

Problème d'électromagnétisme - X MP 2000Première partie

- 1a) Le conducteur étant à l'équilibre électrostatique, en tout point M intérieur à celui-ci on a : $\vec{E}(M) = \vec{0}$ & $V(M) = \text{cte} = 0$ car V doit être nul à l'infini dans ce conducteur.

car : $\forall z > 0 \quad \vec{E}(z) = \vec{0} \quad \& \quad V(z) = 0$

- 1b) On en déduit que $\forall z > 0 \quad \rho(z) = \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = 0 \Rightarrow$

Aucune charge à l'intérieur du conducteur ; les charges sont situées à la surface.

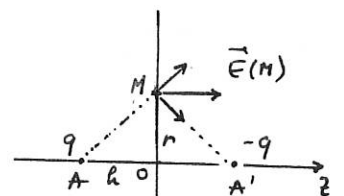
- 1c) En utilisant la relation de passage du champ et compte tenu de $\vec{E}(z=0^+) = \vec{0}$, on a :

$\vec{E}(z=0^-, x, y) = \frac{\sigma(x, y)}{\epsilon_0} \vec{n}$ avec $\vec{n} = -\vec{u}_z$: normale "sortante" du conducteur au point $M(x, y, z=0)$

(En électrostatique des conducteurs, ce résultat s'appelle le "Théorème de Coulomb")

- 2a) Soit Σ le plan (Oxy) . $\forall M \in \Sigma \quad V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 AM} + \frac{(-q)}{4\pi\epsilon_0 A'M} = 0$ car $AM = A'M$

Σ est bien une surface équipotentielle, de potentiel nul, comme la surface libre du conducteur dans la situation "réelle".



- 2b) De même $\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\vec{AM}}{AM^3} - \frac{\vec{A'M}}{A'M^3} \right\}$ avec $AM = A'M = (h^2 + r^2)^{1/2}$
 & $\vec{AM} - \vec{A'M} = \vec{AA'} = 2h \vec{u}_z$

Situation équivalente

Ainsi $\forall M(r, \theta) \in \Sigma$

$\vec{E}(M) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{h}{(h^2 + r^2)^{3/2}} \vec{u}_z$

$\rightarrow$ champ des 2 charges
 $\rightarrow$ éq. champ total à la surface de Σ dans la situation réelle.

- 2c) En utilisant alors le 1c) on peut dire que

$\sigma(M) = \epsilon_0 \vec{E}(M) \cdot (-\vec{u}_z) = \frac{-qh}{2\pi(h^2 + r^2)^{3/2}}$

notez $\sigma(r)$ car ne dépend que de $r = OM$.

- 2d) En différenciant logarithmiquement la relation précédente, on obtient :

$\frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{3}{2} \frac{d(h^2 + r^2)}{(h^2 + r^2)} = -\frac{3}{2} \frac{2r dr}{(h^2 + r^2)} \quad \text{d'où} \quad \left| \frac{d\sigma}{dr} \right| = +\frac{3}{2} \frac{2r}{(h^2 + r^2)} |\sigma|$

Soit la fonction $f : r \mapsto \frac{2r}{h^2 + r^2}$ Alors $f'(r) = \frac{2}{(h^2 + r^2)^2} (h^2 + r^2 - r \cdot 2r) = 2 \cdot \frac{h^2 - r^2}{h^2 + r^2}$

Ainsi f croît si $r < h$ et est donc max en $r = h$ où elle vaut $f(h) = \frac{1}{h}$
 décroît si $r > h$

d'où l'inégalité :

$$\forall r \quad \left| \frac{d\sigma}{dr} \right| \leq \frac{3}{2} \frac{|\sigma|}{h}$$

(2)

3a) Soit Q la charge totale sur Σ ; celle-ci se calcule par intégration :

