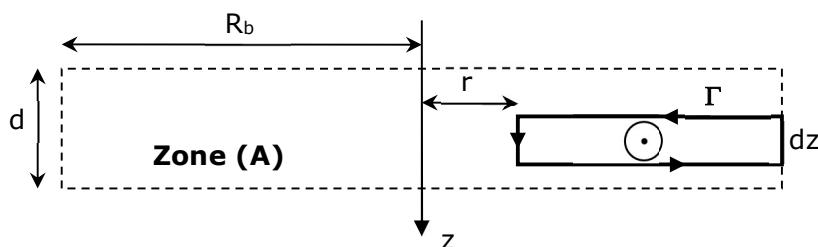
$$P_j = \int_{r=R_b}^{\infty} \frac{1}{\gamma} \left( \gamma_0 \frac{R_b^2}{2r} \omega B_0 \sin(\omega t) \right)^2 2\pi r d.r \text{ qui diverge ... Le problème vient de la plaque}$$

d'aluminium que l'on a supposé infini dans le calcul

$$C.5)a) \text{ Maxwell-Ampère : } \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \underbrace{\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\text{négligeable dans un métal}} = \mu_0 \vec{j} \text{ donne sous forme intégrée :}$$

$$\oint_{P \in \Gamma_f} \vec{B}(P) \overrightarrow{dl_P} = \iint_{M \in \Sigma} \mu_0 \vec{j}(M) dS_M \vec{n}(M)$$

On choisit pour contour un rectangle orienté  $\Gamma$  situé entre les rayons  $r$  et  $R_b$  et entre les cotes  $z$  et  $z + dz$  à l'intérieur de la zone (A) :



$$\oint_{P \in \Gamma_f} \vec{B}(P) d\vec{l}_P = B'(r, z, t) dz = \mu_0 dz \int_{r_M=r}^{R_b} \frac{\gamma_0 \omega B_0}{2} r_M \sin(\omega t) dr = \mu_0 dz \frac{\gamma_0 \omega B_0}{4} (R_b^2 - r^2) \sin(\omega t)$$

$$\text{Ainsi } \boxed{B'(r, z, t) = \mu_0 \frac{\gamma_0 \omega B_0}{4} (R_b^2 - r^2) \sin(\omega t)}$$

Remarque : on trouve que  $B'$  est indépendant de  $z$  ; ce que l'on aurait pu dire dès le départ en utilisant

$$\operatorname{div} B' = \frac{\partial B'_z}{\partial z} = 0$$

On peut remarquer que  $B'$  induit par  $j$  est proportionnel à  $\omega$  : à basse fréquence  $B' \ll B_0$

$$\begin{aligned} \text{C.5)c) } E_m &= \iiint_{P \in \text{Zone A}} \frac{B'^2(P)}{2\mu_0} d\tau_P = \int_{r_p=0}^{R_b} \left( \mu_0 \frac{\gamma_0 \omega B_0}{4} \right)^2 (R_b^2 - r^2)^2 \sin^2(\omega t) \frac{1}{2\mu_0} 2\pi d.r_p dr_p \\ &= \mu_0 \left( \frac{\gamma_0 \omega B_0}{4} \right)^2 \sin^2(\omega t) \frac{1}{2} \pi d \left[ -\frac{(R_b^2 - r^2)^3}{3} \right]_0^{R_b} \\ &\boxed{E_m = \mu_0 \pi d \left( \frac{\gamma_0 \omega B_0}{4} \right)^2 \sin^2(\omega t) \frac{R_b^6}{6}} \end{aligned}$$

$$\text{C.5)d) La relation (I.1) donne } B_0 = \alpha \frac{\mu_0 N i_0}{l_b}$$

$$\text{Ainsi } E_m = \mu_0 \pi d \frac{R_b^6}{6} \left( \frac{\gamma_0 \omega B_0}{4} \right)^2 \sin^2(\omega t) = \mu_0 \pi d \frac{R_b^6}{6} \left( \frac{\gamma_0 \omega}{4} \right)^2 \left( \alpha \frac{\mu_0 N i_0}{l_b} \right)^2 \sin^2(\omega t)$$

