

Etude thermique d'une lampe à incandescence. Correction.

A- Etude théorique de l'évolution périodique de la température

A.1. Pour info voici la démonstration de l'équation différentielle :

- On raisonne entre t et $t + dt$ et on applique le 1^{er} principe au filament, dont la température varie de dT ; sachant que l'évolution est isobare, il vient :

$$dH = mc_p dT = \delta W_{\text{électrique reçu}} + \delta Q_{\text{associé au rayonnement}} = P_e(t)dt - 2\pi r L \sigma_1 T(t)^4 dt$$

- Le filament gagne de l'énergie sous forme électrique et en perd sous forme de rayonnement, l'expression de l'énergie rayonnée venant de la loi de Stefan et de l'hypothèse de « corps gris ».
- En divisant par dt , on obtient : $mc_p \frac{dT}{dt} + 2\pi r L \sigma_1 T(t)^4 = P_e(t)$
- Puis, sachant que $P_e(t) = u_a^2(t)/R_0$ (le filament est purement résistif), et que $T(t) = T_0 + \theta(t)$, il vient :

$$mc_p \frac{d\theta}{dt} + 2\pi r L \sigma_1 (T_0 + \theta(t))^4 = \frac{u_a^2(t)}{R_0}$$

- Enfin, compte tenu de l'hypothèse c), on peut linéariser : $(T_0 + \theta)^4 = T_0^4 (1 + \theta/T_0)^4 \approx T_0^4 + 4T_0^3 \theta$, d'où :

$$mc_p \frac{d\theta}{dt} + 2\pi r L \sigma_1 (T_0^4 + 4T_0^3 \theta(t)) = \frac{u_a^2(t)}{R_0}$$

A.2. Puisque $\langle T(t) \rangle = \langle T_0 + \theta(t) \rangle = T_0 + \langle \theta(t) \rangle = T_0$, on a : $\langle \theta(t) \rangle = 0$

Prenons la valeur moyenne temporelle sur une période τ de l'équation différentielle précédente.

L'évolution de θ étant périodique, on a :

$$\left\langle \frac{d\theta}{dt}(t) \right\rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{d\theta}{dt}(t) dt = \frac{1}{\tau} [\theta(\tau) - \theta(0)] = 0$$

Ainsi, on obtient : $2\pi r L \sigma_1 T_0^4 = \frac{\langle u_a^2(t) \rangle}{R_0} = \frac{u_{aRMS}^2}{R_0}$ soit :

$$T_0 = \sqrt[4]{\frac{u_{aRMS}^2}{2\pi r L \sigma_1 R_0}}$$

A.3.a. $P_e(t) = u_a^2(t)/R_0 = (2U_a^2/R_0) \times \cos^2(\omega t/2)$

Remarquons qu'ici : $U_a = U_{a\max}/\sqrt{2}$ d'où $U_a = u_{aRMS}$. On aura donc d'après A.2 :

$$U_a^2/R_0 = 2\pi r L \sigma_1 T_0^4$$

A.3.b. En linéarisant $\cos^2(\omega t/2)$, $P_e(t)$ peut se réécrire : $(U_a^2/R_0)[1 + \cos(\omega t)]$. Ainsi, le filament est alimenté par une puissance oscillant sinusoïdalement à la pulsation ω (avec une moyenne non nulle). La loi de réponse étant **approximativement linéaire**, les oscillations thermiques du filament autour de T_0 (dont la valeur dépend de $\langle P_e \rangle$) seront donc sinusoïdales de pulsation ω , une fois le RPS atteint.