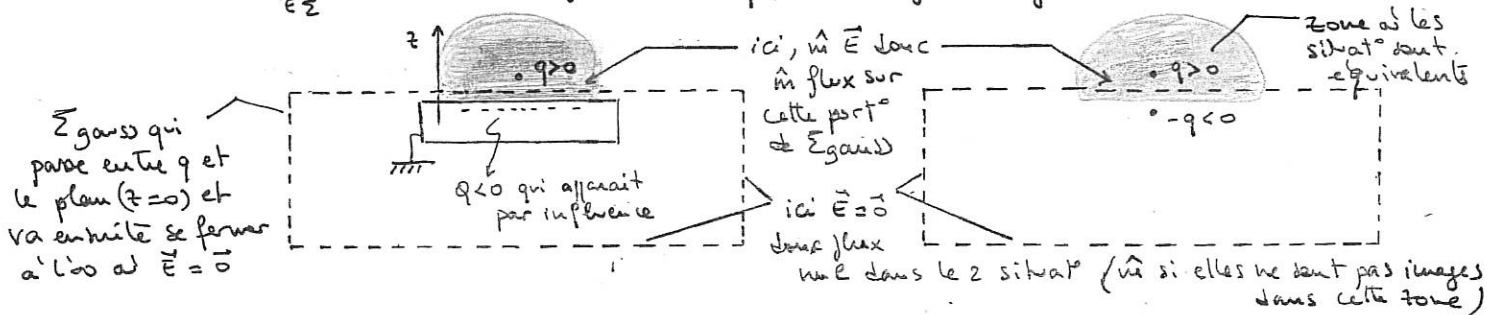
$$Q = \iint_{\Sigma} \sigma(r) dS_r = \int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} \sigma(r) r dr d\theta = \underbrace{\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \times \underbrace{\int_{r=0}^{\infty} \frac{r dr}{(h^2+r^2)^{3/2}}}_{I} \times \frac{-qh}{2\pi}$$

L'intégrale I se calcule en posant $u = h^2 + r^2$; alors $du = 2r dr$, $u: h^2 \rightarrow \infty$

et on a donc
$$I = \frac{1}{2} \int_{h^2}^{\infty} u^{-3/2} du = - \left[u^{-1/2} \right]_{h^2}^{\infty} = \frac{1}{h}$$

CCL :
$$Q = -q$$

Rq : on aurait pu s'en sortir par la raison suivante : dans la situation réelle on peut imaginer d'enrober le conducteur par une surface de Gauss et on aura $Q = Q_{int} \text{ à } \Sigma = \Phi_{E, \Sigma}$. Or dans la situation image $\forall z > 0$ $\vec{E}$ est le $\hat{n}$, donc pour la $\hat{n}$ surface bien choisie (cf schéma) on a $\hat{n} \cdot \vec{E} = 1$ d'où $\hat{n} \cdot Q_{int}$ qui vaut $-q$, la charge image ! (QFD)



Rq' : quand il apparaît sur un conducteur, par influence, une charge égale à l'opposé de la charge q qui y approche, on dit qu'il y a influence totale entre q et le conducteur. De $\hat{n}$, on dit qu'il y a influence totale entre les 2 plaques d'un condensateur idéal, portant des charges opposées. En réalité, les conducteurs sont en influence "partielle".

3b) Par déf, $\vec{F}_A = q \vec{E}(A)$ où $\vec{E}(A)$ est le champ créé en A par le plan conducteur.

Le fait de l'équivalence $\vec{E}(A)$ est aussi le champ créé en A par la charge "image"

$-q$ situé en A' d'où
$$\vec{E}(A) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{A'A}}{A'A^3} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-2h \vec{u}_3)}{(2h)^3}$$

CCL :
$$\vec{F}_A = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (2h)^2} \vec{u}_3$$
 : la charge est attirée par le plan

Rq : Ceci est réciproque : le plan est attiré par la charge ; c'est un phénomène dit de "pression électrostatique" qui existe sur tout conducteur chargé en équilibre.

Deuxième partie.

