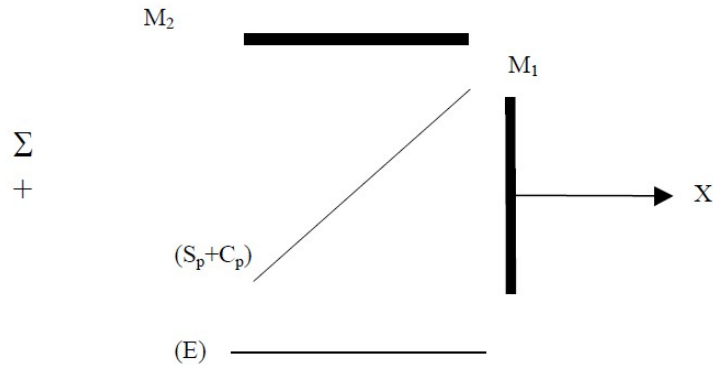


DS6 CORRECTION

Problème 1 (sujet 1) : Localisation des franges (D'après CCP)

Partie 1 : Michelson en lame d'air



1-a- Les rayons issus de F se partagent en d'une part des rayons réfléchis par $(Sp+Cp)$ qui vont aller frapper M_2 et d'autre part des rayons transmis à travers $(Sp+Cp)$ qui vont venir frapper M_1 . Soit S l'image de Σ par réflexion sur $(Sp+Cp)$ et S_2 l'image de S par réflexion sur M_2

$$S = \text{Sym}_{Sp+Cp}(\Sigma) \text{ et } S_2 = \text{Sym}_{M_2}(S)$$

Soit Σ' l'image de Σ par M_1 et soit S_1 l'image de Σ' par réflexion sur $Sp+Cp$:

$$\Sigma' = \text{Sym}_{M_1}(\Sigma) \text{ et } S_1 = \text{Sym}_{Sp+Cp}(\Sigma') .$$

En appelant M'_1 le symétrique de M_1 par rapport à $(Sp+Cp)$, $S_1 = \text{Sym}_{M'_1}(S)$

(Cf graphe à la question suivante)

Tout se passe donc comme si on avait deux miroirs M'_1 et M_2 formant une lame d'air et une source ponctuelle S . Les sources secondaires obtenues par ce système sont $S_1 = \text{Sym}_{M'_1}(S)$ et

$$S_2 = \text{Sym}_{M_2}(S)$$

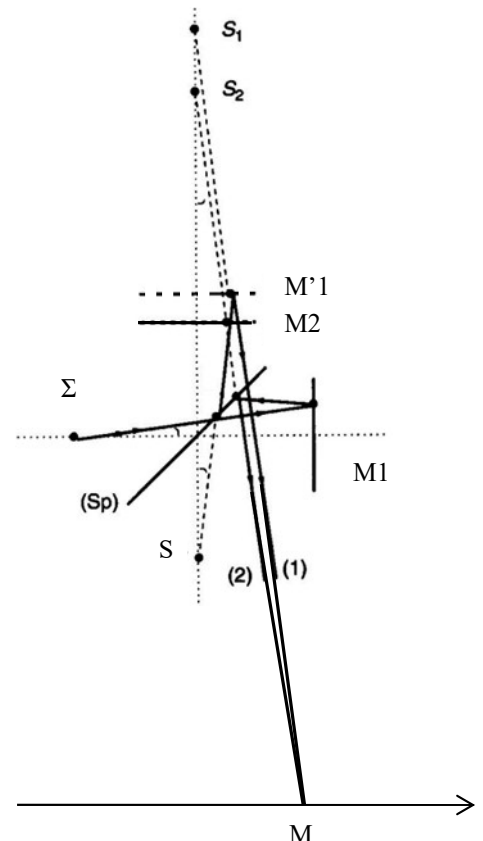
La distance $M'_1 M_2$ est égale à l'écart des distances respectives de M_1 et M_2 à l'ensemble $Sp + Cp$, d est la distance de F à $Sp+Cp$.

1-b- Il y a deux façons d'aborder cette question.

La première : rester en coordonnées cartésiennes

Schéma cf ci-contre

$$S1 \begin{pmatrix} 0 \\ D+d+2e \end{pmatrix} \quad S2 \begin{pmatrix} 0 \\ D+d \end{pmatrix}$$



2- La différence de marche est $\delta = S_1M - S_2M$

$$S_1M = \sqrt{X^2 + (D+d)^2} = (D+d) \sqrt{1 + \frac{X^2}{(D+d)^2}} = (D+d) \sqrt{1+x^2}$$

$$S_2M = (D+d) \sqrt{\frac{(D+d+2e)^2}{(D+d)^2} + \frac{X^2}{(D+d)^2}} = (D+d) \sqrt{(1+2\varepsilon)^2 + x^2}$$

en posant $x = \frac{X}{D+d}$ et $\varepsilon = \frac{e}{D+d}$ et on supposera x et ε du même ordre de grandeur

Attention, pour conserver les termes faisant apparaître une dépendance en X il ne faut pas limiter le développement à l'ordre 1 en x ou ε (comme le montre la formule proposée il faut aller développer jusqu'à l'ordre 3 !!!)

Ainsi :

$$S_1M = (D+d) \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \right)$$

$$\begin{aligned} S_2M &= (D+d) \sqrt{(1+2\varepsilon)^2 + x^2} = (D+d) \sqrt{1+4\varepsilon+4\varepsilon^2+x^2} \\ &= (D+d) \left(1 + \frac{1}{2}(4\varepsilon+4\varepsilon^2+x^2) - \frac{1}{8}(4\varepsilon+4\varepsilon^2+x^2)^2 + \frac{\frac{3}{8}}{3!}(4\varepsilon+4\varepsilon^2+x^2)^3 + o(x^3 \text{ ou } \varepsilon^3) \right) \\ &= (D+d) \left(1 + \frac{1}{2}(4\varepsilon+4\varepsilon^2+x^2) - \frac{1}{8}(4^2\varepsilon^2+2.4^2\varepsilon^3+2.4\varepsilon x^2) + \frac{1}{16}(4\varepsilon)^3 + o(x^3 \text{ ou } \varepsilon^3) \right) \\ &\quad \text{en simplifiant les termes d'ordre supérieur à } x^3 \text{ ou } \varepsilon^3 \\ &= (D+d) \left(1 + \left(2\varepsilon + \cancel{2\varepsilon^2} + \frac{1}{2}x^2 \right) - \left(\cancel{2\varepsilon^2} + \cancel{4\varepsilon^3} + \varepsilon x^2 \right) + \cancel{4\varepsilon^3} + o(x^3 \text{ ou } \varepsilon^3) \right) \\ &= (D+d) \left(1 + 2\varepsilon + \frac{1}{2}x^2 - \varepsilon x^2 + o(x^3 \text{ ou } \varepsilon^3) \right) \end{aligned}$$

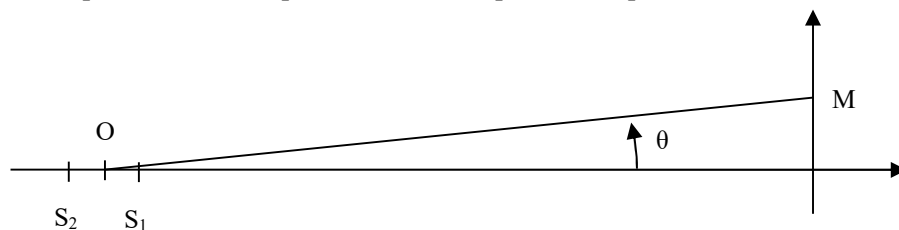
Soit au final

$$\begin{aligned} S_2M - S_1M &= (D+d) \left(\cancel{1} + 2\varepsilon + \cancel{\frac{1}{2}x^2} - \varepsilon x^2 + o(x^3 \text{ ou } \varepsilon^3) \right) - (D+d) \left(\cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}x^2} + o(x^3) \right) \\ &= (D+d) 2\varepsilon \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2 \text{ ou } \varepsilon^2) \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{S_2M - S_1M = 2e \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{X}{D+d} \right)^2 \right)}$$

OUF ! PLUS JAMAIS CA !