$$\langle E_m \rangle = \frac{1}{2} \mu_0 \pi d \frac{R_b^6}{6} \left( \frac{\gamma_0 \omega}{4} \right)^2 \left( \alpha \frac{\mu_0 N i_0}{l_b} \right)^2 i_0^2$$

$$\text{Or } \langle E_m \rangle = \frac{1}{2} \delta L \langle i(t)^2 \rangle = \frac{1}{2} \delta L \frac{i_0^2}{2}$$

$$\text{Ainsi } \boxed{\delta L = \mu_0 \pi d \frac{R_b^6}{3} \left( \frac{\gamma_0 \omega}{4} \right)^2 \left( \alpha \frac{\mu_0 N}{l_b} \right)^2}$$

$$\text{C.6) AN : } \delta R = \gamma_0 \pi d \alpha^2 \frac{R_b^4 \omega^2 \mu_0^2 N^2}{8 l_b^2} = \frac{3.4 \cdot 10^7 \cdot 300^2 \cdot (10^{-6})^2 \cdot 10^6 \cdot 0.3^2 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot (2.5 \cdot 10^{-2})^4}{8 \cdot 10^{-2}} = 26 \text{ m}\Omega$$

$$\boxed{\delta L = \mu_0 \pi d \frac{R_b^6}{3} \left( \frac{\gamma_0 \omega}{4} \right)^2 \left( \alpha \frac{\mu_0 N}{l_b} \right)^2 = 0.13 \text{ mH}}$$

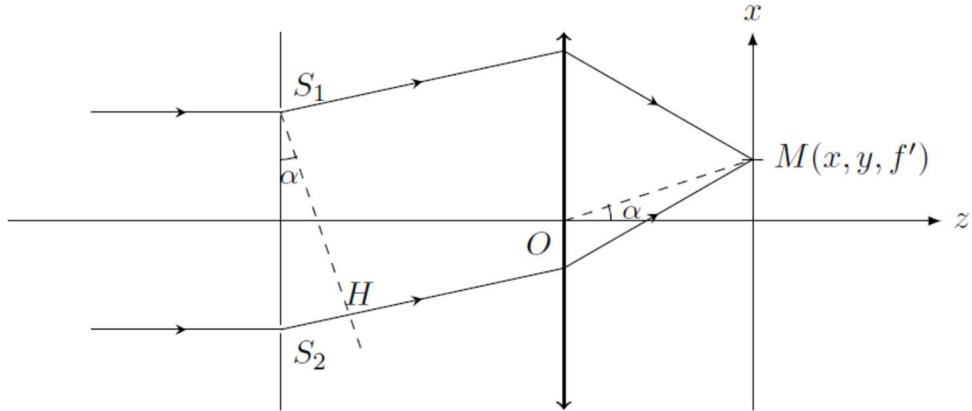
Ces perturbations sont très faibles par rapport à  $R$  et  $L$  :  $\frac{\delta R}{R} \approx 2 \cdot 10^{-3}$  et  $\frac{\delta L}{L} \approx 2 \cdot 10^{-3}$ . Elles seront donc difficiles à mesurer de plus les valeurs données ci-dessus sont très imprécises ( $\alpha$  est très imprécis)

C.7) En haute fréquence, les variations  $\delta L$  et  $\delta R$  seront plus importantes donc plus facilement détectables. La sensibilité du dispositif en est donc améliorée. Cependant, l'effet de peau, plus important en hautes fréquences, va limiter cette sensibilité ; en effet, les courants induits tendent à se concentrer sur la surface du conducteur ce qui empêchera la détection de défauts « profonds » de la plaque conductrice.

## Problème 3 – La spectrométrie ICP-AES

### A – Spectroscopie et résolution

Q18. Par définition, la différence de marche entre les deux rayons considérés est donnée par :



$$\delta(M) = (SM)_2 - (SM)_1 = ((SS_2) + (S_2M)) - ((SS_1) + (S_1M))$$

Or d'après le théorème de Malus Dupin, les points  $S_1$  et  $S_2$  sont situés sur la même surface d'onde et ainsi

$$\delta(M) = (S_2M) - (S_1M)$$

Imaginons qu'on place une source ponctuelle au point  $M$ . D'après le principe de retour inverse de la lumière, les rayons issus de  $M$  passant par  $S_1$  et  $S_2$  seraient les mêmes. D'après le théorème de Malus, les surfaces d'ondes sont sphériques entre  $M$  et la lentille et planes après.

