

II- LE MILLENIUM BRIDGE

Appliquons la relation fondamentale de la dynamique à la masse m de barycentre G ayant pour coordonnée x , dans le référentiel terrestre supposé galiléen (*même si je m'en affranchis ici, un schéma est indispensable sur votre copie !*) :

$$\boxed{1} \quad m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha \dot{x} \widehat{u}_x - mg \widehat{u}_x - k(\ell - \ell_0) \widehat{u}_x$$

D'après l'énoncé, $\ell = OG = x$. Projetons cette relation sur $\widehat{u}_x$:

$$m\ddot{x} = -\alpha \dot{x} - mg - k(x - \ell_0)$$

Divisons cette égalité par m et posons :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad 2\xi\omega_0 = \frac{\alpha}{m}$$

Il vient
$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2(x - \ell_0) + g = 0$$

Notons $\tilde{x}$ la valeur de x à l'équilibre. Alors,

$$\omega_0^2(\tilde{x} - \ell_0) + g = 0$$

Il s'ensuit que

$$\boxed{\tilde{x} = \ell_0 - \frac{g}{\omega_0^2}}$$

Posons $x(t) = X(t) + \tilde{x}$, où $X(t)$ représente la position de G par rapport à sa position à l'équilibre. L'équation du mouvement devient :

$$\ddot{X} + 2\xi\omega_0 \dot{X} + \omega_0^2 \left(X + \ell_0 - \frac{g}{\omega_0^2} - \ell_0 \right) + g = 0$$

Après simplification, il apparaît que

$$\boxed{\ddot{X} + 2\xi\omega_0 \dot{X} + \omega_0^2 X = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{\alpha}{2\sqrt{mk}}}$$

La constante ω_0 est la **pulsation propre**, c'est la pulsation naturelle de l'oscillateur en l'absence d'amortissement. Le coefficient ξ est le **facteur d'amortissement**, il croît proportionnellement avec le coefficient de frottement α .

ξ est lié au facteur de qualité Q par : **$Q = 1 / 2\xi$**

$\boxed{2}$ Pour $\xi = 0$, l'équation du mouvement devient :

$$\boxed{\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0}$$

Il s'agit de l'équation de l'**oscillateur harmonique** de pulsation ω_0 . La solution $X(t)$ est de la forme :

$$X(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

Avec les conditions initiales imposées, on obtient que :

$$A = X(0) = X_0 \quad \text{et} \quad B \omega_0 = \dot{X}(0) = V_0$$

Par conséquent,

$$\boxed{X(t) = X_0 \cos \omega_0 t + \frac{V_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t} \quad (\text{pour } \xi = 0)$$

Pour $0 < \xi < 1$, en cherchant des solutions sous forme $X(t) = A e^{pt}$, on aboutit à l'équation caractéristique :

$$p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2 = 0$$

dont le discriminant est $\Delta = 4\omega_0^2(\xi^2 - 1) < 0$

Il s'ensuit que $p = -\xi\omega_0 \pm i\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$

Ainsi, $X(t)$ est de la forme :

$$X(t) = (A \cos \omega_a t + B \sin \omega_a t) e^{-\xi\omega_0 t} \quad \text{avec} \quad \omega_a = \omega_0 \sqrt{1-\xi^2}$$

Cette fois, les conditions initiales se traduisent par

$$A = X(0) = X_0 \quad \text{et} \quad -A\xi\omega_0 + B\omega_a = \dot{X}(0) = V_0$$

si bien que

$$X(t) = \left(X_0 \cos \omega_a t + \frac{1}{\omega_a} [V_0 + \xi\omega_0 X_0] \sin \omega_a t \right) e^{-\xi\omega_0 t} \quad \text{avec} \quad \omega_a = \omega_0 \sqrt{1-\xi^2}$$

On observe des **pseudo-oscillations**.

