

**DEVOIR SURVEILLÉ n°5**  
**Samedi 7 janvier 2023 – Durée 4h**

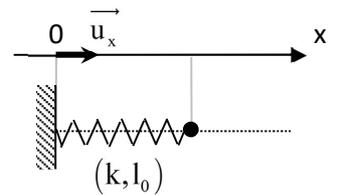
*L'utilisation des calculatrices est autorisée. Toute réponse non justifiée ne sera pas considérée. La précision, la clarté ainsi que les efforts de présentation (résultats encadrés ou soulignés) seront pris en compte dans la note. Les exercices d'électrocinétiques devront nécessairement être accompagnés de schémas électriques.*

*Les problèmes sont indépendants.*

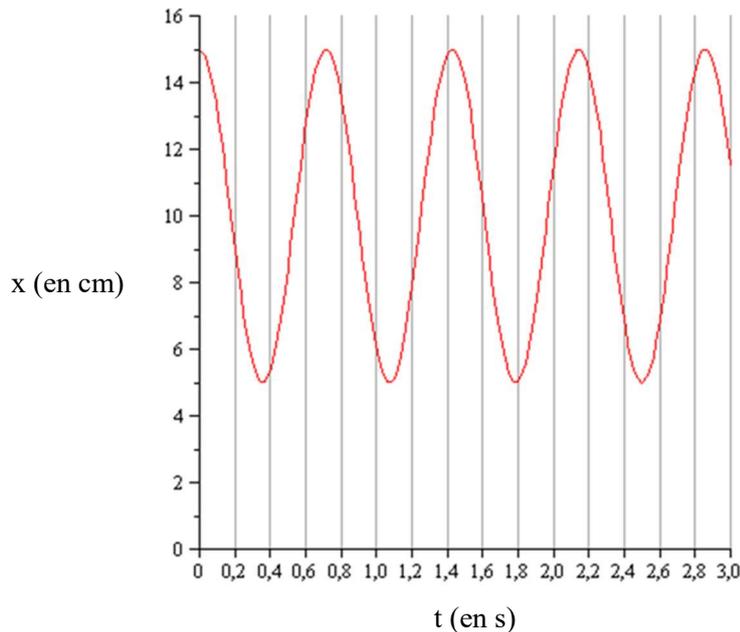
**Problème I : étude expérimentale d'un oscillateur mécanique**

**Partie I**

Un oscillateur harmonique mécanique non amorti est réalisé à l'aide d'un charriot mobile de masse  $m = 100\text{g}$  et attaché à l'extrémité libre d'un ressort à spires non jointives de raideur identique  $k$  et de longueur à vide au repos  $l_0$  son autre extrémité étant fixée au point O. Le charriot est guidé par un rail à coussin d'air qui compense l'action verticale du poids et permet de rendre les frottements négligeables.



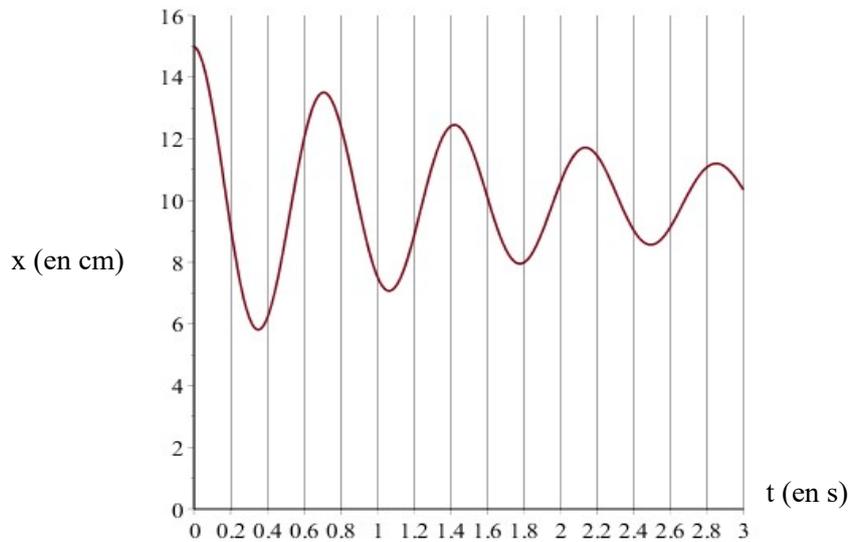
- 1- Déterminer l'abscisse  $x_{\text{eq}}$  de la position d'équilibre du charriot.
- 2- Etablir l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse  $x$  du charriot
- 3- La position du charriot est enregistrée au cours du temps (courbe ci-dessous).  
Mesurer la position initiale  $x(0)$  et justifier que la vitesse initiale est nulle.  
Résoudre l'équation différentielle obtenue au 2- en utilisant ce jeu de conditions initiales.



