

Diffusion thermiques

Utiliser dès que possible la notion de conductance ou de résistance thermique.

Exercice 1 : Table de billard.

On étudie les transferts thermiques au sein d'une table de billard de dimensions horizontales 2,4 m par 1,2 m, et d'épaisseur verticale égale à 10 cm. Le long de l'axe vertical, la table est constituée d'un empilement de 3 « couches » :

- La première couche est une plaque chauffante d'épaisseur $e_1 = 4\text{ cm}$ et de conductivité thermique $\Lambda_1 = 60\text{ W/Km}$, constituée d'une répartition uniforme de résistances fournissant une puissance volumique p , et isolée thermiquement sur sa face inférieure ;
- La seconde couche, qui surmonte la plaque chauffante, est une plaque de marbre d'épaisseur $e_2 = 2\text{ cm}$ et de conductivité thermique $\Lambda_2 = 3,3\text{ W/Km}$;
- Enfin, la couche supérieure est un tapis d'épaisseur $e_3 = 4\text{ cm}$ et de conductivité thermique $\Lambda_3 = 0,4\text{ W/Km}$ dont la température de surface, en contact avec l'air, est $T_s = 40^\circ\text{C}$.

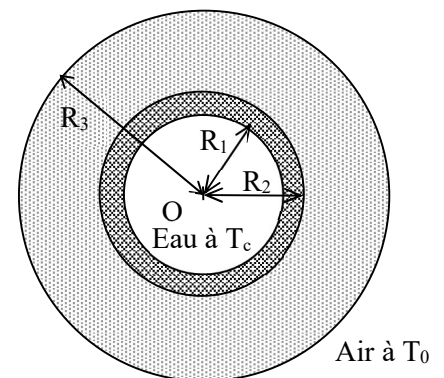
La température atmosphérique est $T_a = 20^\circ\text{C}$ et il y a entre le tapis et l'air un coefficient de transfert $h = 10\text{ W/Km}^2$.

- 1- Schématiser l'ensemble de la table et calculer, en régime permanent, le flux thermique évacué par la table ; en déduire la température à la jonction entre la plaque chauffante et la plaque de marbre.
- 2- Déterminer le champ de température dans la partie chauffante ainsi que la puissance volumique fournie par les résistances chauffantes.

Exercice 2 : Isolation d'une canalisation d'eau.

On considère une canalisation cylindrique de rayons intérieur et extérieur R_1 et R_2 , contenant de l'eau chaude à la température T_c uniforme. Cette canalisation métallique, de conductivité thermique λ , est entourée d'une gaine isolante de conductivité thermique λ' et de rayon extérieur R_3 . La gaine est en contact avec de l'air à la température T_0 uniforme (vue en coupe ci-dessous).

On étudie les transferts thermiques au sein du dispositif en régime permanent. La température est continue à l'interface métal-gaine ($R = R_2$) mais discontinue aux interfaces eau-métal ($R = R_1$) et gaine-air ($R = R_3$) où il existe des transferts de nature conducto-convective ; le coefficient de transfert conducto-convectif est le même pour chaque interface et est noté h .



Discuter rapidement le modèle et donner l'unité de h . Puis, en utilisant la notion de résistance thermique (on rappellera les conditions de validité d'une telle approche), discuter l'efficacité du système d'isolation ; on pourra mener cette discussion en deux temps :

- a) Comparaison des pertes thermiques avec et sans la gaine isolante.
- b) Détermination de la valeur de R_3 qui minimise les pertes thermiques lorsqu'on utilise la gaine.

Valeurs numériques utiles :

$$\lambda = 100\text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1} ; \lambda' = 10^{-2}\text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1} ; h = 100\text{ uSI} ; R_1 = 8\text{ cm} ; R_2 = 10\text{ cm}.$$

Exercice 3 : Une pomme.

Une pomme de rayon $R = 40 \text{ mm}$ est placée dans l'air à $T_e = 5^\circ\text{C}$. Les réactions chimiques à l'intérieur de la pomme produisent une puissance massique : $\dot{Q} = 4 \text{ kJ.kg}^{-1}/\text{jour}$. Les autres données caractérisant la pomme sont :

Coefficient de transfert conducto-convectif avec l'air : $h = 7,5 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-2}$