Autre possibilité : s'inspirer du calcul du potentiel dipolaire



$$S_1M^2 = (\overrightarrow{S_1O} + \overrightarrow{OM})^2 = \overrightarrow{S_1O}^2 + \overrightarrow{OM}^2 + 2\overrightarrow{S_1O} \cdot \overrightarrow{OM} = e^2 + r^2 - 2.e.r \cos \theta$$

$$S_2 M^2 = e^2 + r^2 + 2.e.r \cos \theta$$

$$\text{Ainsi } S_2 M - S_1 M = r \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{e}{r} \cos \theta + \left(\frac{e}{r}\right)^2} - r \sqrt{1 - 2 \cdot \frac{e}{r} \cos \theta + \left(\frac{e}{r}\right)^2} = 2e \cos \theta = 2e \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)$$

Puis ensuite il suffit de donner une expression de θ à l'ordre 1

$$\tan \theta = \frac{X}{D+d+e} \text{ et à l'ordre 1 } \theta = \frac{X}{D+d} \text{ On retrouve } \boxed{S_2 M - S_1 M = 2e \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{X}{D+d}\right)^2\right)}$$

On a singularisé ici l'axe X (qui est en fait quelconque). Il y a une symétrie de révolution autour de la normale à l'écran passant par S (axe Y). **Les franges sont des cercles d'axe (Y)**

- 3- Dans le cas où $2e = p_0 \lambda$, la différence de marche au centre est nulle et les deux ondes sont en phase. On a donc un **maximum d'intensité : le centre est brillant**.

$$\text{Un anneau brillant correspond à } \frac{\delta_n}{\lambda} = \frac{2e}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{X_m}{D+d}\right)^2\right) \in \mathbb{Z}$$

Lorsque X augmente, δ et donc p diminuent : pour le $m^{\text{ième}}$ anneau $p_m = p_0 - m$

Le rayon de l'anneau correspondant est donné par

$$\frac{\delta_m}{\lambda} = \frac{2e}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{X_m}{D+d}\right)^2\right) = \underbrace{p_0}_{\frac{2e}{\lambda}} - m$$

$$\frac{e}{\lambda} \left(\frac{X_m}{D+d}\right)^2 = m$$

$$\boxed{X_m = (D+d) \sqrt{m \frac{\lambda}{e}} = (D+d) \sqrt{m \frac{2}{p_0}}}$$

M=0	X = 0
1	2,2 cm
2	3,2 cm
3	3,9 cm
4	4,5 cm
5	5,0 cm

La distance entre l'anneau p et l'anneau (p+1) varie en $\sqrt{p+1} - \sqrt{p}$. Cet écart diminue avec p

- 4- Dans le cas de deux sources incohérentes, les intensités s'ajoutent. Les franges sont identiques mais translatées selon l'axe (X) de R. Les franges seront visibles jusqu'au $m^{\text{ième}}$ anneau si

$$\boxed{R < \frac{X_m - X_{m+1}}{4} = (D+d) \sqrt{\frac{\lambda}{e}} \frac{\sqrt{m+1} - \sqrt{m}}{4}}$$

- 5- Dans le cas où $D \rightarrow \infty$, la relation précédente est satisfaite pour tout R (et tout m) Les franges à l'infini restent donc contrastées. On dit que les interférences sont localisées à l'infini. Il apparaît alors que la source ponctuelle peut être remplacée par une source large.

L'intérêt de travailler avec une source étendue est d'obtenir un phénomène plus lumineux, donc plus visible.

Pour observer les anneaux à l'infini, on utilise une lentille convergente dont la focale sera de l'ordre du m, parallèle à la lame d'air et on observe les anneaux formés dans le plan focal image de la lentille.

- 6- Pour observer le plus grand nombre d'anneaux, il faut avoir des angles d'inclinaison i variés. Cet angle i est aussi l'angle d'incidence sur les miroirs. Dans la pratique, on dispose près de l'interféromètre un diaphragme de grande ouverture derrière lequel on place la source lumineuse ou bien on dispose le diaphragme au foyer d'un objectif de courte focale.

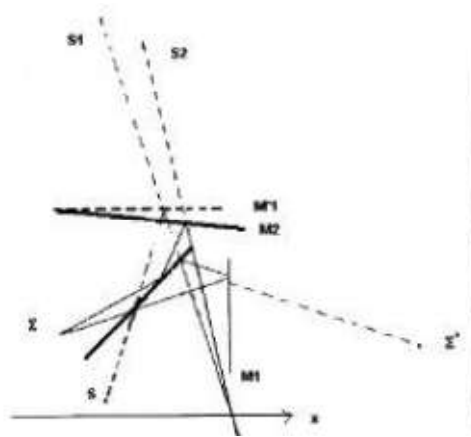
Partie2. Michelson en coin d'air.

- 1- On a les mêmes définitions qu'en partie1.1).

$$S = \text{Sym}_{S_p+C_p}(\Sigma) \text{ et } S_2 = \text{Sym}_{M_2}(S)$$

$$\Sigma' = \text{Sym}_{M_1}(\Sigma) \text{ et } S_1 = \text{Sym}_{S_p+C_p}(\Sigma') = \text{Sym}_{M'_1}(S).$$

En appelant M'_1 le symétrique de M_1 par rapport à (S_p+C_p) ,
Les miroirs M'_1 et M_2 font un angle α et forment un coin d'air.



- 2- La source secondaire S_1 est obtenue par symétrie de S

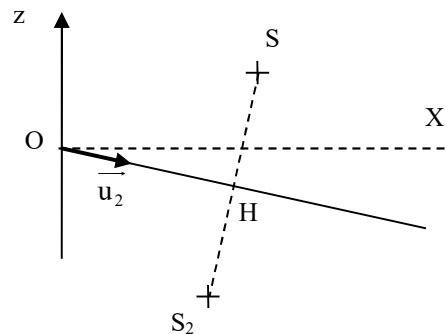
par rapport à M'_1
$$S_1 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ -z_0 \end{pmatrix}$$

La source S_2 est obtenue par symétrie de S par rapport à M_2 . Faisons un schéma dans le plan $y = y_0$. S et S_2 ont la même ordonnée y_0

Appelons H le projeté orthogonal de S sur M_2

$$\overrightarrow{OH} = (\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{u_2}) \overrightarrow{u_2} \text{ avec}$$

$$\overrightarrow{u_2} = \cos \alpha \overrightarrow{u_x} - \sin \alpha \overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{u_x} - \alpha \overrightarrow{u_z}$$



$$\overrightarrow{OH} = (X_0 - \alpha Z_0) \overrightarrow{u_2} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} X_H = X_0 - \alpha Z_0 \\ Z_H = -(X_0 - \alpha Z_0) \alpha = -\alpha X_0 \end{cases}$$

$$H \text{ étant le milieu du segment } [SS_2] : X_H = \frac{X_S + X_{S_2}}{2} \text{ donc } X_{S_2} = 2X_H - X_S = X_0 - 2\alpha Z_0$$

$$\text{De même } Z_{S_2} = 2Z_H - Z_S = -2\alpha X_0 - Z_0$$

$$\text{Ainsi } S_2 \begin{pmatrix} X_0 - 2\alpha Z_0 \\ Y_0 \\ -Z_0 - 2\alpha X_0 \end{pmatrix}$$

