

Echo de la grande pyramide de Chichen Itza (Mines MP 2020)

[16] Sur la figure 8, on lit

$$f_1 = 1,5 \text{ kHz}$$

Le pic 2, à la fréquence $f_2 = 3,0 \text{ kHz}$, a une amplitude de 50 dB inférieure à celle du pic 1. On en déduit que

$$-50 = 20 \log \left(\frac{a_2}{a_1} \right)$$

d'où $a_2 = a_1 \times 10^{-5/2} = 10^2 \times 10^{-3+1/2} = 10^2 \times 10^{-3} \times 3,16$

Il vient

$$a_2 = 0,316 \text{ mV}$$

[17] D'après le critère de Shannon, pour échantillonner correctement un signal dont la fréquence la plus élevée est f_2 , il faut

$$f_e > 2f_2 \quad \text{Ici } f_2 = 3,0 \text{ kHz, donc} \quad f_e > 6,0 \text{ kHz}$$

Puisque $T_a = 1/\delta f$, on choisit une durée d'acquisition T_a telle que

$$T_a = 10,0 \text{ ms}$$

[18] La transformée de Fourier discrète, effectuée pour tracer le spectre d'une acquisition, est calculée sur la durée T_a , donc c'est la durée T_a qui fixe la **résolution** δf et pas la durée totale de l'enregistrement τ .

L'axe des temps est découpé en intervalles de durée T_a . Il y a τ/T_a intervalles de temps. L'axe des fréquences est découpé en intervalles de largeur δf . Il y a $f_M/\delta f$ tels intervalles. Par conséquent, on compte

$$\frac{\tau f_M}{T_a \delta f} = \tau f_M = 0,5 \times 3,5 \cdot 10^3 = 1,8 \cdot 10^3 \text{ pixels}$$

[19] Pour pouvoir suivre la dérive en fréquence, il faut que cette dérive soit quasiment négligeable à l'échelle d'une acquisition de durée T_a . Cela n'est possible que si

$$\tau_d \gg T_a$$

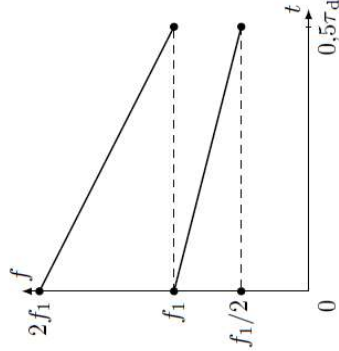
Il faut également que la résolution verticale du spectre soit suffisante pour permettre de visualiser la dérive de f_1 sur la durée τ . Pour pouvoir nettement distinguer ces deux fréquences (et les valeurs intermédiaires prises par f_1), on doit avoir

$$\delta f = 1/T_a \ll f_1'(0) - f_1'(\tau) = \frac{f_1 \tau}{\tau_d}$$

soit

$$\tau_d \ll f_1 \tau T_a$$

Le sonogramme correspondant présente l'allure suivante :



[20] Le chant débute vers 60 ms et s'arrête vers 210 ms donc

$$\tau_q \simeq 150 \text{ ms}$$

À la date $t = 140 \text{ ms}$, le fondamental et les harmoniques sont aux fréquences :

i	1	2	3	4
$f_{qi}(\text{kHz})$	0,5	1,1	1,6	2,2

On ne garde ici qu'un seul chiffre significatif car la lecture graphique ne permet pas une plus grande précision. Toutefois, le graphe semble compatible avec une série de fréquence qui serait, avec deux chiffres significatifs :

i	1	2	3	4
$f_{qi}(\text{kHz})$	0,55	1,10	1,65	2,20

On aurait alors des fréquences toutes multiples du fondamental, comme dans une série de Fourier classique.

[21] En S_n l'onde a accumulé le retard d_n/c_s par rapport à son instant d'émission. Comme on néglige toute atténuation due à la propagation,

$$\Psi(S_n, t) = \Psi\left(S, t - \frac{d_n}{c_s}\right)$$

donc

$$\Psi(S_n, t) = s\left(t - \frac{d_n}{c_s}\right)$$

Elle accumule de nouveau un retard d_n/c_s pour revenir au point S. En prenant en compte le coefficient de réflexion κ , il vient

$$\Psi'(S, t) = \kappa \Psi\left(S, t - \frac{2d_n}{c_s}\right) = \kappa s\left(t - \frac{2d_n}{c_s}\right)$$

[22] D'après la question 21,

$$\phi_n'(t) = \omega\left(t - \frac{2d_n}{c_s}\right)$$

[23] Exprimons $\Delta\phi_n'(t)$ à l'aide de l'expression précédente :

$$\Delta\phi_n' = \frac{2\omega}{c_s}(d_{n+1} - d_n)$$

[24] Les ondes interfèrent constructivement en S s'il existe un entier m tel que

$$\Delta\phi_n' = \frac{2\omega}{c_s}(d_{n+1} - d_n) = 2\pi m$$

Comme $d_{m+1} > d_m$, $\Delta\phi_n' > 0$ donc, contrairement à ce qu'écrit l'énoncé, $m \in \mathbb{N}^*$ et non $\mathbb{N}$.