Ainsi :

$$\delta(M) = (S_2M) - (S_1M) = (MS_2) - (MS_1) = (MH) + (HS_2) - (MS_1) = HS_2 = \overrightarrow{S_2S_1} \cdot \vec{u}$$

où  $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$  est le vecteur unitaire orientant les rayons parallèles considérés entre les trous et la lentille.

$$\overrightarrow{S_2S_1} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{x_M^2 + y_M^2 + f'^2}} \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ f' \end{pmatrix} \stackrel{\text{Conditions de Gauss}}{=} \frac{1}{f'} \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ f' \end{pmatrix} \quad \text{ainsi} \quad \overrightarrow{S_2S_1} \cdot \vec{u} = \frac{ax_M}{f'}$$

$$\boxed{\delta(M) = \frac{ax}{f'}}$$

Q19. La formule de Fresnel nous donne (les deux ondes se superposant en  $M$  étant mutuellement cohérentes)

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(2\pi \frac{\delta}{\lambda}\right)$$

Les deux trous étant identiques on peut considérer  $I_1 = I_2 = I_0$  :  $\boxed{I(M) = 2I_0 \left(1 + \cos\left(2\pi \frac{ax}{\lambda f'}\right)\right)}$

$I(M)$  ne dépend pas de  $y$  : les franges d'interférences sont donc rectilignes colinéaires à  $Oy$

$$\text{Les raies brillantes sont espacées de } \boxed{i = \frac{\lambda f'}{a}}$$

Les raies sont parfaitement contrastées

$$\boxed{\text{Q20. } i = \frac{499,3 \cdot 10^{-9} \cdot 0,20}{10^{-4}} = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}}$$

Q21.  $\delta i = \frac{\delta \lambda f'}{a}$  : pour avoir une résolution en longueur d'onde voisine de 20 pm, il faut une résolution

spatiale de  $\delta i = \frac{20 \cdot 10^{-12} \cdot 500 \cdot 10^{-9}}{10^{-4}} = 10^{-13}$  m ce qui semble illusoire. Par exemple si on mesure des longueurs avec un précision de  $10^{-4}$  m, il faudrait mesurer  $\frac{10^{-4}}{10^{-13}} = 10^9$  interfranges ... C'est bien sûr impossible en pratique et même en théorie, la longueur de cohérence temporelle pour les lampes spectrales est au maximum de 30 cm ; l'ordre d'interférence maximal avant d'avoir un contraste nul est  $p_{\max} = \frac{0,3}{500 \cdot 10^{-9}} = 10^6$  on atteint pas  $10^9$

### III.A.2) Interférences à N ondes

**Q22.** Un raisonnement analogue à celui mené en question 18 permet de conclure que la différence de marche

entre deux rayons passant par des trous successifs est  $\delta = a \sin(\theta)$  ; soit  $\boxed{\varphi = 2\pi \frac{a \sin(\theta)}{\lambda}}$

Attention ici, on n'est plus nécessairement dans les conditions de Gauss (il n'y a plus de lentille après ou son axe optique ne sera pas aligné sur Oz)

**Q23.** On numérottera les trous par valeur de x décroissant de  $S_0$  le trou d'abscisse maximale à  $S_{N-1}$

Les ondes avant les trous sont en phase (théorème de Malus) on note la vibration lumineuse dans le plan du réseau :  $s_{\text{réseau}}(t) = s_0 e^{i(-\omega t + \theta_0)}$