3- On peut ainsi obtenir (dans le calcul ci-dessous on fera des développements limités à l'ordre 2 en

$$\alpha, \frac{x}{z}, \frac{x}{z_0}, \frac{x_0}{z}, \frac{x_0}{z_0}, \frac{y}{z} \dots \text{ qui seront supposés des infiniment petits du même ordre})$$

$$S_1 M = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0)^2} = (z + z_0) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{(x - x_0)^2}{(z + z_0)^2} + \frac{1}{2} \frac{(y - y_0)^2}{(z + z_0)^2} \right)$$

$$\begin{aligned} S_2 M &= \sqrt{(x - x_0 + 2\alpha z_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0 + 2\alpha x_0)^2} \\ &= (z + z_0) \sqrt{\left(\frac{x - x_0 + 2\alpha z_0}{z + z_0} \right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{z + z_0} \right)^2 + \left(1 + \frac{2\alpha x_0}{z + z_0} \right)^2} \\ &= (z + z_0) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{(x - x_0 + 2\alpha z_0)^2}{(z + z_0)^2} + \frac{1}{2} \frac{(y - y_0)^2}{(z + z_0)^2} + \frac{2\alpha x_0}{z + z_0} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta &= (z + z_0) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{(x - x_0 + 2\alpha z_0)^2}{(z + z_0)^2} + \frac{1}{2} \frac{(y - y_0)^2}{(z + z_0)^2} + \frac{2\alpha x_0}{z + z_0} \right) - (z + z_0) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{(x - x_0)^2}{(z + z_0)^2} + \frac{1}{2} \frac{(y - y_0)^2}{(z + z_0)^2} \right) \\ &= (z + z_0) \left(\frac{1}{2} \frac{(x - x_0 + 2\alpha z_0)^2 - (x - x_0)^2}{(z + z_0)^2} + \frac{2\alpha x_0}{z + z_0} \right) \\ &= (z + z_0) \left(\frac{1}{2} \frac{4\alpha z_0 (x - x_0) + 4\alpha^2 z_0^2}{(z + z_0)^2} + \frac{2\alpha x_0}{z + z_0} \right) \\ &= 2\alpha \left(\frac{z_0 (x - x_0) + (z + z_0) x_0}{(z + z_0)} \right) \end{aligned}$$

$$\delta = 2\alpha \frac{z_0 x + z x_0}{(z + z_0)}$$

4- Sur l'écran, z est fixé et δ ne dépend que de x : on a donc des franges rectilignes de x donné.

$$\text{Les maxima d'intensité sont obtenus } \delta = 2\alpha \frac{z_0 x_p + z x_0}{(z + z_0)} = p\lambda \quad \text{avec} \quad p \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Soit } x_p = p \frac{\lambda}{2\alpha} \frac{z + z_0}{z_0} - z \frac{x_0}{z_0}$$

$$\text{L'interfrange est donc } i = \frac{\lambda}{2\alpha} \frac{z + z_0}{z_0}$$

$$\text{La frange centrale est située } x_0 = -z \frac{x_0}{z_0}$$

L'interfrange est indépendante de la position de l'écran si $x_0 = 0$ (source située « au-dessus » de l'arête du coin d'air) ou si $z_0 \gg z$ **observation très proche du coin d'air**

Dans ce second cas : $\delta = 2\alpha \frac{z_0 x + z x_0}{(z + z_0)} = 2\alpha x$ $i = \frac{\lambda}{2\alpha}$, résultat classique du coin d'air.

- 5- Les points sources de la fente sont des sources incohérentes, mais qui donnent toutes lieu à la même valeur $\delta(x, y)$

On obtient donc un phénomène d'interférences inchangé.

- 6- Lorsqu'on déplace la source, δ dépendant de x_0 , le système de franges se translate de $\Delta x = -\frac{z}{z_0} \Delta x_0$

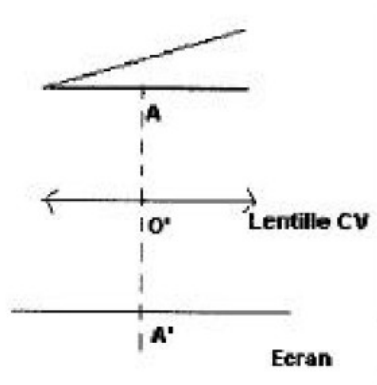
. On en déduit la largeur maximale de la fente : $|\Delta x| = \frac{z}{z_0} \Delta x_0 < \frac{1}{4} i = \frac{\lambda}{8\alpha}$.

$$\Delta x_0 < \frac{\lambda}{8\alpha} \frac{z_0}{z}$$

- 7- Dans le cas où on observe les franges au voisinage du coin d'air, $z \ll z_0$, la contrainte précédente n'est pas contraignante.

On peut donc dans ce cas utiliser une source large.

Dans la pratique on forme l'image du coin d'air par une lentille convergente (f') sur un écran. On doit continuer à éclairer le Michelson en incidence faible.



Problème 2 : Gravimètre à chute libre (Centrale MP 2008)

1a- le rôle de la compensatrice est de compenser exactement le déphasage qui s'introduit entre les deux ondes du fait de la séparatrice (la séparation se fait sur l'une des deux faces de la séparatrice et par conséquent l'une des ondes la traverse 3 fois tandis que l'autre ne la traverse qu'une fois)

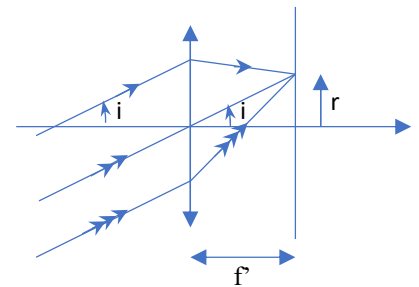
1b- On utilise un filtre interférentiel qui « isole » l'une des raies spectrales de la lampe.

1c- Les miroirs sont perpendiculaires en eux et $e = |O_1I - O_2I|$ est non nulle : le dispositif est donc **équivalent à une lame d'air**

Ainsi, la figure d'interférence observée est constituée d'anneaux concentriques de plus en plus serrés à mesure qu'on s'écarte de leur centre.

La source étant étendue donc spatialement incohérente, ces anneaux sont localisées à l'infini (les différentes figures d'anneaux associées à différentes sources ponctuelles incohérentes se brouillent quelle que soit la position de l'écran à distance finie du dispositif)

1d- On doit donc placer l'écran dans le plan focal image de la lentille. Les anneaux étant des franges d'égales inclinaisons, chaque anneau est associé à un angle d'inclinaison i particulier et a donc pour rayon $r = f' \tan i = f' i$ (conditions de Gauss) sur l'écran. Une grande focale permet donc d'observer des anneaux de grandes taille (donc de mieux les observer, surtout lorsqu'ils sont serrés)



1e- les rayons captés au foyer image correspondent à une inclinaison nulle : leur différence de marche est donc exactement $2e$.

Ainsi d'après la formule de Fresnel (la source est supposée parfaitement monochromatique ici) on

$$a : I = 2I_0 \left(1 + \cos \left(2\pi \frac{\delta}{\lambda_0} \right) \right) = 2I_0 (1 + \cos(4\pi\sigma_0 e))$$

($I_0 = I$ mesurée pour l'une des deux ondes considérée seule)

2a- $\lambda_2 = 400 \text{ nm}$ (violet) et $\lambda_1 = 750 \text{ nm}$ (rouge)

2b- On décompose le spectre en intervalles infinitésimaux de largeur $d\sigma$; à chacun de ces intervalles on associe une onde monochromatique qui crée sur le détecteur un éclairement :

$dI = 2J_0 d\sigma (1 + \cos(4\pi\sigma e))$. Ces différentes ondes monochromatiques sont non synchrones donc incohérentes temporellement et l'éclairement total est donc la somme (intégrale) des dI .

$$I = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} 2J_0 d\sigma (1 + \cos(4\pi\sigma e)) = 2J_0 \left[\sigma + \frac{\sin(4\pi\sigma e)}{4\pi e} \right]_{\sigma_1}^{\sigma_2}$$

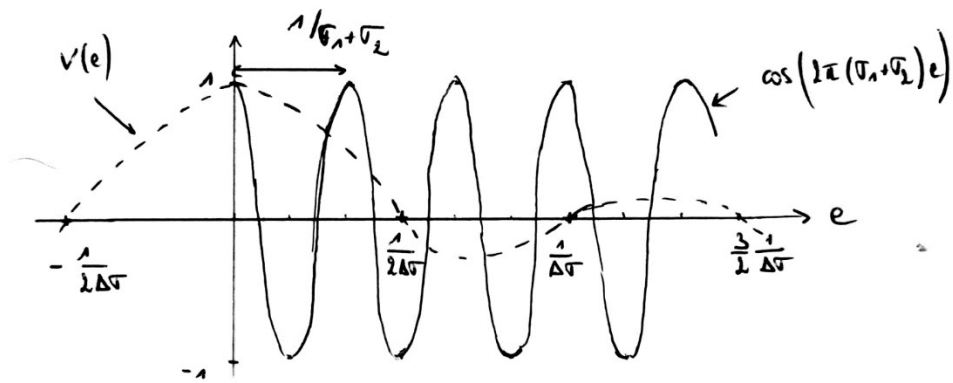
$$= 2J_0 (\sigma_2 - \sigma_1) \left[1 + \frac{1}{4\pi e (\sigma_2 - \sigma_1)} (\sin(4\pi\sigma_2 e) - \sin(4\pi\sigma_1 e)) \right]$$

$$= 2J_0 (\sigma_2 - \sigma_1) \left[1 + \frac{1}{4\pi e (\sigma_2 - \sigma_1)} 2 \sin(2\pi(\sigma_2 - \sigma_1)e) \cos(2\pi(\sigma_2 + \sigma_1)e) \right]$$

$$\text{Soit } I = 2I_0 \left[1 + V(e) \cos(2\pi(\sigma_2 + \sigma_1)e) \right] \text{ avec } V(e) = \frac{\sin(2\pi(\sigma_2 - \sigma_1)e)}{2\pi e (\sigma_2 - \sigma_1)} = \text{sinc}(2\pi e (\sigma_2 - \sigma_1))$$

$$\text{et } I_0 = 2J_0 (\sigma_2 - \sigma_1)$$

Pour tracer le graphe, il faut comparer $(\sigma_2 + \sigma_1) = 3,8 \mu\text{m}^{-1}$ et $(\sigma_2 - \sigma_1) = 1,2 \mu\text{m}^{-1} \sim \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{3}$