Cette condition est vérifiée lorsque la fréquence $\nu = \omega/(2\pi)$ prend une des valeurs particulières ν_m telles que

$$\nu_m = \frac{m c_s}{2(d_{n+1} - d_n)}$$

[25] D'après le théorème de Pythagore,

$$d_n = \sqrt{(a + nb)^2 + (nb)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Alors} \quad d_{n+1}^2 - d_n^2 &= (a + (n+1)b)^2 + ((n+1)b)^2 - (a + nb)^2 - (nb)^2 \\ &= b(2a + (2n+1)b) + b^2(2n+1) \end{aligned}$$

Cette expression se réécrit

$$d_{n+1}^2 - d_n^2 = 2ab + 2b^2(2n+1)$$

Le membre de gauche se simplifie en

$$d_{n+1}^2 - d_n^2 \simeq (d_{n+1} + d_n)(d_{n+1} - d_n) \simeq 2d_n(d_{n+1} - d_n)$$

Par conséquent

$$2(d_{n+1} - d_n) \simeq \frac{2ab + 2b^2(2n+1)}{d_n}$$

que l'on injecte dans l'expression de ν_m obtenue à la question précédente, en $m = 1$:

$$\nu_1 \simeq \frac{c_s}{2ab + 2b^2(2n+1)} d_n$$

qui devient :

$$\nu_1 \simeq \frac{c_s}{2ab} g(n) d_n \quad \text{avec} \quad g(n) = \frac{a}{a + (2n+1)b}$$

26 En toute rigueur, comme $\Delta\phi'_n$ et donc $g(n)$ ont été défini à partir de l'interférence des ondes diffractées en S_n et S_{n+1} , les $N = 91$ valeurs de possibles de n dans l'expression de $g(n)$ vont donc de 0 à $N-1 = 90$ (et non de 1 à N). Ainsi, sur le graphe de la figure 12, le point d'abscisse minimale correspond à $(d_0; g(0) d_0)$ et celui d'abscisse maximale à $(d_{N-1}; g(N-1) d_{N-1})$. On lit donc sur la figure 12 que :

* $d_0 = 20$ m (ce qui est bien cohérent avec le fait que d_0 est défini comme étant SS_0 et que l'énoncé pose $SS_0 = a = 20$ m) ;

* $d_{N-1} = 50$ m et avec l'approximation $d_{n+1} \approx d_n$ indiquée question 25 : $d_n \approx 50$ m

Concernant les dates d'arrivée des échos :

* t_1 correspond au temps d'aller-retour des échos diffractés en S_0 et S_1 donc :

$$t_1 \approx 2d_0/c_s \quad (\approx 2d_1/c_s) \quad \text{soit} \quad t_1 \approx 2 \times 20 / 340 = 2/17 \quad \text{d'où} \quad t_1 \approx 0,12 \text{ s}$$

Pour une AN avec un erreur $< 20\%$ il faut ici donner 2 chiffres significatifs... J'ai posé la division mais on écrit : $2/17 \approx 2/16$ (avec $\approx 6\%$ d'erreur.) $= 1/8 = 0,125$ et puisque l'évaluation est par excès ($1/16 > 1/17$) on propose : 0,12 s.

* t_N correspond au temps d'aller-retour des échos diffractés en S_{N-1} et S_N donc :

$$t_N \approx 2d_{N-1}/c_s \quad (\approx 2d_N/c_s) \quad \text{soit} \quad t_N \approx 2 \times 50 / 340 = 1/34 \quad \text{d'où} \quad t_N \approx 0,29 \text{ à } 0,30 \text{ s}$$

* Ainsi, la durée de l'écho est de $t_N - t_1 \approx 0,17 \text{ à } 0,18 \text{ s}$

27 D'après la question 25 et compte tenu de notre analyse de l'indexation, nous pouvons affirmer que :

* $\nu_1(t_1) \approx (c_s/2ab) g(0) d_0$ avec sur la figure 12 : $g(0) d_0 = 19,5$ m

$$\text{Ainsi :} \quad \nu_1(t_1) = \frac{3,4 \cdot 10^3}{2 \times 20 \times 2,6 \cdot 10^{-1}} \times 19,5 \simeq \frac{1,7 \cdot 10^3}{2,6} \simeq \frac{2 \times 9 \cdot 10^3}{3 \times 9}$$

$$\nu_1(t_1) \simeq 7 \cdot 10^2 \text{ Hz}$$

Ici on peut se contenter d'un chiffre significatif sans dépasser 20% d'erreur ($7 \times 20/100 = 1,4$). D'ailleurs, à la calculatrice on obtient 630 Hz soit 10% d'écart avec $7 \cdot 10^2$ Hz.