En M, à l'infini dans la direction  $\theta$  se superposent les ondes passées par chaque trou  $S_i$  :

$$s_i(M, t) = s_0 e^{i(k(S_i M) - \omega t + \theta_0)}$$

Ainsi  $\boxed{s(M, t) = \sum_{i=0}^{N-1} s_i(M, t) = \sum_{i=0}^{N-1} s_0 e^{i(k(S_i M) - \omega t + \theta_0)} = s_0 e^{i(k(S_0 M) - \omega t + \theta_0)} \sum_{i=0}^{N-1} e^{i k ((S_i M) - (S_0 M))} = s_0 e^{i(-\omega t + \theta_0)} \sum_{i=0}^{N-1} e^{i k \varphi}}$

On a ainsi  $\boxed{s(M, t) = s_0 e^{i(-\omega t + \theta_0)} \frac{1 - e^{iN\varphi}}{1 - e^{i\varphi}} = s_0 e^{i(-\omega t + \theta_0 + (N-1)\frac{\varphi}{2})} \frac{e^{-iN\frac{\varphi}{2}} - e^{iN\frac{\varphi}{2}}}{e^{-i\frac{\varphi}{2}} - e^{i\frac{\varphi}{2}}} = s_0 e^{i(-\omega t + \theta_0 + (N-1)\frac{\varphi}{2})} \frac{\sin(N\frac{\varphi}{2})}{\sin(\frac{\varphi}{2})}}$

L'éclairement associé sera  $\boxed{E(M, t) = E_0 \left( \frac{\sin(N\frac{\varphi}{2})}{\sin(\frac{\varphi}{2})} \right)^2}$

L'éclairement sera maximum lorsque le dénominateur s'annulera soit pour  $\boxed{\varphi = 2p\pi}$  avec p entier relatif.

On aura alors  $E(M, t) = N^2 E_0$  avec  $E_0$  l'éclairement si un seul trou était éclairé.

Le pic d'ordre 1 sera dans la direction telle que  $2\pi \frac{a \sin(\theta_1)}{\lambda} = 2\pi$  soit  $\boxed{\sin(\theta_1) = \frac{\lambda}{a}}$

**Q24.** AN :  $\sin(\theta_1) = \frac{\lambda}{a} = \frac{1800}{10^{-3}} 499,3 \cdot 10^{-9} = \frac{1,800}{10^{-6}} 4,993 \cdot 10^{-7} = 0,9874$  soit  $\boxed{\theta_1 = 64,0^\circ = 1,12 \text{ rad}}$

On n'est plus du tout dans les conditions de Gauss.

**Q25.** L'éclairement s'annule lorsque  $\sin\left(N\frac{\varphi}{2}\right) = 0$  soit  $\varphi = p \frac{2\pi}{N}$  La demi-largeur du pic du premier ordre

correspondra à  $\varphi = \varphi_1 + \Delta\varphi = \frac{p}{N} 2\pi \left(1 + \frac{1}{N}\right) = 2\pi \frac{a \sin(\theta_1 + \Delta\theta)}{\lambda} = 2\pi \frac{a}{\lambda} (\sin(\theta_1) + \Delta\theta \cos(\theta_1))$

$$\text{Soit } 2\pi \frac{a}{\lambda} \cos(\theta_1) \Delta\theta = \frac{2\pi}{N} \text{ ou } \boxed{\Delta\theta_1 = \frac{1}{N} \frac{\lambda}{a \cos(\theta_1)} = \frac{\lambda}{\ell \cos(\theta_1)}}$$

$$\text{AN } \Delta\theta_1 = \frac{499,3 \cdot 10^{-9}}{5 \cdot 10^{-2} \cos(64,0)} = 2,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

**Q26.** L'écart angulaire entre les deux maximums d'ordre 1 correspondant aux deux longueurs d'onde  $\lambda$  et

$$\lambda' = \lambda + \delta\lambda \text{ sera dans les directions } \theta_1 \text{ et } \theta_1 + \delta\theta_1 \text{ tel que } \sin(\theta_1 + \delta\theta_1) = \frac{\lambda + \delta\lambda}{a} = \sin(\theta_1) + \delta\theta_1 \cdot \cos(\theta_1)$$

$$\text{Soit un écart angulaire } \delta\theta_1 = \frac{\delta\lambda}{a \cos(\theta_1)}$$

$$\text{Les deux pics seront résolus si } \delta\theta_1 = \frac{\delta\lambda}{a \cos(\theta_1)} > \Delta\theta_1 = \frac{1}{N} \frac{\lambda}{a \cos(\theta_1)} \quad \text{soit} \quad \boxed{\delta\lambda > \frac{\lambda}{N}}$$

$$\boxed{\text{Q27. Résolution du réseau étudié } \delta\lambda = \frac{\lambda a}{\ell} = \frac{499,3 \cdot 10^{-9} \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^{-2}} = 10^{-11} \text{ m} = 10 \text{ pm}}$$

