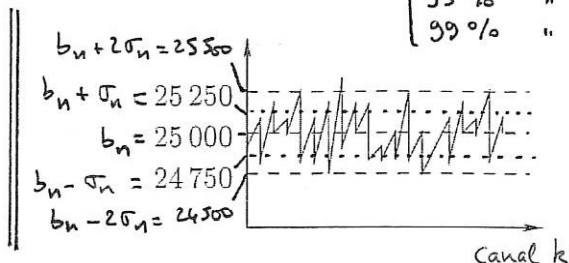


DÉTECTION D'UN SIGNAL FAIBLE

13 D'après l'énoncé, après n acquisitions, la moyenne du signal b_n est nb et l'écart-type $\sigma_n = \sigma/\sqrt{n}$. On a alors le rapport suivant :

$$\sigma_n/b_n = \sigma/\sqrt{n} \cdot b$$

En outre il y a $\begin{cases} 68\% & \text{des fluctuations dues au bruit entre } b_n - \sigma_n \text{ et } b_n + \sigma_n \\ 95\% & \text{" " " " " " " } b_n - 2\sigma_n \text{ et } b_n + 2\sigma_n \\ 99\% & \text{" " " " " " " } b_n - 3\sigma_n \text{ et } b_n + 3\sigma_n \end{cases}$



Par conséquent, plus on augmente le nombre d'acquisitions, moins le signal sera dispersé, comparativement à sa valeur moyenne. Pour $n = 2500$, $b_n = 25000$ et $\sigma_n = 250$, on a le graphe ci-contre. (cohérent avec les graphes de la figure 3)

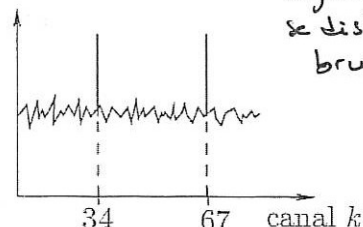
14 Le signal utile est détecté si son amplitude U est supérieure à l'écart-type σ du bruit. Ici, $U = 1$ et $\sigma = 5$. (une fluctuation de $+3\sigma$ a moins de 1% de chance de se produire donc si $U > 3\sigma$ le signal utile se distingue du bruit)

Le signal utile n'est pas détectable avec une seule acquisition.

Après n acquisitions, l'amplitude du signal utile U_n vaut nU et l'écart-type du bruit $\sqrt{n}\sigma$. Le rapport de ces grandeurs donne

$$\frac{U_n}{\sigma_n} = \sqrt{n} \frac{U}{\sigma}$$

Pour 2500 acquisitions, $U_n/\sigma_n = 10$. Le signal utile est alors visible et on a l'allure ci-contre.



Faire la moyenne sur les différents canaux permet de diminuer le bruit mais augmente la durée de l'expérience. (c'est ce que fait un oscillo en mode "moyenne" ou "averaging")

15 Le signal utile peut être perçu si le rapport signal sur bruit est plus grand que 3. Au seuil de détection,

$$\frac{s_{p,n}}{\sigma_n} = \sqrt{n} \frac{s_p}{\sigma} = 3$$

d'où

$$n = \left(\frac{3\sigma}{s_p} \right)^2$$

TRANSMISSION D'UN SIGNAL BRUITÉ

20 Considérons une ligne de transmission avec un coefficient d'atténuation par unité de longueur α . Prenons une tranche de la ligne entre x et $x + dx$. Dans cette tranche, la puissance absorbée par la ligne vaut $-\alpha P(x) dx$. La variation de puissance entre x et $x + dx$ s'écrit

$$P(x + dx) - P(x) = -\alpha P(x) dx$$

Il vient

$$\frac{dP}{dx} = -\alpha P(x)$$

d'où

$$P(x) = P_0 e^{-\alpha x}$$

En $x = \ell$,

$$P_S = P_E e^{-\alpha \ell}$$

Appliquons le logarithme décimal de part et d'autre de l'équation,

$$\log_{10} P_S = \log_{10} P_E - \frac{\alpha \ell}{\ln 10}$$

Par conséquent,

$$P_S^{\text{dB}} = P_E^{\text{dB}} - \lambda \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{10 \alpha \ell}{\ln 10}$$

Ce modèle classique d'absorption est également à l'origine de la loi de Beer-Lambert en chimie.

