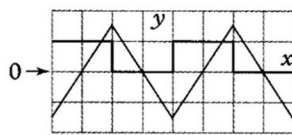


Filtrage et analyse de Fourier

Exercice 1 : caractéristique d'un filtre passe-bande.

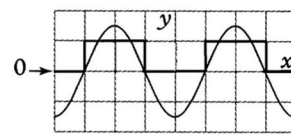
On considère un filtre passe-bande du second ordre de transmittance maximale H_0 , de pulsation propre ω_0 et de facteur de qualité Q inconnus. On réalise les deux expériences décrites ci-dessous, en appliquant un signal crêteau en entrée du filtre et en observant simultanément les signaux d'entrée et de sortie, en sortie ouverte.

Expérience 1 :



x : 1 carreau = 1 ms ;
 y : 1 carreau = 0,1 V
 pour le signal d'entrée
 et 20 mV pour le
 signal de sortie

Expérience 2 :



x : 1 carreau = 10 ms ;
 y : 1 carreau = 0,1 V
 pour le signal d'entrée
 et 2 V pour le signal de
 sortie

Dans l'expérience 2, si on augmente légèrement la fréquence du signal d'entrée, l'amplitude du signal de sortie diminue ; si on diminue légèrement cette fréquence l'amplitude diminue aussi.

- 1- Déterminer ω_0 , Q et H_0 à l'aide de ces deux expériences.
- 2- Déterminer les caractéristiques du signal de sortie si le crêteau d'entrée est de période égale à 200 ms. Représenter l'allure des signaux observés à l'oscilloscope dans cette 3^{ème} configuration.
- 3- Ce montage peut-il fonctionner en dérivateur ?

Données : on donne ci-dessous les trois premières harmoniques de la décomposition de Fourier d'un signal crêteau $u_e(t)$ de pulsation Ω , d'amplitude E et de valeur moyenne nulle :

$$u_e(t) = \frac{4E}{\pi} \left(\cos(\Omega t) - \frac{1}{3} \cos(3\Omega t) + \frac{1}{5} \cos(5\Omega t) - \dots \right)$$

Exercice 2 : identification de filtres

- 1- Déterminer la nature et la fréquence de coupure à -3 dB d'un filtre tel qu'un signal d'entrée triangulaire d'amplitude 1 V et de fréquence f donne en sortie un crêteau d'amplitude 32 mV pour $f = 50$ Hz, et un signal triangulaire d'amplitude 1 V pour $f > 10$ kHz.
- 2- Déterminer la nature et la fréquence de coupure à -3 dB d'un filtre tel qu'un signal d'entrée en crêteau d'amplitude 1 V et de fréquence f donne en sortie un crêteau d'amplitude 0,5 V et déphasé de π pour $f < 100$ Hz, et un signal triangulaire d'amplitude 60 mV pour $f = 20$ kHz.

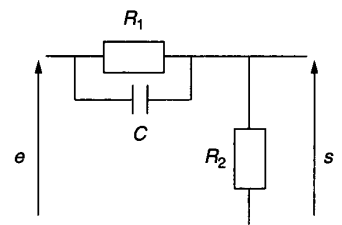
Exercice 3 : filtrage et dérivation

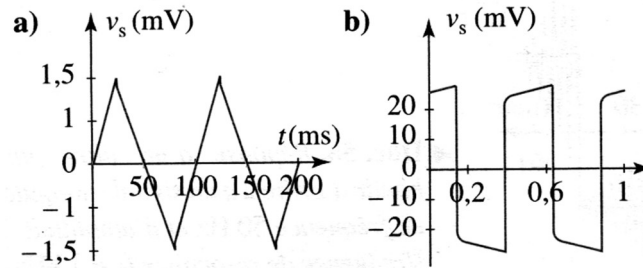
On s'intéresse au filtre ci-contre avec :

$R_1 = 480 \text{ k}\Omega$ - $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ - $C = 3,3 \text{ nF}$

- 1- Déterminer le domaine de fréquence dans lequel ce filtre présente un caractère dérivateur et donner le lien entre $s(t)$ et $e(t)$ dans ce fonctionnement.
- 2- Expliquer l'allure des chronogrammes de $s(t)$ ci-dessous, sachant que :

- * Dans le cas a), $e(t)$ est un signal triangulaire de fréquence 10 Hz et d'amplitude 1 V ;
- * Dans le cas b), $e(t)$ est un signal triangulaire de fréquence 2 kHz et d'amplitude 1 V ;





Exercice 4 : Distorsion harmonique d'un amplificateur ; T.D.H.