3a- Afin d'optimiser la méthode de résolution faisons un dessin détaillé de la situation en donnant un nom aux vitesses et aux positions successives de la masse m .
 Pour alléger les calculs, on a intérêt à choisir $z = 0$ pour le plan inférieur et $t = 0$ pour le premier passage par ce plan (les caractéristiques du point de lancer (z_0, v_0, t_0) sont sans intérêt compte tenu de la question posée)

En appliquant le principe fondamental de la dynamique,

on obtient : $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{\text{inf}}t$

Notons alors $t_1 = 0$ et t_4 les instants de passage par le plan $z = 0$ et t_3 et t_2 , les instants de passage par le plan $z = h$.

t_1 et t_4 sont solutions de $0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{\text{inf}}t$ et donc $t_1 = 0$

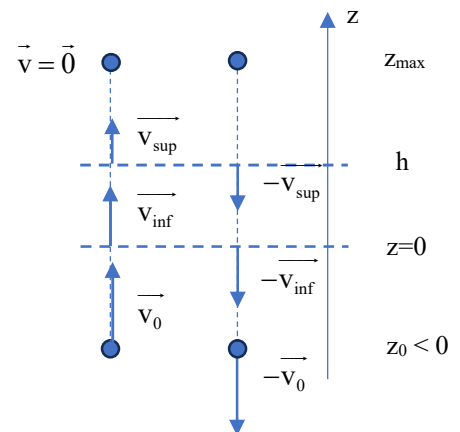
et $t_4 = \frac{2v_{\text{inf}}}{g}$

t_2 et t_3 sont solutions de $h = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{\text{inf}}t$ et donc

$$\begin{cases} t_2 = \frac{1}{g} \left(v_{\text{inf}} - \sqrt{v_{\text{inf}}^2 - 2gh} \right) \\ t_3 = \frac{1}{g} \left(v_{\text{inf}} + \sqrt{v_{\text{inf}}^2 - 2gh} \right) \end{cases}$$

On en déduit $\Delta t_{\text{inf}} = t_4 - t_1 = \frac{2v_{\text{inf}}}{g}$ et $\Delta t_{\text{sup}} = t_3 - t_2 = \frac{2\sqrt{v_{\text{inf}}^2 - 2gh}}{g}$

En éliminant v_{inf} , on obtient $\Delta t_{\text{sup}}^2 = \frac{4 \left(\frac{g^2}{4} \Delta t_{\text{inf}}^2 - 2gh \right)}{g^2} = \Delta t_{\text{inf}}^2 - \frac{8h}{g}$ soit $\boxed{g = \frac{8h}{\Delta t_{\text{inf}}^2 - \Delta t_{\text{sup}}^2}}$



3b- Le plus simple pour démontrer les propriétés optiques du coin de cube est de travailler avec les coordonnées des vecteurs unitaire orientant les faisceaux après les réflexions successives.
 D'après la loi de Snell Descartes de la réflexion, un rayon lumineux incident dirigé par le vecteur \vec{u} est réfléchi dans une direction \vec{u}' symétrique de \vec{u} par rapport à la normale au miroir considéré.
 Mathématiquement, cela signifie que \vec{u} et \vec{u}' ont des coordonnées opposées selon cette normale et égales selon les directions tangentes au miroir

$$\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{réflexion sur (Oyz)}} \vec{u}' \begin{pmatrix} -\alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{réflexion sur (Oxz)}} \vec{u}'' \begin{pmatrix} -\alpha \\ -\beta \\ \gamma \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{réflexion sur (Oxy)}} \vec{u}''' \begin{pmatrix} -\alpha \\ -\beta \\ -\gamma \end{pmatrix} = -\vec{u}$$

La direction après les 3 réflexions successives est exactement opposée à la direction incidente. L'intérêt de ce dispositif est que le rayon revient toujours vers l'émetteur. Dans le cas d'un miroir plan unique, le rayon ne revient sur l'émetteur que s'il est rigoureusement perpendiculaire au miroir.

Remarque : ce sont des coins de cube qui ont été installés sur la Lune par la mission Apollo pour faire la télémétrie Terre Lune au laser.

3c- Le détecteur reçoit 3 ondes correspondant aux trajets SICID (onde 1), SIJO₃JID (onde 2) et SIJO₄JID (onde 3), D étant détecteur.

La différence de marche entre les ondes (2) et (3) vaut $\delta_{23} = 2(O_4J - O_3J)$. Comme $\delta_{23} \gg \lambda_2$, on peut considérer les deux ondes (1) et (2) incohérentes (les trains d'onde se superposant sur le détecteur associé à l'onde 1 et à l'onde 2 sont différentes ; dit autrement, la figure 5 de l'énoncé indique que le contraste est nul si $\delta_{23} \gg \lambda_2$)

Les ondes (1) et (2) d'une part et (1) et (3) d'autre part peuvent en revanche interférer lorsque δ_{12} et δ_{13} respectivement seront quasiment nulles ($< \lambda_2$). Ceci se produira pour chacun une fois à la montée et une fois à la descente donc 4 fois au totale.

On observe ainsi 4 maxima d'intensité correspondant à l'apparition d'une frange très lumineuse pour $\delta = 0$

Dans l'ordre, t_1 et t_4 correspondent au contact optique entre (C) et M_4 et t_2 et t_3 correspondent au contact optique entre (C) et M_3 . On est ramené au calcul du a- et

$$g = \frac{8d}{(t_4 - t_1)^2 - (t_3 - t_2)^2}$$

3d- Avec 5 chiffres significatifs sur toutes les données, il vient : $g = 9,7804 \text{ m.s}^{-2}$

3e- La lumière blanche étant très peu cohérente temporellement, elle permet de n'obtenir des franges avec un bon contraste qu'au voisinage de $\delta = 0$ avec une précision de position de l'ordre de 0,5 μm .

Avec une lumière monochromatique, on aurait des franges visibles pour un intervalle de position de (C) beaucoup plus large et le contact optique ne serait pas repérable.

3f- Avec un laser, on se met au contact optique entre M_3 et M_4 puis on chariotte M_4 en comptant les oscillations d'éclairement sur le détecteur. Chaque oscillation d'éclairement correspond à un

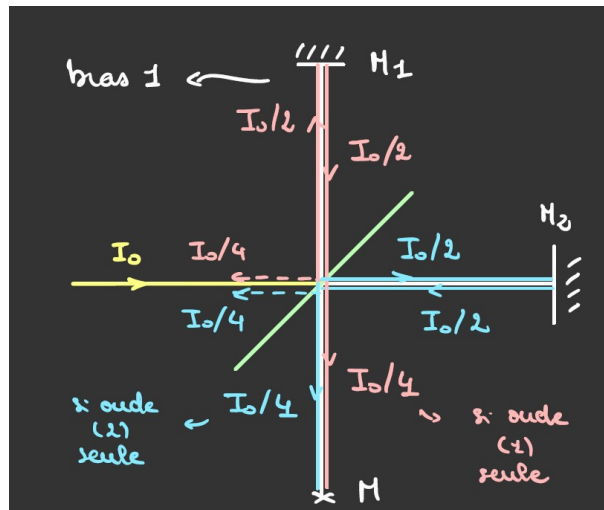
déplacement de M_4 de $\frac{\lambda}{2}$ (car $\delta = 2(O_3J - O_4J)$ augmente de λ), ce qui permet de régler d à au

moins $\frac{\lambda}{4}$ voire $\frac{\lambda}{10}$.