A.3.c. Réécrivons l'équation différentielle linéarisée du A.1. en tenant compte de l'expression de $u_a^2(t)$:

$$mc_p \frac{d\theta}{dt} + 2\pi r L \sigma_1 T_0^4 + 4 \times 2\pi r L \sigma_1 T_0^3 \theta(t) = \frac{u_a^2(t)}{R_0} = \frac{U_a^2}{R_0} [1 + \cos(\omega t)]$$

Or : $U_a^2/R_0 = 2\pi r L \sigma_1 T_0^4$ (cf. *rq* du A.3.a)

Il vient donc :

$$mc_p \frac{d\theta}{dt} + 8\pi r L \sigma_1 T_0^3 \theta(t) = \frac{U_a^2}{R_0} \cos(\omega t)$$

En passant en notation complexe pour étudier le RPS :

$$mc_p (i\omega) \underline{\theta} e^{i\omega t} + 8\pi r L \sigma_1 T_0^3 \underline{\theta} e^{i\omega t} = (U_a^2/R_0) e^{i\omega t}$$

D'où : $\underline{\theta} = \frac{U_a^2/R_0}{imc_p \omega + 8\pi r L \sigma_1 T_0^3} \equiv \frac{\theta_0}{1 + i \omega/\omega_c}$ avec : $\theta_0 = \frac{1}{8\pi r L \sigma_1 T_0^3} \frac{U_a^2}{R_0} = \frac{T_0}{4}$ et

$$\omega_c = \frac{8\pi r L \sigma_1 T_0^3}{mc_p}$$

Rq : il est intéressant à ce niveau de vérifier la dimension de ω_c . En S.I., on obtient :

$$\dim(\omega_c) = \frac{L^2 \cdot \dim(\text{énergie}) T^{-1} L^{-2} \theta^{-4} \theta^3}{M \dim(\text{énergie}) \theta^{-1} M^{-1}} = T^{-1}$$

A.3.d. On voit que le filtre est un filtre passe-bas : si les oscillations excitatrices sont très rapides, elles n'ont pas le temps de se répercuter en oscillations de la température, et la température du filament devient quasiment constante.

En faisant intervenir la masse volumique μ du tungstène, on obtient : $\omega_c = \frac{8\sigma_1 T_0^3}{\mu r c_p}$

On constate effectivement que, à T_0 fixée, ω_c est indépendante de la longueur L du filament¹.

On a $\theta_m = \theta_0$; ainsi, $\theta_m < \frac{T_0}{10}$ impose : $\left| \frac{\frac{T_0}{4}}{1 + i \frac{\omega}{\omega_c}} \right| < \frac{T_0}{10}$, soit : $\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} < \frac{2}{5}$

D'où finalement : $\omega > \frac{\sqrt{21}}{2} \omega_c \approx 2,3 \omega_c$

A.3.e. Application numérique : $\nu_c = 2,45 \text{ Hz}$ (attention à l'unité de c_p !)

¹ Mais la question est un peu biaisée car T_0 dépend de L ... Attention, la dépendance n'est pas simple : T_0 est en $L^{-1/4} R_0^{-1/4}$ (cf. formule de la qu. A.2) et nous verrons en cours que la résistance R_0 d'un fil cylindrique de longueur L et de rayon r s'écrit : $R_0 = L/\gamma \pi r^2$ (γ est la conductivité du matériau) et est donc proportionnelle à L . Ainsi, T_0 est en $L^{-1/2}$ et ω_c en $L^{-3/2}$!

B- Modulation de l'intensité lumineuse par largeur d'impulsion

B.1. D'après la loi de Stefan et les calculs du II.A.2, la puissance lumineuse moyenne rayonnée est proportionnelle à T_0^4 donc à u_{aRMS}^2 , carré de la valeur efficace de $u_a(t)$; une variation de α conduit à une modification de u_{aRMS} donc de l'intensité lumineuse émise.

Rq : Sans entrer autant dans le détail, on peut simplement dire qu'en régime permanent, l'énergie interne moyenne du filament ne varie pas donc que la puissance lumineuse moyenne rayonnée est égale à la puissance électrique moyenne reçue, qui varie avec α .