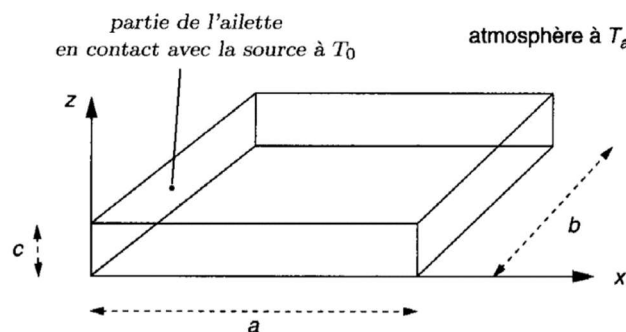
Masse volumique : $\rho = 840 \text{ kg.m}^{-3}$ – Conductivité thermique : $\kappa = 0,5 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$

- 1- Déterminer, en régime stationnaire, les températures T_s et T_c à la surface et au centre de la pomme.
- 2- Proposer une estimation du temps caractéristique de régime transitoire ? A-t-on tous les paramètres ? Evaluer numériquement le paramètre manquant puis ce temps caractéristique.

Exercice 4 : Ailette de refroidissement.

Pour évacuer de la chaleur d'une source vers l'atmosphère, on a souvent recours au dispositif représenté sur la figure ci-dessous et constitué d'une plaque de côtés a selon $\vec{u}_x$, b selon $\vec{u}_y$ et $c \ll b$ selon $\vec{u}_z$ collée en $x = 0$ à la source de chaleur qui impose $T(x = 0) = T_0$. Cette plaque, de conductivité thermique λ , est plongée dans l'atmosphère, qui est assimilée à une source de température T_a constante. On étudie un régime stationnaire.

On prend en compte l'existence de transferts thermiques conducto-convectifs entre l'ailette et l'air, avec un coefficient caractéristique noté h . On admet toutefois que si ces transferts ne sont pas trop intenses, les transferts thermiques diffusifs au sein de l'ailette se font essentiellement le long de l'axe (Ox) et que l'on peut supposer que la température à l'intérieur de l'ailette ne dépend quasiment que de x .

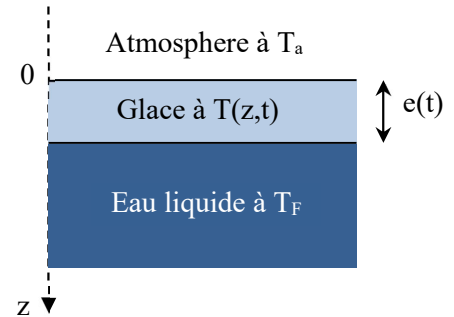


- 1- En faisant un bilan pour la tranche de plaque comprise entre x et $x+dx$, montrer que $T(x)$ est solution d'une équation de la forme : $-\delta^2 \frac{d^2 T}{dx^2} + T = T_a$ et exprimer δ en fonction de h , λ , b et c ; simplifier dans la limite $c \ll b$
- 2- On suppose que $a \ll \delta$ de telle sorte qu'on peut raisonner sur une plaque de longueur a infinie. A l'extrémité de la plaque, l'atmosphère impose $T(x \rightarrow \infty) = T_a$. Etablir l'expression de $T(x)$ en fonction de T_0 , T_a , x et δ ; tracer l'allure de son graphe et interpréter concrètement δ . Comment un industriel choisira-t-il la longueur effective a de la plaque par rapport à δ ?
- 3- Calculer le flux thermique total Φ évacué par l'ailette en fonction de h , b , δ , T_0 et T_a .
- 4- En l'absence d'ailette, la surface d'échange entre le source et l'atmosphère serait bc et le flux évacué vers l'atmosphère vaudrait $\Phi_0 = h.bc(T_0 - T_a)$. Exprimer le rendement de l'ailette $\eta = \frac{\Phi}{\Phi_0}$ en fonction de h , λ et c . Quel est l'intérêt de prendre $c \ll b$
- 5- Connaissez-vous des systèmes concrets qui utilisent une ailette de refroidissement ?

Exercice 5 : Gel d'un lac.

Exemple de régime quasi stationnaire

Lorsque l'air au-dessus d'un lac de surface S est à température $T_a < T_F$ (cf figure ci-dessous), on constate que l'épaisseur $e(t)$ de la couche de glace croît lentement avec $e(t) \propto \sqrt{t}$ pour t élevée. On note T_F la température de l'eau liquide, supposée uniforme, et $T(z,t)$ la température de la glace pour $0 \leq z \leq e(t)$. On suppose que le profil de température $T(z,t)$ est les même que si le régime était stationnaire (approximation des régimes quasi-stationnaires). On donne la température de fusion $T_F = 273\text{K}$ et la chaleur latente de fusion $\ell_F = 330\text{kJ.kg}^{-1}$ de la glace, ainsi que sa volumique $\mu = 1,00.10^3\text{kg.m}^{-3}$, sa capacité calorifique massique $c = 4,18\text{kJ.K}^{-1}\text{kg}^{-1}$ et sa conductivité thermique λ . On adoptera la même valeur μ pour la masse volumique de l'eau liquide.