Problème I (sujet 2) : Mesure de l'activité sismique d'une étoile par interférométrie.

I Interférométrie

- 1a-** La lame semi-réfléchissante divise l'amplitude de l'onde incidente en deux quantités égales formant ainsi deux faisceaux d'égale intensité sans introduire de différence de marche entre les deux (par la présence d'une lame compensatrice). La lentille L avec l'écran E placé dans son plan focal image permet de visualiser à distance finie les interférences à l'infini entre les deux faisceaux.
- 1b-** Après réflexion sur les miroirs (1) et (2), les faisceaux retournent sur la lame semi-réfléchissante. La moitié seulement de chacun d'eux ira vers la lentille. Globalement, la moitié de l'intensité entrant dans le dispositif sera perdue.



- 2a-** La tache centrale est brillante, comme elle correspond à l'angle $i = 0$, cela signifie que l'ordre au centre p_0 est un entier tel que $D = p_0 \lambda$. Pour l'incidence i , la différence de marche est $\delta = D \cos i$. Compte tenu de la présence de la lentille, les angles doivent être petits afin de travailler dans les conditions de Gauss. On peut donc proposer un développement limité de la différence de marche :

$$\delta = D \left(1 - \frac{i^2}{2} \right) = p \lambda = \frac{p}{\sigma_0}. \text{ Le premier anneau sombre s'obtient pour } p = p_0 - \frac{1}{2} \text{ car l'ordre décroît}$$

en partant du centre comme la différence de marche. Le rayon de l'anneau s'obtient en utilisant un

rayon lumineux non dévié passant par le centre de la lentille L . On a alors :
$$r_i = f' i = \frac{f'}{\sqrt{D \sigma_0}}$$

Sur l'écran, on observe des anneaux concentriques de centre F' dont les rayons se resserrent lorsqu'on s'éloigne du centre.

- 2b-** On a globalement la même chose qu'avant mais comme le filtre n'est pas totalement monochromatique, il y a aura une perte de contraste et peut-être moins d'anneaux car l'angle d'incidence reste faible.
- 3a-** L'amplitude envoyée par le chemin (1) est du type : $s_0 e^{j\omega t}$, celle envoyée par le chemin (2) est déphasée : $s_0 e^{j\omega t} e^{j2\pi\sigma_0 D}$. L'addition (cohérente) des deux amplitudes donne : $\underline{s} = s_0 e^{j\omega t} [1 + e^{j2\pi\sigma_0 D}]$
- Comme l'intensité lumineuse est du type : $I = \alpha \underline{s} \underline{s}^*$, on obtient facilement la formule traditionnelle :
$$I = I_0 (1 + \cos 2\pi\sigma_0 D)$$
 et donc la valeur du signal détecté proposée par l'énoncé.

- 3b-** La période de l'interférogramme est la valeur de D telle que $\sigma_0 D = 1$.

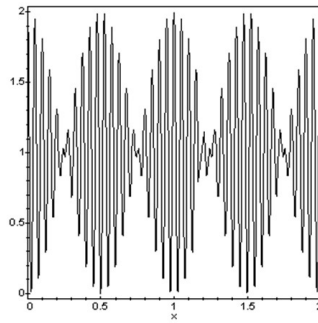
- 4- Les deux raies du doublet ne sont pas cohérentes, les intensités de chacune vont s'ajouter, il en ira de même des signaux détectés :

$$S(D) = S_0 (1 + \cos 2\pi\sigma_1 D) + S_0 (1 + \cos 2\pi\sigma_2 D)$$

$$S(D) = 2S_0 \left(1 + \cos 2\pi \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right) D \cos 2\pi \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right) D \right)$$

Il y a une période rapide : $\frac{2}{\sigma_1 + \sigma_2} = 589,3 \text{ nm}$ et une période lente : $\frac{2}{\sigma_1 - \sigma_2} = 1,158 \text{ mm}$. Il est

difficile de faire une représentation lisible de cette situation car le rapport des périodes est très élevé (2000). Pour la schématisation, on utilisera un rapport de 20.



Remarque, le contraste est $\left| \cos 2\pi \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right) D \right|$ et sa période est $\frac{1}{\sigma_1 - \sigma_2} = 579 \mu\text{m}$

II- Interférogramme d'une raie élargie

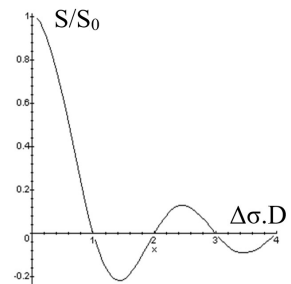
- 1a- Il faut comme dans la question précédente additionner les intensités à cause de l'incohérence entre les différentes longueurs d'onde. Toutefois, il faut conduire un raisonnement en considérant un intervalle de nombre d'onde infinitésimal de la largeur $d\sigma$. Le calcul de l'intensité est donc :

$$I = \int_{\sigma_0 - \Delta\sigma/2}^{\sigma_0 + \Delta\sigma/2} \frac{I_0}{\Delta\sigma} (1 + \cos 2\pi\sigma D) d\sigma$$

Après calculs, on trouve que le signal détecté est de la forme :

$$S(D) = S_0 \left(1 + \frac{\sin \pi \Delta\sigma D}{\pi \Delta\sigma D} \cos 2\pi\sigma_0 D \right)$$

La visibilité en sinuscardinal va détériorer assez rapidement le contraste de la figure d'interférences lorsque D va augmenter. La représentation très classique est :



- 1b- La plus petite valeur de D qui annule la visibilité est : $D_{\Delta\sigma} = \frac{1}{\Delta\sigma}$.

- 2a- On voit d'après la question précédente qu'il suffit que D soit quelques fois plus grand que

$\frac{1}{\sigma_2 - \sigma_1}$ pour que la visibilité tende vers 0. En l'absence de la raie d'absorption, le signal serait

uniforme : $S_C(D) = kI_C$.

- 2b- En modélisant le profil I_0 par des fonctions carrées, l'intensité est donnée par :

$$I = \frac{I_C}{\sigma_2 - \sigma_1} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} (1 + \cos 2\pi\sigma D) d\sigma - \frac{I_a}{\Delta\sigma} \int_{\sigma_0 - \Delta\sigma/2}^{\sigma_0 + \Delta\sigma/2} (1 + \cos 2\pi\sigma D) d\sigma$$

Après calculs (identiques à ceux de la question 1a), on trouve :

$$I = I_C \left(1 + \frac{\sin \pi (\sigma_2 - \sigma_1) D}{\pi (\sigma_2 - \sigma_1) D} \cos 2\pi \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right) D \right) - I_a \left(1 + \frac{\sin \pi \Delta \sigma D}{\pi \Delta \sigma D} \cos 2\pi \sigma_0 D \right)$$

Si $D \gg \frac{1}{\sigma_2 - \sigma_1}$, alors $\frac{\sin \pi (\sigma_2 - \sigma_1) D}{\pi (\sigma_2 - \sigma_1) D} \rightarrow 0$. De la même façon, si $\Delta \sigma \rightarrow 0$ alors

$\frac{\sin \pi \Delta \sigma D}{\pi \Delta \sigma D} \rightarrow 1$. L'expression de l'intensité est la suivante :

$$I = I_C - I_a - I_a \cos(2\pi \sigma_0 D)$$

En négligeant l'intensité I_a devant I_C , on obtient la formule demandée par l'énoncé avec

$$C = -\frac{I_a}{I_C}$$

(on devrait plutôt appeler ce terme « visibilité » plutôt que contraste)

III Elargissement et décalages possibles des raies spectrales. Evaluation de la différence de marche optimale.