21 Le bruit d'origine thermique P_B est le même sur toute la ligne donc $P_{B_S} = P_{B_E}$. Introduisons P_B dans l'expression trouvée à la question 20,

$$10 \log_{10} P_S - 10 \log_{10} P_B = 10 \log_{10} P_E - 10 \log_{10} P_B - \lambda$$

Il vient
$$10 \log_{10} \left(\frac{P_S}{P_B} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{P_E}{P_B} \right) - \lambda$$

Avec $P_B = P_{B_S} = P_{B_E}$,
$$\mathcal{R}_S^{\text{dB}} = \mathcal{R}_E^{\text{dB}} - \lambda$$

Ainsi, le rapport signal sur bruit est plus petit en sortie qu'en entrée, c'est-à-dire que le bruit prend de l'importance en cours de propagation. **Pour exploiter le signal de sortie, le bruit ne doit pas être trop important par rapport au signal.**

Sur des grandes distances, il faut **diminuer le bruit** ou **éviter au maximum l'absorption** dans la ligne de transmission.

22 Avec la définition du facteur de bruit,

$$\begin{aligned} F &= \mathcal{R}_E^{\text{dB}} - \mathcal{R}_S^{\text{dB}} \\ &= 10 \log_{10} \left(\frac{P_E}{P_{B_E}} \right) - 10 \log_{10} \left(\frac{P_S}{P_{B_S}} \right) \\ F &= 10 \log_{10} \left(\frac{P_{B_S}}{\gamma P_{B_E}} \right) \quad \left(\text{avec } \gamma = \frac{P_S}{P_E} \right) \end{aligned}$$

Finalement
$$P_{B_S} = f \gamma P_{B_E} \quad \text{avec} \quad f = 10^{F/10}$$

$F > 0$, donc
$$f > 1$$

23 Avec la relation de l'énoncé,

$$P_{S_2} = \gamma_2 (P_{S_1} - P_{B_E}) + P_{B_{S_2}}$$

Or $P_{S_1} = P_{B_{S_1}} = f_1 \gamma_1 P_{B_E}$ et $P_{B_{S_2}} = f_2 \gamma_2 P_{B_E}$, d'où

$$\begin{aligned} P_{S_2} &= \gamma_2 (f_1 \gamma_1 - 1) P_{B_E} + f_2 \gamma_2 P_{B_E} \\ &= (\gamma_{12} f_1 + \gamma_2 (f_2 - 1)) P_{B_E} \quad (\text{avec } \gamma_{12} = \gamma_1 \gamma_2) \end{aligned}$$

Pour un système de caractéristiques (γ_{12}, f_{12}) , la puissance de sortie est

$$P_{B_{12}} = \gamma_{12} f_{12} P_{B_E}$$

Le système étant auto-alimenté, $P_{B_{12}} = P_{S_{12}}$. Comparons maintenant les deux expressions obtenues :

$$\gamma_{12} f_{12} = \gamma_{12} f_1 + \gamma_2 (f_2 - 1)$$

d'où
$$f_{12} = f_1 + \frac{f_2 - 1}{\gamma_1}$$

24 Faisons de même en raccordant le système 1-2 au système 3. La formule obtenue à la question précédente s'adapte et devient

$$f_{13} = f_{12} + \frac{f_3 - 1}{\gamma_{12}}$$

d'où

$$f_{13} = f_1 + \frac{f_2 - 1}{\gamma_1} + \frac{f_3 - 1}{\gamma_1 \gamma_2}$$

Avec n éléments en cascade,

$$f_{1n} = f_1 + \frac{f_2 - 1}{\gamma_1} + \dots + \frac{f_n - 1}{\gamma_1 \dots \gamma_{n-1}}$$

Les gains γ_n des amplificateurs font diminuer les différents rapports sauf pour le premier terme. Dans ce cas, f_1 est le terme prédominant.

L'instrument 1 fixe le bruit et donc la qualité de la chaîne.

IV. EXEMPLE DE BRUIT THERMIQUE ÉLÉMENTAIRE

25 Comme $u(t) = U + b(t)$, la relation du condensateur s'écrit

$$q(t) = C (U + b(t))$$

Avec $i = dq/dt$, la puissance mise en jeu est

$$P = u(t) i(t) = C (U + b(t)) \frac{d}{dt} (U + b(t))$$

Comme $dE_C = P dt$, $dE_C = C (U + b(t)) d(U + b(t))$

Par intégration $E_C = \frac{1}{2} C (U + b(t))^2$

Développons le carré et prenons la valeur moyenne,

$$\langle E_C \rangle = \frac{1}{2} C \langle U^2 + 2 U b(t) + b^2(t) \rangle$$

Avec $\langle b \rangle = 0$,

$$\langle E_C \rangle = \frac{1}{2} C U^2 + \frac{1}{2} C \sigma_b^2$$

26 À chaque degré de liberté est associé une énergie $k_B T/2$, c'est-à-dire,

$$\frac{1}{2} C \sigma_b^2 = \frac{1}{2} k_B T$$

d'où

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{k_B T}{C}} = 3 \cdot 10^{-7} \text{ V}$$

Au vu de cette expression **plus C est petit, plus le bruit est important.** La valeur numérique trouvée montre qu'à température ambiante et avec des tensions usuelles de l'ordre de 1 V, **le bruit est négligeable.**