- 1- On suppose que l'air impose sa température T_a à la surface du lac c'est-à-dire que $T(z=0,t) = T_a$ (hypothèse H)
 - 1a- Exprimer le flux thermique Φ traversant la couche de glace dans le sens des z décroissants en fonction de λ , $e(t)$, S , T_a et T_F .
 - 1b- En faisant un bilan pour la couche de glace qui gèle entre les instants t et $t+dt$, montrer que $e(t)$ est solution de $e \frac{de}{dt} = \frac{\lambda(T_F - T_a)}{\mu \ell_F}$ et déterminer $e(t)$ pour $e(t=0) = e_0$
 - 1c- En déduire une durée caractéristique τ des variations de $e(t)$. Discuter la validité de l'ARQS
- 2- En réalité l'hypothèse (H) n'est pas satisfaisante en général : le transfert thermique de la glace vers l'air met en jeu simultanément la diffusion thermique selon $\vec{u}_z$ et la convection selon $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$: on parle de transport conducto-convectif. Dans ce cas, la loi phénoménologique de Newton donne l'expression du flux thermique $\Phi_{cc} = hS(T_s - T_a)$ où $T_s = T(z=0,t)$ est la température de la surface du lac et h un coefficient constant, d'autant plus élevé qu'un vent fort souffle au-dessus du lac.
 - 2a- Justifier brièvement la continuité du flux thermique en $z = 0$
 - 2b- En déduire l'expression de T_s en fonction de T_a , T_F , h , λ et $e(t)$.
 - 2c- A quelle condition le modèle de la question 1 est-il valable ? Etablir la nouvelle expression de $e(t)$

Exercice 6 : Sensation de froid. (S'il reste du temps)

Exemple de régime transitoire

Lorsqu'on pose la main sur un table en bois et une table en acier, la table en bois paraît « plus chaude » alors que les deux tables sont à la même température. On se propose d'interpréter cet effet en adoptant le modèle suivant :

- La main est assimilée au demi-espace $x < 0$ et la table au demi-espace $x > 0$.
- Les conditions initiales à l'instant $t = 0$ où la main vient au contact de la table sont

$$T(x < 0, t = 0) = T_{01} = 37^\circ\text{C} \text{ et } T(x > 0, t = 0) = T_{02} = 17^\circ\text{C}$$

On nomme λ_1 et λ_2 les conductivités thermiques et D_1 et D_2 les diffusivités thermiques. On cherche des solutions de l'équation de la chaleur dans chaque milieu de la forme

Diffusion thermique TD

$$T(x < 0, t) = \alpha_1 + \beta_1 \int_0^{u_1} \exp(-v^2) dv \quad \text{avec} \quad u_1 = \frac{x}{2\sqrt{D_1 t}}$$

$$T(x > 0, t) = \alpha_2 + \beta_2 \int_0^{u_2} \exp(-v^2) dv \quad \text{avec} \quad u_2 = \frac{x}{2\sqrt{D_2 t}}$$

on rappelle que $\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{u(x,t)} g(v) dv \right) = g(u(x,t)) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$

1- En dehors de l'instant $t = 0$, on s'impose la continuité de la température en $x = 0$. Justifier brièvement par ailleurs la continuité du flux thermique $j_Q(x, t)$ en $x = 0$

2- Déterminer α_1 , β_1 , α_2 et β_2 . On posera $I = \int_0^\infty \exp(-v^2) dv$

3- En déduire que la température de l'interface se met sous la forme : $T_i = \frac{E_1 T_{01} + E_2 T_{02}}{E_1 + E_2}$

où l'effusivité E est une caractéristique du matériau qu'on exprimera en fonction de D et λ . Sachant que $E_{\text{main}} = 10^3$, $E_{\text{acier}} = 10^4$ et $E_{\text{bois}} = 10$ en unités du système international. Calculer T_i pour un contact main-bois et un contact main-acier et conclure.

4- En réalité la main et la table ont une épaisseur $e \approx 1\text{cm}$ finie. Montrer que le modèle des demi-espaces est valable pour un contact suffisamment bref.

5- Pour un contact long entre la main et la table, on adopte un modèle où le champ de température est stationnaire. Déterminer la température T_i de l'interface en fonction de λ_1 , λ_2 , T_{01} et T_{02} . Commenter.