1 a) La relation demandée découle directement des conditions limites à l'infini :

$$\underline{V(r, z \rightarrow \infty) = 0} \quad \& \quad \underline{n(r, z \rightarrow \infty) = n_0} \quad \& \quad \underline{\tilde{\mu}(r, z \rightarrow \infty) = \mu(n_0, T)}$$

1 b) L'équation d'équilibre peut s'écrire : que $\forall d\vec{r}$ déplacement dans l'espace, $d\tilde{\mu} = 0$

$$\text{or } d\tilde{\mu} = d\mu(n, T) - e \cdot dV \quad \& \quad \begin{cases} d\mu(n, T) = \left. \frac{\partial \mu}{\partial n} \right|_T & \text{car } T \text{ ne varie pas} \\ & (T \text{ uniforme}) \\ du = \vec{g} \cdot d\vec{r} & ; \quad dV = \vec{g} \cdot d\vec{r} \\ & = -\vec{E} \cdot d\vec{r} \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } \underline{\forall d\vec{r}} \quad \left\{ \left. \frac{\partial \mu}{\partial n} \right|_T (n, T) \vec{g} + e \vec{E} \right\} \cdot d\vec{r} = 0$$

Ce qui impose

$$\boxed{\left. \frac{\partial \mu}{\partial n} \right|_T (n, T) \vec{g} + e \vec{E} = \vec{0} \quad \forall (r, z)}$$

Rq : L'équilibre peut exister avec $\vec{E} \neq \vec{0}$ mais il y a alors une densité n non uniforme. On peut comparer cette situation à l'équilibre de l'atmosphère isotherme où, malgré le champ gravitationnel, il y a équilibre du gaz avec un gradient de densité (et donc de pression).
Évidemment, la relation $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ ne serait alors plus valable, il faudrait la remplacer par $\vec{j} = \gamma \vec{E} + \gamma' \vec{g}$ et on aurait $\vec{j} = \vec{0}$ à l'éq !

↓

déplacement des
charges dû au champ $\vec{E}$
(conduction)

↓

déplacement des
charges dû à la non
homogénéité (diffusion)

1 c) En coordonnées cylindriques $\vec{g} = \left. \frac{\partial \mu}{\partial r} \right|_T \vec{u}_r + \left. \frac{\partial \mu}{\partial z} \right|_T \vec{u}_z$ d'où en projetant :

$$\boxed{E_r(r, z) = -\frac{1}{e} \left. \frac{\partial \mu}{\partial n} \right|_T \left. \frac{\partial \mu}{\partial r} \right|_z \quad \& \quad E_z(r, z) = -\frac{1}{e} \left. \frac{\partial \mu}{\partial n} \right|_T \left. \frac{\partial \mu}{\partial z} \right|_r}$$

2 a) La non homogénéité de $n(r, z)$ résulte de l'influence de la charge $q > 0$ et correspond à un excédent de charge négative au voisinage de l'origine, d'autant plus marqué que l'on est proche de la charge $+q$.

$$\text{Ainsi } \begin{cases} n(r, z) > n_0 (> 0) \\ \& \text{ max en } z=0, r=0 \end{cases} \quad \& \quad \begin{cases} \text{décroit quand } r \uparrow \text{ à } z \text{ fixe} \\ \text{— — — } z \uparrow \text{ à } r \text{ fixe} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left. \frac{\partial n}{\partial r} \right|_z \leq 0 \\ \left. \frac{\partial n}{\partial z} \right|_r < 0 \end{cases}$$

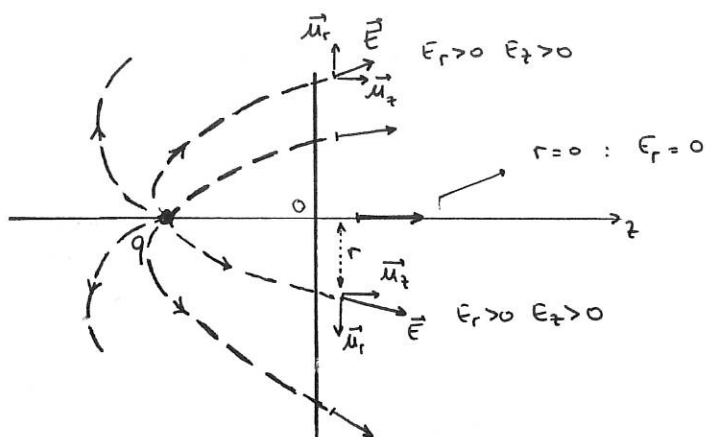
= 0 en $r=0 \forall z$
↑ (max local)

↳ cf 1^{re} partie où $|O|$ était max en 0.