Un amplificateur imparfaitement linéaire possède la caractéristique statique suivante :

$$s(t) = 2 \times e(t) - \frac{2}{15} \times e^3(t) \quad \text{avec } s \text{ et } e \text{ en Volts.}$$

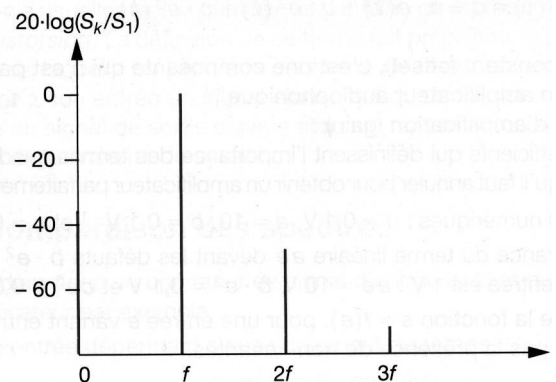
On alimente l'amplificateur avec une tension $e(t)$ sinusoïdale de pulsation ω .

- 1- Déterminer la décomposition de Fourier du signal de sortie $s(t)$, puis l'amplitude maximale A_m que l'on peut donner à $e(t)$ si on tolère en sortie la présence d'harmoniques dont les amplitudes n'excèdent pas 1% de celle du fondamental.
- 2- On choisit maintenant l'amplitude A_m pour le signal d'entrée. Le défaut de linéarité est-il visible sur le graphe de la caractéristique statique de l'amplificateur ? Comment ce graphe peut-il être obtenu expérimentalement ?
Le défaut est-il visible sur un spectre de Fourier tracé en échelle linéaire ? sur un spectre de Fourier tracé en échelle logarithmique avec une dynamique de 60 dB pour l'axe des ordonnées ? Comment ce spectre peut-il être obtenu expérimentalement ?

Un second amplificateur possède la caractéristique statique suivante : $s(t) = 0,1 + 10 \times e(t) + 0,1 \times e^2(t) + 0,01 \times e^3(t)$

avec s et e en Volts.

Le spectre de $s(t)$, obtenu pour un signal d'entrée sinusoïdal d'amplitude 1 V, est donné sur la figure ci-contre ; l'amplitude de l'harmonique de rang k est notée S_k .



- 3- Sans effectuer de calculs explicites, expliquer la présence des différents termes de ce spectre.

- 4- On appelle Taux de Distorsion Harmonique du

signal $s(t)$ la quantité notée T.D.H. et définie par $\text{T.D.H.} = \sqrt{\sum_{k>1} (S_k^2 / 2S_{\text{eff}}^2)}$ où S_{eff} est la

valeur efficace de $s(t)$.

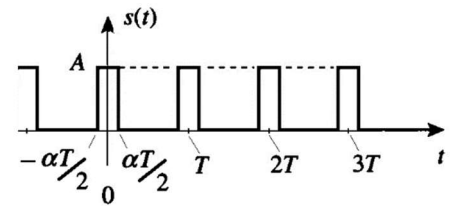
En utilisant le théorème de Parseval, proposer une interprétation énergétique de cette expression et justifier la dénomination « taux de distorsion harmonique ».

- 5- Il existe une autre quantité appelée taux de distorsion harmonique « par rapport au fondamental », notée T.D.H._f et définie par : $\text{T.D.H.}_f = \sqrt{\sum_{k>1} S_k^2} / S_1$.

Pour quel type de signaux les deux définitions coïncident-elles quasiment ? Calculer numériquement le T.D.H._f du signal $s(t)$ à l'aide des données du spectre ci-dessus ; donner sa valeur en décibels.

Exercice 5 : Peigne de Dirac et échantillonnage d'un signal.