## B – Interaction champs – plasma dans la torche

$$\boxed{\text{Q28. } \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} (= 0) \quad \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{div} \vec{B} = 0 \quad \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$$

Formes intégrales

$$\boxed{\begin{aligned} \iint_{M \in \Sigma_f} \vec{E}(M) dS_M \overrightarrow{n_{\text{ext}}(M)} &= \frac{Q_{\text{intérieur}}}{\epsilon_0} & \oint_{M \in \Gamma_f} \vec{E}(M) d\vec{l}_M &= -\frac{d}{dt} \iint_{\substack{P \in \Sigma \\ \text{s'appuyant} \\ \text{sur } \Gamma_f}} \vec{B}(P) dS_P \overrightarrow{n(P)} \\ \iint_{M \in \Sigma_f} \vec{B}(M) dS_M \overrightarrow{n_{\text{ext}}(M)} &= 0 & \oint_{M \in \Gamma_f} \vec{B}(M) d\vec{l}_M &= \mu_0 I_{\text{enlacé}} \end{aligned}}$$

### B.1) Champ magnétique produit par les lames

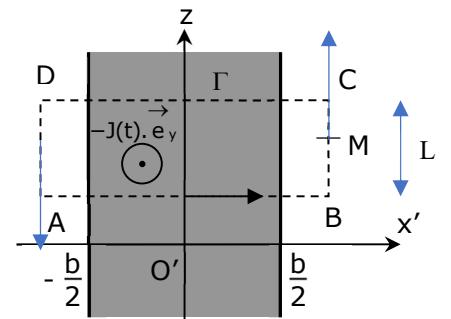
**Q29.** On commence par faire un changement de coordonnées : on utilisera le repère  $(O'x'yz)$  où  $O'$  a pour coordonnées dans le référentiel initial  $(-a - \frac{b}{2}, 0, 0)$  et l'axe  $(O'x')$  est parallèle à l'axe  $(Ox)$

La distribution de charge et de courant est invariant selon toutes les translations le long de  $Oy$  et  $Oz$ .

$$\text{Donc } \vec{B} = \begin{pmatrix} B_x(x', t) \\ B_y(x', t) \\ B_z(x', t) \end{pmatrix}$$

Soit  $M$  un point quelconque

Le plan  $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$  est plan de symétrie des courants (et des charges). Par conséquent,  $\boxed{\vec{B} = B_z(x', t) \vec{e}_z}$



De plus, le plan médian  $(O'yz)$  est aussi plan de symétrie des courants. Donc le champ  $\vec{B}$  est antisymétrique par rapport à ce plan. Donc  $B_z(-x', t) = -B_z(x', t)$

On applique le théorème d'Ampère sur un contour rectangulaire comme sur le contour ci-dessus