Comme $\left. \frac{\partial \mu}{\partial n} \right|_T > 0$ on a donc

$$\boxed{\forall (r, z) \quad E_r(r, z) \geq 0 \quad \& \quad E_z(r, z) > 0}$$

↳ = 0 en $r=0 \forall z$ par symétrie



Rq: E_r et $E_z > 0 \quad \forall (r, z)$ semble cohérent avec l'allure qualitative que l'on peut donner des lignes de champ.

Dans cette approche volumique il n'y a plus de discontinuité de $\vec{E}$ sur (oxy).

Quel rôle joue la composante radiale ? (La question est vague ...). On peut dire qu'elle caractérise la différence entre cette situation et le modèle du conducteur parfait pour lequel $E_r = 0$ d'après le théorème de Coulomb [cf I 2b)].

2b) Directement:
$$\frac{E_r}{E_z} = \frac{\partial n / \partial r|_z}{\partial n / \partial z|_r}$$

3a) En un point M où la densité est n , on peut évaluer $|\frac{\partial n}{\partial z}|$ par $\frac{n - n_0}{\Delta}$

En effet $\frac{\partial n}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta n}{\Delta z} \Big|_{r \text{ fixe}} \right)$ $\left\{ \begin{array}{l} \Delta n : \text{variat}^n \text{ de } n \text{ entre } z \text{ et } z + \Delta z \\ \Delta z : \text{épaisseur de milieu sur laquelle on évalue la variat}^n \Delta n \end{array} \right.$

et ici, à partir d'un point où la densité est n , il suffit (à r fixé) de pénétrer dans le conducteur de $\Delta z \sim \Delta$ pour atteindre "l'autre" où la densité est n_0 ; soit en ordre de grandeur, une variatⁿ $\Delta n = n - n_0$ sur une épaisseur Δ .

L'évaluation proposée est donc un effet "moyen" et non réellement local ($\Delta z \neq 0$) mais est correcte en ordre de grandeur si $n(r \text{ fixe}, z)$ est monotone et "régulière".

Rq: Ce genre d'évaluatⁿ est "à l'ancienne" en physique (cf cours sur la diffusion) et permet de très bonnes analyses semi-quantitatives.

3b) Si on " transpose " la formule du I 2d) à ρ , on a ici: $\left| \frac{\partial \rho}{\partial r} \right| \leq \frac{3}{2} \frac{|\rho|}{h}$

En remplaçant ρ par $-e(n - n_0)$ et $\frac{\partial \rho}{\partial r}$ par $-e \frac{\partial n}{\partial r}$, il vient:

$$\left| \frac{\partial n}{\partial r} \right| \leq \frac{3}{2} \frac{n - n_0}{h}$$

Rq: Cette "transposition" se justifie comme suit. σ peut se définir à partir de ρ par:

$$\sigma(r) = \int_{z=0}^{\infty} \rho(r, z) dz \quad \text{donc} \quad \frac{d\sigma}{dr} = \int_{z=0}^{\infty} \frac{\partial \rho}{\partial r} dz$$

Alors $\left| \frac{d\sigma}{dr} \right| \leq \int_0^{\infty} \left| \frac{\partial \rho}{\partial r} \right| dz$ or si $\left| \frac{\partial \rho}{\partial r} \right| \leq \frac{3}{2} \frac{|\rho|}{h}$, cela implique que $\left| \frac{d\sigma}{dr} \right| \leq \frac{3}{2} \int_0^{\infty} |\rho| dz \cdot \frac{1}{h} = \frac{3}{2} \frac{|\sigma|}{h}$ car ρ et σ sont de même signe $\forall (r, z)$ et de même signe

3c) On obtient ainsi $\frac{E_r}{E_z} = \frac{\partial n / \partial r|_z}{\partial n / \partial r|_r} \leq \frac{\frac{3}{2} \frac{n-n_0}{h}}{\frac{n-n_0}{\lambda}} \sim \frac{\lambda}{h}$ (facteur 3/2 sans signification en ordre de grandeur) (5)

CC1: Comme on l'a dit au 2a), le modèle du conducteur parfait conduit à $E_r = 0$ en surface du conducteur, donc est valable si dans la réalité $E_r \ll E_z$, soit si $\boxed{\lambda \ll h}$

Alors, la variat de E_z qui se fait sur une épaisseur $\sim \lambda$ est très brutale à l'échelle spatiale du problème qui est h (distance charge-plan) $\rightarrow$ on a grossièrement une discontinuité à l'échelle de h .