1a- Cette vitesse est telle que : $\frac{1}{2} m_H V_T^2 = \frac{3}{2} k_B T$.

$$1b- \sigma = \frac{1}{\lambda} = \frac{v}{c} \text{ et } \Delta \sigma = \frac{\Delta v}{c} = v_0 \frac{V \cos \theta}{c^2} = \frac{\sigma_0}{c} V \cos \theta$$

La valeur de $\cos \theta$ variant entre +1 et -1, on obtient l'évaluation : $\Delta \sigma_K = \sigma_0 \frac{2V_T}{c}$.

1c- On trouve $V_T = 1,22 \cdot 10^4 \text{ m.s}^{-1}$ et $\Delta \sigma_K = 1,63 \cdot 10^2 \text{ m}^{-1}$.

2a- Si $\psi = 0$, on n'aura aucun effet, car toutes les vitesses seront dans un plan perpendiculaire à la direction d'observation.

Par contre si $\psi = \frac{\pi}{2}$, l'effet sera maximum. On obtient un élargissement Doppler car toutes les vitesses comprises entre $-V_{\text{rot}} = -R\Omega$ et $V_{\text{rot}} = R\Omega$ où R est le rayon de l'étoile et Ω sa vitesse angulaire de rotation sont représentées du centre vers la périphérie de l'étoile.

2b- On aura donc : $\Delta \sigma_{\text{rot}} = \sigma_0 \frac{2V_{\text{rot}}}{c}$. Ce dernier terme sera comparable au précédent si $V_{\text{rot}} \approx V_T$.

2c- On trouve $V_{\text{rot}} = 1,22 \cdot 10^4 \text{ m.s}^{-1}$.

3a- Le nombre d'onde est maintenant une fonction du temps selon : $\sigma(t) = \sigma_0 + \sigma_0 \frac{\Delta v(t)}{c}$. On a donc :

$$S(D_0) = S_0 \left(1 + C \cos 2\pi \sigma_0 \left(1 + \frac{\Delta v(t)}{c} \right) D_0 \right)$$

Cela conduit immédiatement à la réponse proposée par l'énoncé.

3b- D_0 doit être un compromis :

- Comme le rapport $\frac{\Delta v(t)}{c}$ est très petit devant 1, n risque d'avoir $\Delta\phi = 2\pi\sigma_0 \frac{\Delta v(t)}{c} D_0 \ll \pi$ et $S(D_0)$ serait quasiment constant. Il faut pour détecter une variation de la phase, imposer une relation du type $\Delta\phi > \Delta\phi_{\text{lim}}$ (par exemple $\pi/10$) et donc $D_0 > D_{0\text{lim}} = \frac{\Delta\phi_{\text{lim}}}{2\pi} \frac{c}{\sigma_0 \Delta v(t)}$ (le plus grand si possible) si l'on veut une détection optimale
- Si D_0 est trop élevé le caractère **quasi** monochromatique de la raie provoque une baisse de contraste. Il faut donc $D_0 < \frac{1}{2\Delta\sigma_K} = \frac{c}{4\sigma_0 V_T}$ (le facteur $\frac{1}{2}$ permet de maintenir un contraste important)

3c- Ainsi on pourra choisir $D_0 = \frac{\Delta\phi}{2\pi} \frac{c}{\sigma_0 \Delta v(t)} \sim \frac{c}{4\sigma_0 V_T}$ soit $\Delta\phi \sim \frac{\pi}{2} \frac{\Delta v(t)}{V_T} \sim \frac{\Delta v(t)}{V_T}$

On retrouve bien que $\Delta\phi \sim \frac{\Delta v(t)}{V_T}$

4- Sur Terre, la vitesse varie sur $\pm\omega_T R_T \cos\lambda$ avec $\omega_T = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$. L'amplitude de la vitesse est de l'ordre de quelques centaines de mètres par seconde. Cet effet est extrêmement important devant celui des oscillations sismiques, mais on dispose d'un atout : sa fréquence plus basse d'un facteur 100 par rapport à celle des ondes sismiques (10^{-2} s^{-1}). En utilisant un filtre passe-haut, on devrait pouvoir éliminer ce signal terrestre.

IV Amélioration du montage interférométrique

Cette partie du sujet soulève, à mon avis, des interrogations.

1a- La conservation de l'énergie (ou du flux) lumineux, la réponse attendue est que la somme des deux intensités doit donner une valeur constante. Ainsi, le

signal S_2 est : $S_2 = \frac{S_0}{2} (1 - C \cos \psi)$

Remarque : cela peut sembler surprenant les deux voies étant identiques. Pour comprendre l'origine de la dissymétrie il faut revenir sur la modélisation des lames semi réfléchissantes idéales (cf schéma ci-contre)

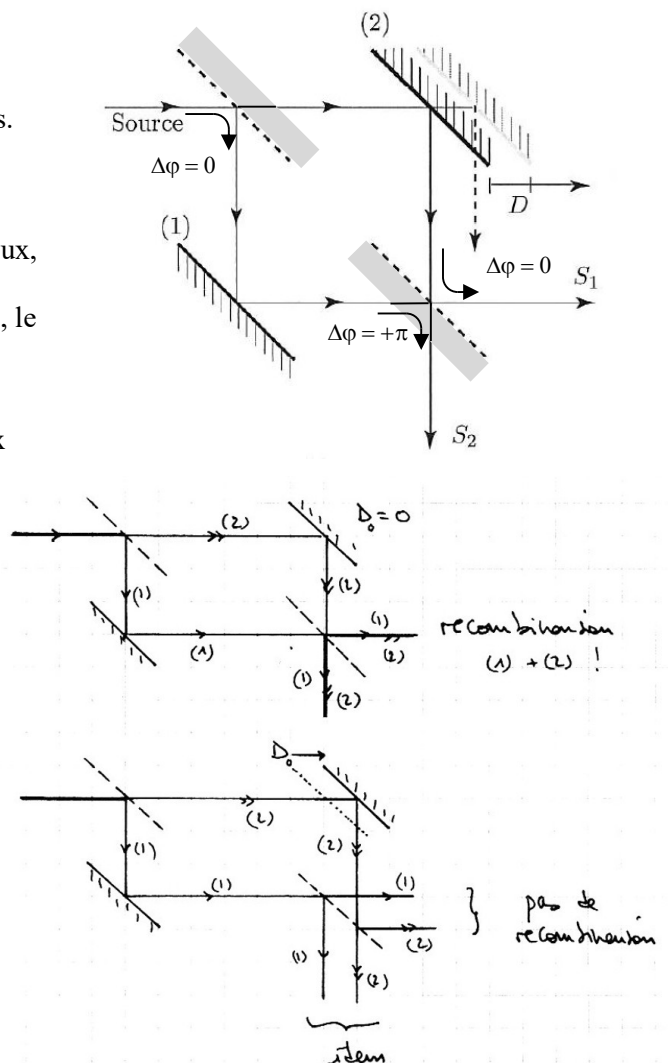
1b- Par addition et soustraction, on obtient

facilement : $C \cos \psi = \frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2}$

1c- Un schéma montre le résultat attendu

La recombinaison suppose $D_0 = 0$.

Or l'observation impose au contraire une valeur élevée de D_0 et, ce qui est pire, si



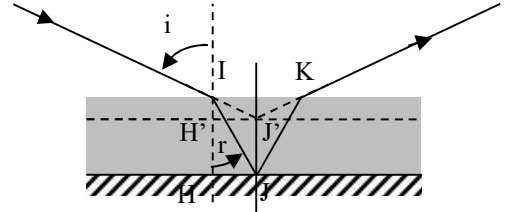
$D_0 = 0$ alors $\varphi(t) = 0$ pour tout v . Il y a donc un problème.

2a- L'énoncé propose uniquement d'interposer une lame contre l'un des miroirs pour introduire une différence de marche.