$$\oint_{M \in \Gamma_f} \vec{B}(M) d\vec{l}_M = \mu_0 I_{enlacé}$$

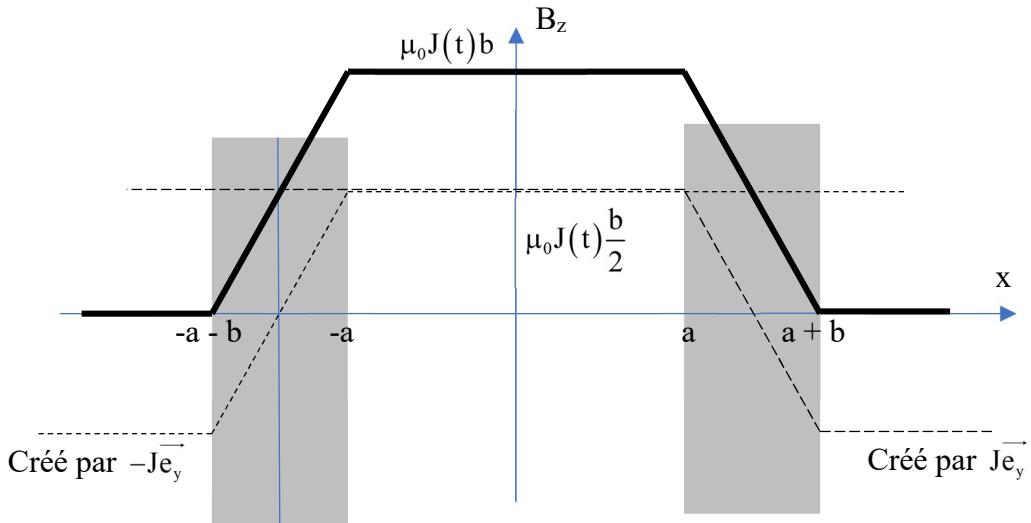
Avec  $\oint_{M \in \Gamma_f} \vec{B}(M) d\vec{l}_M = L(B_z(x'_B) - B_z(x'_A)) = 2LB_z(x'_M)$

et  $I_{enlacé} = \begin{cases} J(t)L2x'_M & \text{si } 0 < x'_M < \frac{b}{2} \\ J(t)Lb & \text{si } x'_M > \frac{b}{2} \end{cases}$

Donc  $\vec{B}(M, t) = \begin{cases} \mu_0 J(t) x'_M \vec{e}_z & \text{si } x'_M < \frac{b}{2} \\ \mu_0 J(t) \frac{b}{2} \vec{e}_z & \text{si } x'_M > \frac{b}{2} \end{cases}$

**Q30.** On utilise le théorème de superposition

Raisonnement graphique



### B.2) Propriétés dans le plasma

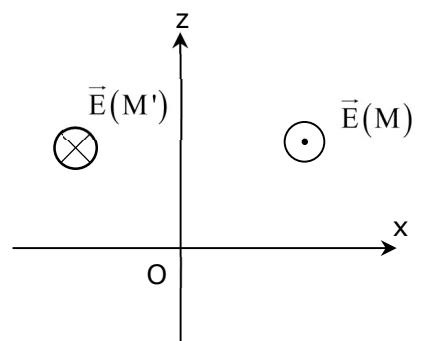
**Q31.**  $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  Donc si  $J$  est variable, le champ magnétique sera variable et il apparaîtra un champ électrique induit

Les invariances de la distribution de courant sont les mêmes que précédemment :  $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x(x, t) \\ E_y(x, t) \\ E_z(x, t) \end{pmatrix}$

Le plan  $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$  est plan d'antisymétrie des courants et le champ électrique a les mêmes symétries que ses sources :  $\vec{E} = E_y(x, t) \vec{e}_y$

Le plan  $(O, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  est plan d'antisymétrie de la distribution de courant donc du champ électrique :  $E_y(-x, t) = -E_y(x, t)$

**Q32.** Le champ électrique induit est à l'origine d'une distribution de courant dans le plasma ce qui induit un champ magnétique créé par le plasma. On peut donc en déduire que ce champ n'est pas le même que celui seulement



créé par les lames.

La distribution de courant dans le plasma aura les mêmes symétries et invariances que le champ électrique qui lui-même a les symétries et les invariances du courant dans les plaques.