Tout est cohérent !

Troisième partie.

1a) La condition d'équilibre est : $\mu(n, T) - eV = \mu(n_0, T)$

Si n reste proche de n_0 , on peut effectuer un DL de $\mu(n, T)$ au voisinage de n_0 :

$$\mu(n, T) \underset{\text{DL}}{\approx} \mu(n_0, T) + (n - n_0) \left. \frac{\partial \mu}{\partial n} \right|_T (n_0, T)$$

Ainsi, en se rappelant que $\rho = -e(n - n_0)$, il vient comme nouvelle expression de la condition d'équilibre :

$$\rho(r, t) \left. \frac{\partial \mu}{\partial n} \right|_T (n_0, T) + e^2 V(r, t) = 0$$

1b) L'équation de Poisson donne la relation attendue :

$$\boxed{\Delta V = -\rho / \epsilon_0}$$

erreur énoncée : c'est $\frac{\partial \mu}{\partial n}$ non $\frac{\partial \mu}{\partial n_0}$ qui n'a pas de sens

1c) On prend le Laplacien de la relation du 1a), opérateur pour lequel $\left. \frac{\partial \mu}{\partial n} \right|_T (n_0, T)$ est une constante :

$$\left. \frac{\partial \mu}{\partial n} \right|_T (n_0, T) \cdot \Delta \rho + e^2 \underbrace{\Delta V}_{-\rho / \epsilon_0} = 0$$

soit

$$\boxed{\lambda^2 \Delta \rho - \rho = 0 \quad \text{avec} \quad \lambda^2 = \frac{\epsilon_0}{e^2} \left. \frac{\partial \mu}{\partial n} \right|_T (n_0, T)} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{\Delta \rho = \rho / \lambda^2}$$

2. Explicitons d'abord explicitement le Laplacien :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) = \rho / \lambda^2$$

Pour le changement de var., il est + astucieux "d'inverser" les formules de dif de R, z et $\bar{\rho}$ i.e. de remplacer z par λz , r par hR et ρ par $\bar{\rho} / \lambda h^2$. Il vient :

$$\frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 \bar{\rho}}{\partial z^2} + \frac{1}{h^2} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial R} \right) = \bar{\rho} / \lambda^2 \quad \text{Reste à multiplier par } \lambda^2 \text{ pour obtenir explicitement attendu.}$$

Il veut :

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial z^2} + \left(\frac{\lambda}{h}\right)^2 \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \bar{p}}{\partial R} \right) = \bar{p}$$

◆ Cette démarche est "universelle" et très fructueuse.

3 a) $\lambda/h \ll 1$: si λ représente bien la longueur d'écran introduite dans la partie 2, cette condit° doit permettre de se rapprocher du cas du conducteur parfait.

Point délicat : le chang^t de variable a créé les grandeurs adimensionnelles R et z dont les variations caractéristiques sont de l'ordre de l'unité.

(r varie de $0 \rightarrow h$ & z varie de $0 \rightarrow \lambda$) $\Rightarrow R$ et z varient de $0 \rightarrow 1$

Ainsi $\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial z^2}$ et $\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \bar{p}}{\partial R} \right)$ sont du même ordre de grandeur

$\Rightarrow$ si $\frac{\lambda}{h} \ll 1$ cela permet de négliger le terme radial du laplacien et d'écrire l'équat° approchée :

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial z^2} \approx \bar{p}$$

Intégrat° : $\bar{p}(R, z) = f_1(R) e^{-z} + f_2(R) e^{+z}$
 $\rightarrow \infty$ quand $z = z/h \rightarrow \infty$
 Divergence inacceptable $\Rightarrow f_2(R) = 0$