B.2. D'après la définition de u_a , on va avoir :

$$P_e(t) = \frac{u_a^2(t)}{R_0} = \begin{cases} \frac{U^2}{R_0} & \text{pour } |t| < \frac{\alpha\tau}{2} \\ 0 & \text{pour } \frac{\alpha\tau}{2} < |t| \leq \frac{\tau}{2} \end{cases}.$$

$P_e(t)$ a donc la même allure que celle de $u_a(t)$: c'est donc un **signal créneau de période τ , pair et de valeur moyenne non nulle** que l'on peut noter P_0 ; à ce titre sa décomposition de Fourier s'écrit bien :

$$P_e(t) = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n \cos(n\omega t) \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{2\pi}{\tau}$$

($P_e(t)$ étant paire, la partie impaire de son développement est nulle, d'où l'absence des termes en sinus)

B.3. En utilisant l'annexe 1, on peut écrire :

$$\bullet \quad P_0 = \langle P_e(t) \rangle = \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} P_e(t) dt = \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\alpha\tau}{2}}^{+\frac{\alpha\tau}{2}} \frac{U^2}{R_0} dt = \frac{1}{\tau} \frac{U^2}{R_0} \frac{2\alpha\tau}{2}, \text{ soit : } \boxed{P_0 = \frac{\alpha U^2}{R_0}}$$

Notons que le raisonnement général du A.2 est toujours valable et qu'on a donc aussi :

$$\underline{P_0 = 2\pi r L \sigma_1 T_0^4}.$$

$$\bullet \quad \forall n > 0 \quad P_n = \frac{2}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} P_e(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{\tau} \int_{-\frac{\alpha\tau}{2}}^{+\frac{\alpha\tau}{2}} \frac{U^2}{R_0} \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{\tau} \frac{U^2}{R_0} \frac{1}{n\omega} \left[\sin(n\omega t) \right]_{-\frac{\alpha\tau}{2}}^{+\frac{\alpha\tau}{2}}$$

$$\forall n > 0 \quad P_n = \frac{4}{n\omega\tau} \frac{U^2}{R_0} \sin\left(n\alpha\omega \frac{\tau}{2}\right)$$

Compte tenu que $\omega\tau = 2\pi$, on obtient donc :

$$\boxed{P_n = \frac{2}{n\pi} \frac{U^2}{R_0} \sin(n\alpha\pi) = 2P_0 \text{sinc}(n\pi\alpha)}$$

ce qui est bien l'expression proposée dans l'énoncé avec $\beta = 2$. Si $\alpha = \frac{1}{3}$, on a :

$$P_n = 2P_0 \text{sinc}(n\pi/3).$$

Spectre en fréquence :

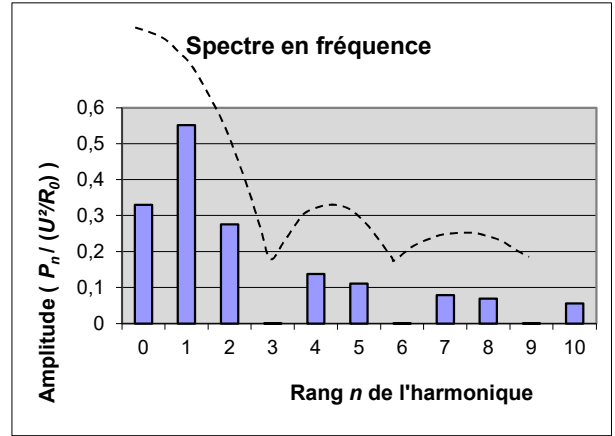
- Avec les notations de l'annexe 1, on doit tracer $V_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, donc ici $|P_n|$, en fonction de n ou en fonction de la fréquence, une harmonique de rang n correspondant à une fréquence égale à $n\tau$.

- Comme P_n est dimensionné, il est préférable de tracer $\frac{|P_n|}{U^2/R_0}$ en fonction de n (on adimensionne), c'est-à-dire $2\alpha |\text{sinc}(n\pi\alpha)|$ en fonction de n .