Ce calcul est en fait assez compliqué : il faut déterminer le rayon de référence par rapport auquel calculer la différence de marche. Comme on souhaite une recombinaison des rayons en sortie, de l'interféromètre, il faut le rayon réfléchi dans la situation étudiée (avec lame) et le rayon de référence soit confondu.

$$\begin{aligned} D &= n(IJ + JK) - (IJ' + J'K) = n \cdot \frac{IK}{\sin r} - \frac{IK}{\sin i} \\ &= n \cdot \frac{IK}{\sin r} - \frac{IK}{n \sin r} = \frac{IK}{\sin r} \left(n - \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{2e \tan r}{\sin r} \left(n - \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

Et on retrouve bien $D = \frac{2e}{\cos r} \left(n - \frac{1}{n} \right)$



2b- A partir des valeurs numériques fournies, on trouve un angle $r = 27^\circ$ et

$$e = \frac{D \cos r}{2 \left(n - \frac{1}{n} \right)} = 3,9 \text{ mm}$$

2c- On a en fait discuté de cette question au 2a : le choix de l'épaisseur et du rayon réfléchi superposé au « rayon de référence » permet d'assurer une recombinaison en sortie (rayon 2 superposé au « rayon 1 de référence » tout en réalisant $D_0 \neq 0$)

Problème 3 Centrale TSI

I- Etude d'une turbine

I-A-1- Considérons le système fermé S^* constitué :

à t du fluide dans la turbine à t et de la masse $\delta m_{\text{entrant}}$ entrant dans la turbine entre t et $t+dt$

à $t+dt$ du fluide dans la turbine à $t+dt$ et de la masse $\delta m_{\text{sortant}}$ sortant de la turbine entre t et $t+dt$.

La masse étant conservative $m^*(t+dt) = m^*(t)$ soit $m(t+dt) + \delta m_{\text{sortant}} = m(t) + \delta m_{\text{entrant}}$

Or, en régime stationnaire, $m(t+dt) = m(t)$ et $\delta m_{\text{entrant}} = D_{m1} dt$ et $\delta m_{\text{sortant}} = D_{m2} dt$

Donc $D_{m1} = D_{m2}$

On notera D_m le débit massique.

I-A-2- Cf cours (en négligeant les variations d'énergie potentielle de pesanteur cf remarque à la question suivante)

I-B-1- La formule précédente donne $P_Q = D_m \left[(h_2 - h_1) + \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) \right] - P_W = -772 \text{ kW} < 0$

Lors de cette évolution l'enthalpie massique et l'énergie cinétique du fluide diminuent : celui-ci fournit du travail à la turbine ($P_W < 0$; c'est le but) et évacue également de l'énergie vers l'extérieur par transfert thermique $P_Q < 0$ (énergie perdue)

Remarque : on peut calculer ici l'élévation dans le champ de pesanteur qui rendrait des variations d'énergie potentielle de pesanteur non négligeable :

$$g(z_2 - z_1) \approx h_2 - h_1 \Rightarrow \Delta z \approx \frac{|h_2 - h_1|}{g} \approx 60 \text{ km} !$$

I-B-2- $\left| \frac{P_Q}{P_W} \right| = 6,71.10^{-2}$

ou $\left| \frac{P_Q}{P_W + P_Q} \right| = 6,29.10^{-2} : 93,7 \% \text{ de l'énergie du fluide est convertie en travail et seul } 6,3\% \text{ est}$

« perdue » sous forme de chaleur. Le fonctionnement de la turbine semble donc satisfaisant.

I-B-3- $\left| \frac{\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2}}{h_2 - h_1} \right| = 1,59.10^{-2} \ll 1$

L'énergie libérée vient essentiellement (à plus de 98%) de la chute de P et de T du fluide entre l'entrée et la sortie ; la chute de vitesse ne libère que peu d'énergie.

Version approché du premier principe (en écoulement stationnaire) pour cette turbine :

$$D_m(h_2 - h_1) = P_W$$

II- Etude d'une turbine fonctionnant suivant un cycle de Joule

II-A-1- Les isentropiques sont des adiabatiques réversibles pour lesquelles on a $PV^\gamma = \text{cst}$ (loi de Laplace du gaz parfait avec γ constant). Ce sont des branches d'hyperboles dans le diagramme.

II-A-2- En divisant la relation du **I-A-2-** par le débit massique D_m et en négligeant les termes d'énergie cinétique, on a pour

chaque étape : $\underbrace{c_p \Delta T}_{\text{pour un gaz parfait}} = \underbrace{\frac{P_Q + P_W}{D_m}}_{q+w}$ où w et q sont le travail et le

transfert thermique reçus par l'unité de masse de gaz qui traverse la partie considérée.

Pour chaque étape

$1 \rightarrow 2$	$w = w_c$ et $q = 0$	$w_c = c_p (T_2 - T_1) > 0$
$2 \rightarrow 3$	$w = 0$ et $q = q_E$	$q_E = c_p (T_3 - T_2) > 0$
$3 \rightarrow 4$	$w = w_T$ et $q = 0$	$w_T = c_p (T_4 - T_3) < 0$
$4 \rightarrow 1$	$w = 0$ et $q = q_s$	$q_s = c_p (T_1 - T_4) < 0$

Pour $1 \rightarrow 2$ et $3 \rightarrow 4$, $q = 0$ car l'évolution est adiabatique (isentropique)

Pour $2 \rightarrow 3$ et $4 \rightarrow 1$, $w = 0$ car le gaz n'est en contact avec aucune partie mécanique avec laquelle il pourrait échanger du travail.

II-A-3- $w_F = -w_{\text{reçu par le gaz en un cycle}} = -(w_T + w_c) > 0$ (pour un fonctionnement en turbine)

II-A-4- $\eta = \frac{\text{grandeur utile}}{\text{grandeur coûteuse}} = \frac{w_F}{q_E}$ (c'est un moteur)

D'où $\eta = \frac{-c_p ((T_4 - T_3) - (T_2 - T_1))}{c_p (T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$

On veut éliminer T_3 et T_4 de la formule : il faut faire le lien entre les diverses températures. On pourra appliquer la loi de Laplace aux isentropiques $1 \rightarrow 2$ et $3 \rightarrow 4$

$1 \rightarrow 2$: $T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_1 \alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ en posant $\alpha = \frac{P_2}{P_1}$

$3 \rightarrow 4$: $T_4 = T_3 \left(\frac{P_4}{P_3} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_3 \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_3 \alpha^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$

Ainsi $\eta = 1 - \frac{T_3 \alpha^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - T_1}{T_3 - T_1 \alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = 1 - \frac{T_3 \alpha^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - T_1}{T_3 - T_1 \alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = 1 - \alpha^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \frac{T_3 - T_1 \alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{T_3 - T_1 \alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$

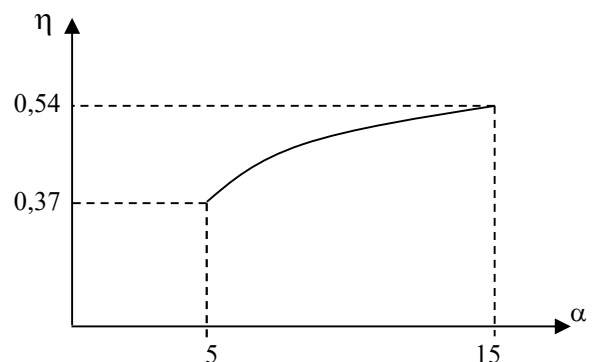
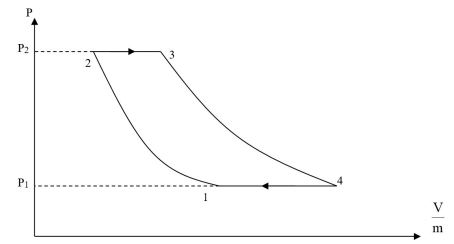
Donc $\eta = 1 - \alpha^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$

II-A-5- Cf question précédente

$\eta = 1 - \alpha^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$

II-A-6- cf graphique ci-contre.