CCL :

$$\bar{p}(R, z) = f(R) g(z) \text{ où } g(z) = e^{-z}$$

$$\approx p(r, z) = f(r/h) \exp(-z/h)$$

$\times \frac{1}{\sqrt{h^2}}$ { en toute rigueur mais on peut "incorporer" cette valeur dans f

3 b) Calculons $\int_0^\infty p(r, z) dz = f\left(\frac{r}{h}\right) \int_0^\infty e^{-z/h} dz = f\left(\frac{r}{h}\right) \left[-\frac{e^{-z/h}}{1/h} \right]_0^\infty = h f(R)$

dont on déduit

$$f\left(\frac{r}{h}\right) = \frac{\sigma(r)}{h} = \frac{-q/h^2}{2\pi [1 + (r/h)^2]^{3/2}}$$

3 c) Finalement :

$$p(r, z) = -\frac{q}{2\pi h^2} \frac{e^{-z/h}}{[1 + (r/h)^2]^{3/2}}$$

4. L'équation du III 2a) serait aussi : $V(r, z) = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_r (u_0, T) p(r, z) = -\frac{\lambda^2}{\epsilon_0} p(r, z)$

Ainsi $V(r, z) = + \frac{q}{2\pi \epsilon_0} \frac{\lambda}{h^2} \frac{e^{-z/h}}{[1 + (r/h)^2]^{3/2}}$

Or $V_0 = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 h}$

donc

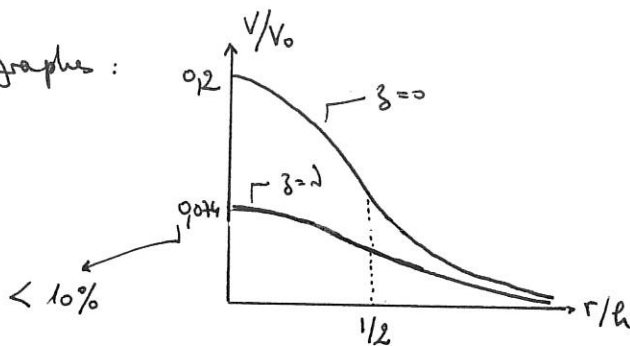
$$V(r, z)/V_0 = 2 \cdot \frac{\lambda}{h} \frac{e^{-z/h}}{[1 + (r/h)^2]^{3/2}}$$

Notons $K = 2 \frac{\lambda}{h} e^{-z/h} = 0,2$ en $z=0$ ($\frac{\lambda}{h} = 0,1$) & $0,074$ en $z=\lambda$

$V(r, z)/V_0 = K \cdot (1 + R^2)^{-3/2}$ avec $R = r/h$ dérivée/R : $-\frac{3}{2} K \cdot 2R (1 + R^2)^{-5/2}$
 fixe $= 0$ en $R=0$ et < 0 pour $R > 0$

De même on peut dériver z fois et montrer qu'il y a une inflexion en $R = 1/2$

D'après les graphes :



Commentaire : Ceci prouve bien que, comme annoncé dans la partie 2, λ est l'ordre de grandeur de l'épaisseur où V et $\vec{E}$ sont $\neq 0$.

Radialement la taille de cette zone est $\underline{h}$.

→ Au delà de λ en profondeur et h radialement, on retrouve $V \approx 0$ (et $\vec{E} = \vec{0}$) ce qui correspond au conducteur parfait.

5a) Si $\mu \approx \frac{\hbar^2}{2m_e} (3\pi^2 n_0)^{2/3}$ alors $\frac{\partial \mu}{\partial n} \Big|_T$ s'évalue par $\frac{d\mu}{dn} = \frac{2}{3} \frac{d\mu}{dn}$
 ↳ Comprendre n ! ↳ inutile puisqu'on a pris une expression de μ indep de r (valeur à $r=0$)

donc $\frac{\partial \mu}{\partial n} \Big|_T (n_0, T) = \frac{2}{3} \frac{\mu(n_0, T=0)}{n_0} = \frac{\hbar^2}{3m_e} (3\pi^2)^{2/3} n_0^{-1/3}$

on en déduit $\lambda_M^2 = \frac{\epsilon_0}{e^2} \frac{\hbar^2}{3m_e} (3\pi^2)^{2/3} n_0^{-1/3} = \underbrace{\frac{4\pi \epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2}}_{a_0} \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{4\pi} n_0^{-1/3}$

soit $\lambda_M = \frac{(3\pi^2)^{1/3}}{(4\pi)^{1/2}} \sqrt{\frac{a_0}{n_0^{1/3}}}$