- 1- Déterminer la décomposition en série de Fourier du signal $s(t)$ rectangulaire périodique représenté ci-contre, d'amplitude A et de rapport cyclique α ; α est le rapport de la durée de l'état $s = A$ (durée d'un « impulsion ») sur la période T . On introduira la fonction « sinus cardinal » : $\text{sinc}(x) = \sin(x) / x$.
Représenter le spectre du signal pour les 3 valeurs suivantes de α : $1/2$; $1/6$; $1/20$.

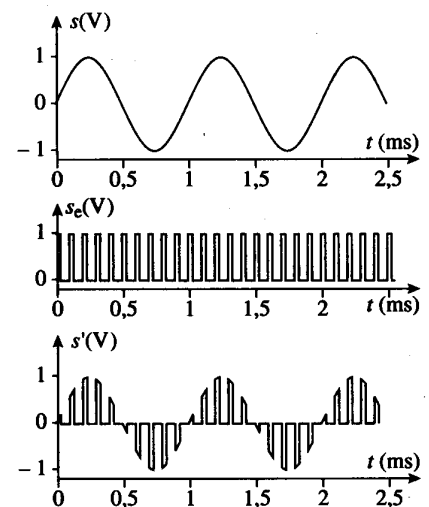


- 2- En déduire la décomposition de Fourier et le spectre d'une suite périodique d'impulsions infiniment brèves, obtenue comme la limite du signal précédent lorsque α tend vers zéro, l'aire $I = \alpha TA$ des impulsions étant maintenue constante ; un tel signal est appelé « peigne de Dirac ».

Afin de numériser un signal analogique $s(t)$, on doit tout d'abord « l'échantillonner », c'est-à-dire accéder à la valeur prise par ce signal à différentes dates périodiquement réparties : $s(0)$, $s(T_e)$, $s(2T_e)$, etc... Ce sont ces valeurs prises par s qui seront converties en suites de 0 et de 1 (codage binaire), transmises puis « décodées » afin de récupérer un signal analogique identique à $s(t)$.

$f_e = 1/T_e$ est appelée fréquence d'échantillonnage.

Pour raisonner, on peut supposer que l'opération d'échantillonnage revient à multiplier analogiquement le signal $s(t)$ par une suite périodique d'impulsions très brèves (idéalement un peigne de Dirac) de fréquence f_e ; le signal produit $s'(t)$ obtenu est appelé signal échantillonné.



- 3- Dans le cas où $s(t)$ est une pure sinusoïde de fréquence f , comme sur le schéma ci-contre, déterminer le spectre de $s'(t)$.
- 4- Que devient ce spectre lorsque $s(t)$ est un signal périodique non sinusoïdal contenant l'essentiel de son poids spectral entre les fréquences 0 et f_m ? Représenter graphiquement.
- 5- Montrer qu'il est possible, sous condition, de récupérer par filtrage le signal original $s(t)$ à partir du signal échantillonné $s'(t)$. On précisera la nature du filtrage à réaliser et on montrera qu'il est nécessaire d'avoir échantillonné le signal avec une fréquence $f_e > 2f_m$.
Ce résultat, tout à fait fondamental en traitement du signal, constitue le THEOREME DE SHANNON.

Exercice complémentaire : ligne à retard

On appelle ligne à retard un circuit qui retarde un signal quelconque d'une durée τ fixée, c'est-à-dire qui donne d'un signal d'entrée quelconque $e(t)$ un signal de sortie $s(t) = e(t - \tau)$.

- 1- Déterminer la transmittance d'un filtre se comportant rigoureusement comme une ligne à retard. Ce type de filtre est-il réalisable ?
- 2- Montrer qu'un filtre passe bas d'ordre 2 bien choisi permet d'obtenir une réalisation d'une ligne à retard avec une bonne approximation. On déterminera en particulier la pulsation centrale et le facteur de qualité à choisir.
Proposer un montage réalisant une ligne à retard de 1 ms à l'aide d'un circuit R,L,C, la valeur de l'inductance étant fixée à 0,1 H. On déterminera les valeurs des composants R et C à utiliser.

Interpréter les réponses obtenues avec ce filtre à partir des schémas ci-dessous.