Si on effectue une application numérique rigoureuse on obtient :

$$g(0)d_0 = 19,7 \text{ m} \quad \text{et} \quad g(1)d_1 = 19,5 \text{ m} \dots$$

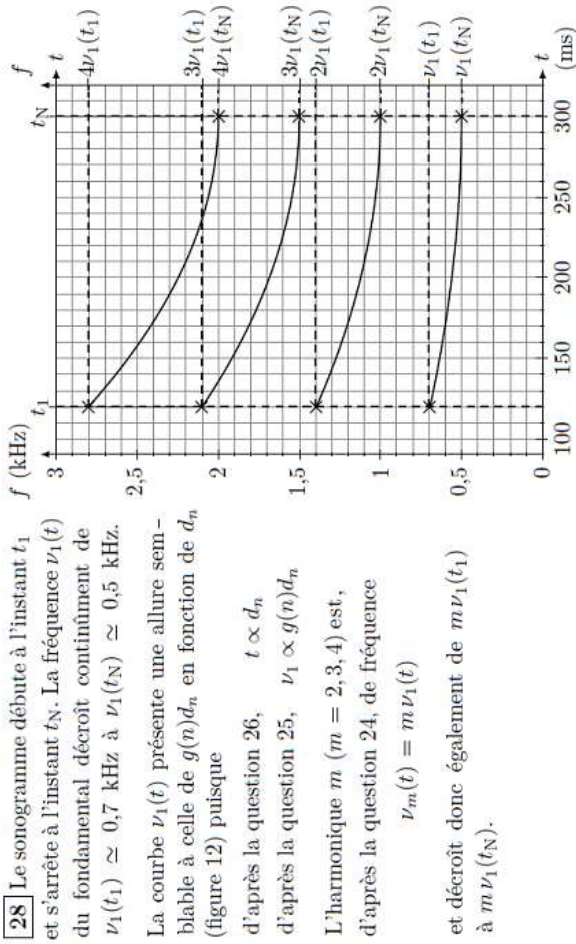
Il y a donc un petit soucis de cohérence et on pourrait douter de l'indexation (n va-t-il de 0 à $N-1$ ou de 1 à N ?). Toutefois, ces questions sont vraiment sans grand intérêt puisque l'on effectue des calculs approchés avec $d_{n+1} \approx d_n$ et que pour les AN on attend des résultats à 20% près : il faut donc être lucide là-dessus et ne pas perdre son temps à s'interroger sur l'indexation !!

$$* \quad \nu_1(t_N) \approx (c_s/2ab) g(N-1) d_{N-1} = \nu_1(t_1) \times g(N-1) d_{N-1} / g(0) d_0$$

avec sur la figure 12 : $g(N-1) d_{N-1} = 14,7$ m

$$\text{Ainsi :} \quad \nu_1(t_N) = \nu_1(t_1) \times \frac{g(N) d_N}{g(1) d_1} = \nu_1(t_1) \times \frac{14,7}{19,5} \approx \nu_1(t_1) \times \frac{3}{4} \simeq \frac{21 \cdot 10^2}{4}$$

$$\nu_1(t_N) \simeq 5 \cdot 10^2 \text{ Hz}$$



28 Le sonogramme débute à l'instant t_1 et s'arrête à l'instant t_N . La fréquence $\nu_1(t)$ du fondamental décroît continuellement de $\nu_1(t_1) \simeq 0,7$ kHz à $\nu_1(t_N) \simeq 0,5$ kHz.

La courbe $\nu_1(t)$ présente une allure semblable à celle de $g(n)d_n$ en fonction de d_n (figure 12) puisque

$$\text{d'après la question 26,} \quad t \propto d_n$$

$$\text{d'après la question 25,} \quad \nu_1 \propto g(n)d_n$$

L'harmonique m ($m = 2, 3, 4$) est,

d'après la question 24, de fréquence

$$\nu_m(t) = m\nu_1(t)$$

et décroît donc également de $m\nu_1(t_1)$ à $m\nu_1(t_N)$.

29 On constate un bon accord avec la figure 10, pour la durée (environ 0,2 s), comme pour les fréquences (le fondamental est bien de l'ordre de 0,5 kHz).

Pour un quetzal adulte, donc de plus grande taille, on s'attend à des fréquences plus faibles (comme chez les humains). Cela conduit à une augmentation de l'écart entre les fréquences du chant de l'oiseau et celles de l'écho de la pyramide.

Notons que les fréquences sélectionnées sont proportionnelles à la longueur a . En changeant sa distance à l'escalier, l'expérimentateur peut facilement décaler les fréquences ν_m .

FIN