La distribution totale des courants gardera ses symétries et ses invariances et le champ magnétique gardera la même structure que celle donnée aux question 29 et 30 :  $\vec{B} = B_z(x, t)\vec{e}_z$  avec  $B_z(x, t)$  fonction paire de  $x$

$$\text{Q33. D'après l'équation de Maxwell-Ampère : } \vec{\text{rot}}\vec{B} = -\frac{\partial B_z}{\partial x}\vec{e}_y = \mu_0 j\vec{e}_y \text{ donc } \boxed{\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0 j}$$

$$\text{D'après l'équation de Maxwell-Faraday : } \vec{\text{rot}}\vec{E} = \frac{\partial E_y}{\partial x}\vec{e}_z = -\frac{\partial B_z}{\partial t}\vec{e}_z \text{ donc } \boxed{\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}}$$

### B.3) Modèle non collisionnel

$$\text{Q34. On a } \frac{\partial j_y(x, t)}{\partial t} = \frac{n \cdot e^2}{m} E_y(x, t)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0 j_y \Rightarrow \frac{\partial^2 B_z}{\partial t \partial x} = -\mu_0 \frac{\partial j_y}{\partial t} = -\mu_0 \frac{n \cdot e^2}{m} E_y(x, t)$$

Ainsi 
$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t} = \mu_0 \underbrace{\frac{n \cdot e^2}{m}}_{\frac{1}{\lambda^2}} E_y(x, t)$$
 avec 
$$\lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n \cdot e^2}}$$

$$\text{Q35. On obtient : } E_y(x, t) = \alpha(t) \cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right) + \beta(t) \sinh\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\text{Comme } E_y \text{ est une fonction impaire de } x : E_y(x, t) = \beta(t) \sinh\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\text{De plus } \frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\beta(t)}{\lambda} \cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right) \text{ soit } B_z = Q(t) \cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right) \text{ avec } \frac{dQ}{dt} = -\frac{\beta(t)}{\lambda}$$

Si on pose  $B_0(t) = B(a, t) = Q(t) \cosh\left(\frac{a}{\lambda}\right)$ , on peut réécrire 
$$\boxed{B_z(x, t) = \frac{\cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{\cosh\left(\frac{a}{\lambda}\right)} B_0(t)}$$

$$\text{Q36. D'après la relation donnée à la question 34 : } \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \Rightarrow \frac{\beta(t)}{\lambda} \cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right) = -\frac{\cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{\cosh\left(\frac{a}{\lambda}\right)} \frac{dB_0(t)}{dt}$$

$$\text{Soit } \beta(t) = -\lambda \frac{\cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{\cosh\left(\frac{a}{\lambda}\right)} \frac{dB_0(t)}{dt} \text{ et}$$

$$\boxed{E_y = -\lambda \frac{\sinh\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{\cosh\left(\frac{a}{\lambda}\right)} \frac{dB_0(t)}{dt}}$$

De même :  $\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0 j_y \Rightarrow$

$$j_y = -\frac{1}{\lambda \mu_0} \frac{\sinh\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{\cosh\left(\frac{a}{\lambda}\right)} B_0(t)$$

**Q37.** L'expression de la puissance volumique est :

$$p = \vec{j} \cdot \vec{E} = j_y E_y = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\sinh\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{\cosh\left(\frac{a}{\lambda}\right)} \right)^2 B_0(t) \frac{dB_0(t)}{dt} = \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{\sinh\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{\cosh\left(\frac{a}{\lambda}\right)} \right)^2 \frac{dB_0^2(t)}{dt}$$

La puissance moyenne sera

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{\sinh\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{\cosh\left(\frac{a}{\lambda}\right)} \right)^2 \frac{dB_0^2(t)}{dt} dt = \frac{1}{T} \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{\sinh\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{\cosh\left(\frac{a}{\lambda}\right)} \right)^2 \left[ B_0^2(t) \right]_0^T \\ &= \frac{1}{T} \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{\sinh\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{\cosh\left(\frac{a}{\lambda}\right)} \right)^2 \left( B_0^2(T^-) - B_0^2(0^+) \right) = 0 \end{aligned}$$

Il n'y aurait aucune puissance cédée par le champ aux électrons et donc **pas besoin d'entretenir le plasma**, contrairement à ce qui est dit dans l'énoncé.