5b) AN : $\lambda_{Cu} = 55 \text{ pm}$! ⚠ Le fait de trouver $\lambda <$ taille d'un atome invalide totalement l'approche, qui décrit la matière de façon continue (via ρ par ex) en s'appuyant sur des variat° de grandeurs à l'échelle méscopique et non microscopique.

⇒ Dans un métal aussi conducteur que Cu, seule l'approche surfacique de la partie 1 est en fait valable !!

6a) D'après les hypothèses, on a directement

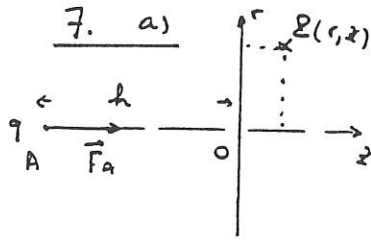
$$\lambda_{sc} = \sqrt{\frac{\epsilon \hbar^2 T}{n_0 e^2}}$$

6b) $n_0 = 10^{18} \text{ m}^{-3} \rightarrow \lambda_{sc} = 4,5 \text{ } \mu\text{m}$: la descript° utilisée est acceptable la charge reste "surfacique" à l'échelle macroscopique.

$n_0 = 10^{25} \text{ m}^{-3} \rightarrow \lambda_{sc} = 1,4 \text{ nm}$: on est à l'extrême limite de l'acceptabilité (cf 5b) pour la description continue volumique.

|| CCL : ds que $n_0 \gtrsim 10^{25} \text{ m}^{-3}$ (SC ou M) les charges sont "réellement" localisées en surface du conducteur (quasi à l'échelle atomique !)

(pour info : aucun intérêt, trop calculatoire dans le cadre des programmes actuels)



$$\vec{F}_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{z \geq 0} |\rho(P)| \delta\tau_P \frac{\vec{AP}}{AP^3}$$

Elle est dirigée selon Oz par symétrie de répartition :

$$\vec{F}_A = (\vec{F}_A \cdot \vec{e}_z) \vec{e}_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{z \geq 0} |\rho(P)| \delta\tau_P \left(\frac{\vec{AP} \cdot \vec{e}_z}{AP^3} \right) \vec{e}_z$$

$$\text{soit } \vec{F}_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{z=0}^{\infty} \int_{r=0}^{\infty} \frac{|\rho(r,z)| (h+z)}{[(h+z)^2 + r^2]^{3/2}} \cdot 2\pi r dr dz \cdot \vec{e}_z.$$

7. b) Comme $\lambda \ll h$ et que le domaine utile pour z est $0 \leq z \leq 10\lambda$ par exemple, il est légitime de remplacer $h+z$ par h dans l'intégrale :

$$\vec{F}_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{z=0}^{\infty} \int_{r=0}^{\infty} \frac{|\rho(r,z)| h}{(h^2 + r^2)^{3/2}} \cdot 2\pi r dr dz \cdot \vec{e}_z$$

ou $\int_{z=0}^{\infty} \rho(r,z) dz = \sigma(r)$: on se ramène alors au modèle de la partie I :

$$\vec{F}_A = \int_{r=0}^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\sigma(r)| h}{(h^2 + r^2)^{3/2}} \cdot 2\pi r dr \vec{e}_z \quad (\text{intégrale sur le plan } xy)$$

$$\text{on a établi que } \sigma(r) = \frac{-q h}{2\pi [r^2 + h^2]^{3/2}},$$

$$\text{alors } \vec{F}_A = \frac{q^2 h^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{r=0}^{\infty} \frac{r dr}{[r^2 + h^2]^3} \vec{e}_z. \quad \text{L'intégrale vaut } \frac{1}{4h^4},$$

$$\text{on obtient alors } \vec{F}_A = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (2h)^2} \vec{e}_z.$$