Enfin, l'ajout d'une force due au vent revient à changer α en $\alpha - \beta$, c'est-à-dire à redéfinir le facteur d'amortissement ξ et à l'écrire :

$$\xi = \frac{\alpha - \beta}{2m\omega_0}$$

Si $\beta > \alpha$, $\xi < 0$ et l'oscillateur devient instable. **Sous l'effet du vent, l'oscillateur peut se mettre à osciller spontanément.**

3 La nouvelle équation du mouvement est

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2(x - \ell_0) + mg = -F_0 - F_1 \cos \omega t$$

Divisons par m et introduisons X , comme à la question 1,

$$\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = -\frac{F_0}{m} - \frac{F_1}{m} \cos \omega t$$

Comme $X = Y - F_0/(m\omega_0^2)$, il vient :

$$\ddot{Y} + 2\xi\omega_0\dot{Y} + \omega_0^2 Y = -\frac{F_1}{m} \cos \omega t$$

En régime sinusoïdal forcé (en posant $\underline{F}_1 = -F_1$), on a :

$$\underline{Y}(-\omega^2 + 2i\xi\omega_0\omega + \omega_0^2) = \frac{\underline{F}_1}{m}$$

Par conséquent,

$$\frac{\underline{Y}}{\underline{F}_1} = \frac{1}{-\omega^2 + 2i\xi\omega_0\omega + \omega_0^2}$$

donc

$$\underline{H} = \frac{1/\omega_0^2}{1 - \Omega^2 + 2i\xi\Omega}$$

On aurait aussi pu poser $\underline{F}_1 = F_1$. Dans ce cas,

$$\underline{H} = -\frac{1/\omega_0^2}{1 - \Omega^2 + 2i\xi\Omega}$$

. $X(t)$ est la position par rapport au pont au repos sans piéton ;
 . $Y(t)$ est le déplacement par rapport à la position d'équilibre en présence du piéton ($x_{eq} = -\frac{F_0}{m\omega_0^2}$)

⚠ Compte tenu de sa def cette fonction $\underline{H}$ n'est pas adimensionnée :
 $[\underline{H}] = T^2 = [1/\omega_0^2]$

4 Une résonance se produit si $|\underline{H}|$ présente un maximum au voisinage d'une pulsation propre de l'oscillateur. Comme

$$|\underline{H}| = \frac{1}{\omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2}}$$

$|\underline{H}|$ présente un maximum lorsque le dénominateur atteint un minimum. Pour déterminer si ce minimum existe, il suffit de résoudre :

$$\frac{d}{d\Omega} [(1 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2] = 0$$

qui conduit à $-4\Omega(1 - \Omega^2) + 8\xi^2\Omega = 0$

soit encore : $\Omega^2 = 1 - 2\xi^2$

Cette équation n'admet de solution réelle que si $\Omega^2 > 0$. On en déduit qu'un phénomène de résonance n'est observé que si :

$$\boxed{\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}} \quad \left(\text{soit } Q = \frac{1}{2\xi} > \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Lorsque cette inégalité est vérifiée, une résonance est observée en

$$\boxed{\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}}$$

À résonance, $|\underline{H}(\omega_r)| = \frac{1}{\omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{4\xi^4 + 4\xi^2(1 - 2\xi^2)}}$

Si $\xi^2 \ll 1$, $|\underline{H}(\omega_r)| \simeq \frac{1}{\omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{4\xi^2}}$

d'où $\boxed{|\underline{H}(\omega_r)| \simeq \frac{1}{2\omega_0^2 \xi}} \quad (\text{pour } \xi^2 \ll 1)$

5 Tout d'abord, remarquons que pour $\xi^2 \ll 1$,

$$\omega_r \simeq \omega_0$$

Graphiquement, le maximum de la courbe est situé vers 12 rad.s⁻¹ donc

$$\boxed{\omega_0 \simeq 12 \text{ rad.s}^{-1}}$$

Puis, en mesurant l'ordonnée du point de résonance sur la courbe (9 dB) et en utilisant la formule ci-dessus, il vient :

$$20 \log(\omega_0^2 |\underline{H}(\omega_r)|) = -20 \log(2\xi) = 9$$

d'où $\boxed{\xi = \frac{10^{-9/20}}{2} \simeq 0,2} \quad (\text{soit } Q \approx 2,5)$

6 Il est important de connaître les fréquences de résonance d'une structure pour éviter qu'elle ne soit excitée à leur voisinage. Exciter à résonance un pont ou une tour peut entraîner des contraintes mécaniques internes importantes, qui peuvent conduire à la **destruction de l'édifice** (comme pour le **pont de Tacoma** à Washington ou le **pont de la Basse-Chaîne** à Angers).