#### B.4) Modèle collisionnel

**Q38.**  $\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0 j_y = -\mu_0 \sigma E_y \Rightarrow \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = -\mu_0 \sigma \frac{\partial E_y}{\partial x} = \mu_0 \sigma \frac{\partial B_z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \mu_0 \sigma \frac{\partial B_z}{\partial t}$$

**Q39.** D'après l'équation établie à la question précédente,

$$\dim\left(\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}\right) = \dim(B)L^{-2} = \dim\left(\mu_0 \sigma \frac{\partial B_z}{\partial t}\right) = \dim(\mu_0 \sigma) \dim(B)T^{-1}$$

donc  $\dim(\mu_0 \sigma) = L^{-2} \cdot T$

Ainsi  $\dim(\mu_0 \sigma \omega) = L^{-2} \cdot T \cdot T^{-1} = L^{-2}$  et

$$\dim \delta = \dim\left(\sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}\right) = L$$

**Q40.** On injecte la solution proposée pour  $\vec{B}(x, t) = \underline{f}(x) \cdot \exp(i\omega t) \cdot \vec{e}_z$  dans l'équation aux dérivées

partielles trouvée :

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \mu_0 \sigma \frac{\partial B_z}{\partial t} \Rightarrow \frac{d^2 \underline{f}(x)}{dx^2} \cdot \exp(i\omega t) = i\mu_0 \sigma \omega \underline{f}(x) \exp(i\omega t)$$

$$\frac{d^2 \underline{f}(x)}{dx^2} - i\mu_0 \sigma \omega \underline{f}(x) = 0$$

$$\text{Equation caractéristique : } X^2 = i\mu_0\omega\sigma = e^{\frac{i\pi}{2}}\mu_0\omega\sigma = \left(e^{\frac{i\pi}{4}}\sqrt{\mu_0\omega\sigma}\right)^2 = \left((1+i)\sqrt{\frac{\mu_0\omega\sigma}{2}}\right)^2 = \left(\frac{1+i}{\delta}\right)^2$$

$$\text{Donc } f(x) = Ae^{\frac{1+i}{\delta}x} + Be^{-\frac{1+i}{\delta}x} = \underline{\alpha} \cosh\left(\frac{1+i}{\delta}x\right) + \underline{\beta} \sinh\left(\frac{1+i}{\delta}x\right)$$

La parité par rapport à x de  $B_z$  donc f impose :  $\underline{\beta} = 0$  et

$$f(x) = \underline{\alpha} \cosh\left(\frac{1+i}{\delta}x\right) = f_0 \frac{\cosh\left(\frac{1+i}{\delta}x\right)}{\cosh\left(\frac{1+i}{\delta}a\right)}$$

Ainsi

$$\boxed{\bar{B}(x, t) = f_0 \frac{\cosh\left(\frac{1+i}{\delta}x\right)}{\cosh\left(\frac{1+i}{\delta}a\right)} \exp(i\omega t) \bar{e}_z}$$

**Q41.** Au vu de l'expression de  $\bar{B}$ , on peut penser que la puissance évolue en  $\exp\left(-2\frac{x}{\delta}\right)$  (E et j ont probablement une amplitude qui décroît en  $\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$ ) près des bords. On peut donc y voir un **effet de peau. Plus la pulsation est importante, plus l'épaisseur de peau  $\delta$  est petite et donc plus l'atténuation devrait être abrupte.**

On observe que la courbe  $\frac{a}{\delta} = 3,4$  (qui a la plus forte amplitude) est celle qui décroît le plus rapidement. C'est bien celle qui a le plus petit  $\delta$ . C'est cohérent.

De plus, on remarque graphiquement qu'**une augmentation de pulsation est liée à une augmentation de puissance moyenne transmise au plasma** (plus forte amplitude). On sait qu'en général, **dans les phénomènes inductifs, la puissance volumique augmente avec la pulsation d'excitation**, c'est donc bien cohérent. Dans le modèle non collisionnel, il n'y avait aucune puissance cédée aux électrons.

Enfin, on remarque que sur les bords, la puissance est bien maximale, cela est cohérent avec la forme d'anneau qu'on observe sur la photographie de la figure 7. Sur celle-ci d'ailleurs, on peut observer un **anneau d'épaisseur  $\sim 0,7$  cm**. Calculons  $\delta$ :  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}} \approx 5\text{ mm}$ . C'est tout-à-fait cohérent avec les observations malgré une géométrie différente.