- Avec $\alpha = 1/3$, il s'agit donc de tracer $(2/3) \times |\text{sinc}(n\pi/3)|$ en fonction de n , ce qui donne le graphe ci-contre d'après l'annexe 2. Les harmoniques sont « enveloppées » par la valeur absolue d'un sinus cardinal, dont la valeur en 0 est le double de la valeur moyenne du signal.

On remarque que les harmoniques multiples de 3 sont nulles par annulation du sinus cardinal.

Rq : Si on n'est pas à l'aise pour ce tracé, on peut s'aider d'un tableau de valeurs :



n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_n/(U^2/R_0)$	0,33	0,55	0,28	0	0,14	0,11	0	0,08	0,07	0	0,06

B.4. Reprenons l'équation différentielle obtenue en A.1. : $mc_p \frac{d\theta}{dt} + 2\pi r L \sigma_1 T_0^4 + 8\pi r L \sigma_1 T_0^3 \theta(t) = \frac{u_a^2(t)}{R_0}$

qui devient maintenant : $mc_p \frac{d\theta}{dt} + 2\pi r L \sigma_1 T_0^4 + 8\pi r L \sigma_1 T_0^3 \theta(t) = P_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} P_n \cos(n\omega t)$

et se simplifie en : $mc_p \frac{d\theta}{dt} + 8\pi r L \sigma_1 T_0^3 \theta(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} P_n \cos(n\omega t)$ puisque $P_0 = 2\pi r L \sigma_1 T_0^4$

On utilise alors la linéarité de l'équation différentielle pour affirmer qu'à chaque terme exciteur $P_n \cos(n\omega t)$ est associée la solution $\theta_n(t)$ vérifiant :

$$\forall n \geq 1, mc_p \frac{d\theta_n}{dt} + 8\pi r L \sigma_1 T_0^3 \theta_n(t) = P_n \cos(n\omega t)$$

soit, en notation complexe : $\forall n \geq 1, mc_p (in\omega) \underline{\theta}_n + 8\pi r L \sigma_1 T_0^3 \underline{\theta}_n = P_n$

d'où :

$$\underline{\theta}_n = \frac{P_n}{mc_p in\omega + 8\pi r L \sigma_1 T_0^3} = \frac{\frac{P_n}{8\pi r L \sigma_1 T_0^3}}{1 + in \frac{\omega}{\omega_C}}$$

En réutilisant : $P_n = 2P_0 \frac{\sin(n\pi\alpha)}{n\pi\alpha}$ & $P_0 = 2\pi r L \sigma_1 T_0^4$, on a finalement :

$$\underline{\theta}_n = \frac{T_0}{2} \frac{\sin(n\pi\alpha)}{n\pi\alpha} \frac{1}{1 + in \frac{\omega}{\omega_C}}$$

Dans le cas où $\omega \gg \omega_C$, l'expression précédente se simplifie en :

$$\underline{\theta}_n = \frac{T_0}{2} \frac{\sin(n\pi\alpha)}{n\pi\alpha} \frac{\omega_C}{in\omega}$$

B.5. Appliquée à la fonction $\theta(t)$, l'égalité de Parseval s'écrit : $\theta_{RMS}^2 = \langle \theta^2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} c_n^2$ avec $c_n^2 = |\underline{\theta}_n|^2$

D'où : $\theta_{RMS} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{T_0}{2} \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{sinc}^2(n\pi\alpha)}{1 + \left(\frac{n\omega}{\omega_C}\right)^2}}$ et donc : $\delta_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{sinc}^2(n\pi\alpha)}{1 + \left(\frac{n\omega}{\omega_C}\right)^2}}$

Dans le cas où $\tau \rightarrow 0$, $\omega \gg \omega_C$ et l'expression se simplifie en :

$$\delta_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\omega_C}{\omega} \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{sinc}^2(n\pi\alpha)}{n^2}}$$

Ceci montre que $\lim_{\tau \rightarrow 0} \delta_0 = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \delta_0 = 0$. Autrement dit, on peut moduler l'intensité lumineuse à l'aide de α sans que l'on observe des oscillations temporelles, à condition d'utiliser une fréquence suffisante.