7 On peut fixer sur la structure des **sismomètres** à induction électromagnétique ou des **accéléromètres**.

8 Le forçage étant périodique de valeur moyenne non nulle (d'après la figure 2), le spectre doit être constitué :

- d'un pic à la fréquence nulle correspondant à la composante continue ;

- d'un pic au voisinage de la fréquence fondamentale $f_s = 1/T \approx 2$ Hz ;
où T est la période du signal associé à la marche (cf. fig. 2) soit $\approx 0,5$ s.
- d'une suite de pics à des fréquences multiples de f_s . Ces fréquences sont les harmoniques.

De ce point de vue, **le seul spectre exploitable est le spectre 4**, puisqu'il est le seul à présenter des pics régulièrement espacés.

Les trois autres spectres sont inexploitable en raison de l'**effet de repliement du spectre**. Pour l'expliquer, calculons la fréquence d'échantillonnage $f_{\text{éch}}$ pour chaque spectre :

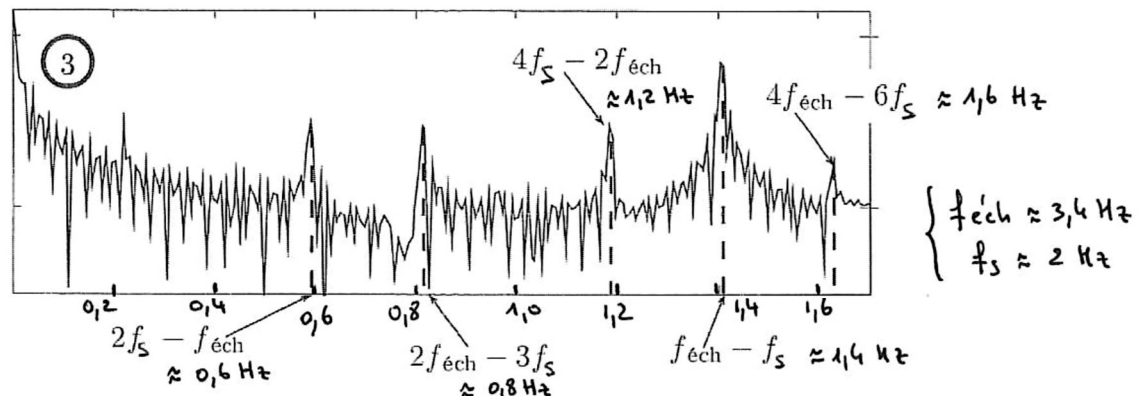
$$f_{\text{éch}} = \frac{299}{t_{\text{max}} - t_{\text{min}}}$$

On obtient le tableau suivant :

spectre	1	2	3	4
$f_{\text{éch}}$ (Hz)	1,7	11,5	3,4	33,2

critère de Shannon
pour le fondamental :
 $f_{\text{éch}} > 2f_s = 4 \text{ Hz}$

Pour les spectres 1 et 3, le **critère de Shannon** est mis en défaut pour le fondamental. Par exemple, pour le spectre 3, on peut identifier les pics fantômes :



Pour le spectre 2, on retrouve les pics aux fréquences 2 Hz et 4 Hz. En revanche, le **théorème de Shannon n'est pas respecté pour les harmoniques de fréquences supérieures à 6 Hz**, qui entraînent l'apparition de pics fantômes vers 3,3 et 5,3 Hz.

Le spectre 4 contient les fréquences 0 Hz (composante continue), $f = 2$ Hz puis 4 Hz, 6 Hz, etc. et donne donc une fréq de marche = 2 Hz, ce qui est en accord avec la figure 2, sur laquelle on observe deux oscillations du forçage en 1 s.

9 D'après la figure 3, en l'absence d'amortisseurs harmoniques, les oscillations du Millenium Bridge présentent une résonance en amplitude au voisinage de la fréquence de forçage 2 Hz (environ 12 rad.s^{-1}). Or, d'après la figure 4-4, **cette fréquence coïncide avec la fréquence fondamentale d'excitation due au passage des piétons**. Il n'est donc pas surprenant que le pont présente d'importantes oscillations si aucune précaution n'est prise.

La figure 3 montre que l'ajout d'amortisseurs harmoniques permet de scinder la résonance en deux résonances, situées de part et d'autre de la pulsation 12 rad.s^{-1} . On observe alors une **anti-résonance à la pulsation du fondamental du forçage par les piétons, ce qui est très favorable** ! Enfin, les deux nouvelles pulsations de résonance ne coïncident avec aucune fréquence présente dans le spectre de la figure 4-4. La marche des piétons ne risque donc pas d'exciter une des nouvelles résonances.