$\gamma = 1,4$ $\frac{1-\gamma}{\gamma} = -\frac{2}{7}$



II-A-7- AN :

$T_2 = 579 \text{ K}$	$T_4 = 673 \text{ K}$	
$w_c = 282 \text{ kJ.kg}^{-1}$	$w_T = -632 \text{ kJ.kg}^{-1}$	$q_E = 727 \text{ kJ.kg}^{-1}$
$\eta = 48,2\%$		

II-B-1- Les relations entre les termes énergétiques et les températures du II-A-2- sont toujours valables avec les nouvelles valeurs w_{Ca} , T_{2a} , ... On a donc

$$w_{Ca} = c_p (T_{2a} - T_1) \text{ et } w_{Ta} = c_p (T_{4a} - T_3)$$

$$\text{On a donc } \eta_c = \frac{w_c}{w_{Ca}} = \frac{T_2 - T_1}{T_{2a} - T_1} \text{ donne } T_{2a} = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\eta_c} \quad (> T_2)$$

$$\text{De même : } \eta_T = \frac{w_{Ta}}{w_T} = \frac{T_{4a} - T_3}{T_4 - T_3} \text{ donne } T_{4a} = T_3 + \eta_T (T_4 - T_3) \quad (> T_4)$$

II-B-2- Les évolutions $1 \rightarrow 2a$ et $3 \rightarrow 4a$ ne sont plus isentropique. Toutefois, elles restent adiabatiques : c'est la réversibilité qui est remise en cause dans le fonctionnement du compresseur et de la turbine. Ainsi le second principe appliqué au gaz en écoulement à travers l'une ou l'autre

$$\text{de ces parties actives donne : } \Delta s = \underbrace{s_{\text{échangée}}}_{=0 \text{ adiabatique}} + \underbrace{s_{\text{créée}}}_{>0 \text{ irréversible}} > 0 \quad \text{donc} \quad \begin{matrix} s_2 > s_1 \\ s_4 > s_3 \end{matrix}$$

II-B-3- Comme au **II-A-4-**

$$\eta_a = \frac{-(w_{Ca} + w_{Ta})}{q_{Ea}} = 1 - \frac{T_{4a} - T_1}{T_3 - T_{2a}}$$

$\eta_a < \eta$: l'irréversibilité amène une baisse du rendement.

II-B-4- La seconde identité thermodynamique (écrite en grandeur massique) : $dh = Tds + vdp$ permet de calculer Δs pour le gaz parfait : $ds = c_p \frac{dT}{T} - r \frac{dp}{p}$ avec $r = \frac{R}{M}$ (constante des gaz parfait massique)

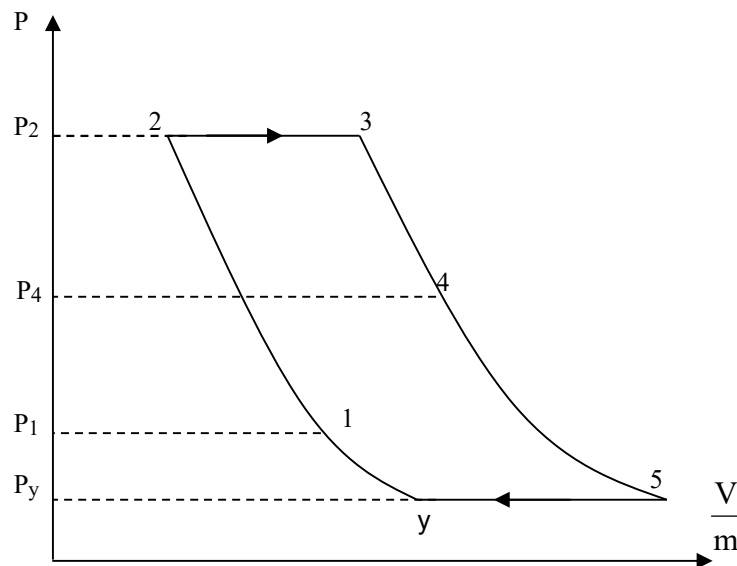
$$\begin{matrix} \text{Ainsi} & \begin{matrix} \Delta s_{Ca} = c_p \ln \frac{T_{2a}}{T_1} - r \ln \frac{P_1}{P_2} = c_p \ln \frac{T_{2a}}{T_1} - r \ln \alpha \\ \Delta s_{Ta} = c_p \ln \frac{T_{4a}}{T_3} + r \ln \alpha \end{matrix} \end{matrix}$$

II-B-5- Applications numériques :

$T_{2a} = 641 \text{ K}$	$T_{4a} = 767 \text{ K}$
$\Delta s_{Ca} = 102 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$	$\Delta s_{Ta} = 132 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$
$\eta_a = 29,1 \%$	

On vérifie que $T_{2a} > T_2$ et $T_{4a} > T_4$ et que Δs_{Ca} et $\Delta s_{Ta} > 0$

Partie III – Etude d'un turboréacteur



III-A-1- Attention $P_4 \neq P_1$ a priori.

On peut même dire que $w_T = c_p (T_4 - T_3)$ et si $P_4 = P_1$ alors $|w_T| > w_c = c_p (T_2 - T_1)$; et ici

$$|w_T| = w_c \text{ donc } \underbrace{T'_4}_{\text{nouvelle valeur}} > \underbrace{T_4}_{\substack{\text{ancienne} \\ \text{valeur tq} \\ P_4 = P_1}} \text{ et } P_4 > P_1$$

III-A-2-a- Le diffuseur est un dispositif qui ralentit le gaz et élève sa pression (par diffusion dans un matériau poreux probablement) mais qui n'échange ni travail ni chaleur avec celui-ci.

Le premier principe en écoulement donne donc ici : $D_m \left[\left(h_1 + \frac{v_1^2}{2} \right) - \left(h_y + \frac{v_y^2}{2} \right) \right] = 0$ avec $v_1 = 0$

$$\text{D'où } \Delta h = c_p (T_1 - T_y) = \frac{v_y^2}{2} \text{ soit } \boxed{T_1 - T_y = \frac{v_y^2}{2c_p}}$$

III-A-2-b- AN $T_1 = 299,5 \text{ K}$ | et avec $T_y^\gamma P_y^{1-\gamma} = T_1^\gamma P_1^{1-\gamma}$, on obtient $P_1 = 1,01 \text{ bar}$ |.

On trouve des valeurs très proches des valeurs indiquées au II : 300K et 1,03 bar

III-A-3-a- On a toujours
$$W_C = c_p (T_2 - T_1) = c_p T_1 \left(\alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)$$

Or $W_T = c_p(T_4 - T_3) = -W_C$ d'où $T_4 = T_3 - \frac{W_C}{c_p} = T_3 - T_1 \left(\alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)$

$$\text{Enfin } P_4 = P_3 \left(\frac{T_3}{T_4} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = P_2 \left(\frac{T_3}{T_4} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = P_2 \left(1 - \frac{T_1}{T_3} \left(\alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

III-A-3-b- Applications numériques :	$W_c = 281 \text{ kJ.kg}^{-1}$	$T_4 = 1021 \text{ K}$
	$P_4 = 4,36 \text{ bar} > P_1$ comme prévu	$T_2 = 578 \text{ K}$

III-A-4-a- $\boxed{c_p(T_5 - T_4) = -\frac{v_5^2}{2}}$ w et q sont nuls (cf diffuseur) et v_4 négligeable

III-A-4-b- Loi de Laplace $T_5 = T_3 \left(\frac{P_3}{P_y} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$ avec $P_3 = P_2 = \alpha P_1$

A.N. : $T_5 = 598 \text{ K}$ et $v_5 = \sqrt{2c_p(T_4 - T_5)} = 924 \text{ m.s}^{-1}$

On trouve une vitesse supérieure à la vitesse du son. Cette vitesse est surévaluée du fait de l'hypothèse de réversibilité du fonctionnement du compresseur et de la turbine.

III-A-5-a- Par le principe des actions réciproques, la force de poussée est l'opposée de la force subie par le gaz c'est-à-dire sa variation de quantité de mouvement par unité de temps. On, entre t et $t+dt$, la quantité $\delta m = D_m dt$ s'écoule et tout se passe comme si cette masse voyait sa vitesse passer de v_y à v_5

D'où le terme $F = \frac{dp}{dt} = \frac{\delta m(v_5 - v_y)}{dt} = D_m(v_5 - v_y)$

III-A-5-b- $P_F = F.v_y = D_m.v_y.(v_5 - v_y)$

III-A-5-c- $q_E = c_p(T_3 - T_2)$ et $P_{QE} = D_m q_E = D_m.c_p.(T_3 - T_2)$

III-A-5-d- $\eta_M = \frac{P_F}{P_{QE}} = \frac{v_y(v_5 - v_y)}{c_p(T_3 - T_2)}$

III-A-5-e- Applications numériques :

$$\begin{aligned} P_F &= 1,21.10^7 \text{ W} = 12,1 \text{ MW} \\ P_{QE} &= 5,09.10^7 \text{ W} = 50,9 \text{ MW} \\ \eta_M &= 23,7 \% \end{aligned}$$

Ceci est une justification « rapide » et qualitative. Une justification « propre » est donnée en complément à la page suivante.