- 4- Dédurre du graphique la valeur de  $l_0$  et de  $k$ .
- 5- On suppose maintenant que le charriot est lancé depuis la position d'équilibre avec une vitesse  $\vec{v} = v_0 \cdot \vec{u}_x$ . Résoudre l'équation différentielle et déterminer la vitesse maximale qui peut être communiquée au charriot (on supposera que la longueur minimale du ressort est  $l_{\text{min}} = 0$ ).  
Faire l'application numérique.

## Partie II- Oscillations amorties

On fixe une voile à l'objet de masse  $m$ , toujours relié au ressort et posé sur le rail à coussin d'air. On obtient l'enregistrement représenté courbe 2 ci-dessous.



- 1- Que peut-on dire de la pseudo-période ? Calculer le décrément logarithmique  $\delta$ .
- 2- Evaluer numériquement l'énergie qui a été dissipée au cours de la première oscillation (on prendra  $k = 7,78 \text{ N.m}^{-1}$ ).
- 3- Sur la courbe tracée en annexe, esquisser l'allure des évolutions temporelles de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique. On fera attention de préciser quelques valeurs numériques sur l'axe des ordonnées et indiquera clairement les instants où les énergies sont extrémales.
- 4- On modélise la force due à la voile par une force de frottement fluide du type  $\vec{f} = -h \cdot \vec{v}$  avec  $\vec{v}$  vitesse du mobile dans  $R_t$  et  $h$  constante positive.
  - 4-a- Etablir l'équation différentielle vérifiée par  $x$  et détermine l'expression de la pulsation propre  $\omega_0$  et du facteur de qualité  $Q$  en fonction des données. Quelle inégalité doit vérifier  $Q$  dans l'expérience réalisée?
  - 4-b- Exprimer la pseudo-pulsation  $\Omega$  en fonction de  $\omega_0$  et  $Q$ .
  - 4-c- Déterminer la solution  $x(t)$  en accord avec les conditions initiales lues sur le graphique ci-dessous.
- 5-a- Déterminer l'expression du décrément logarithmique en fonction de  $\omega_0$  et  $Q$ .
- 5-b- En déduire la valeur numérique de la constante  $Q$  puis celle du coefficient de frottement  $h$ .
- 6- On veut évaluer le coefficient de frottement  $h$  en utilisant le travail de la force de frottement. Pour simplifier les calculs on utilisera, pendant la première pseudo-période, pour  $x(t)$  l'expression approchée suivante :  $x(t) \approx l_0 + \frac{3}{4} X_0 \cdot \cos(\omega_0 t)$  avec  $X_0 = x(0) - l_0$ .
  - 6-a- On rappelle l'expression du travail d'une force entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  :  $E = \int_{t_1}^{t_2} P dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt$  (où  $P$  est la puissance de la force, produit scalaire de la force par la vitesse du système). Exprimer le travail de la force de frottement entre les dates  $t = 0$  et  $t = T$ .
  - 6-b- Cette énergie correspond à l'énergie dissipée au cours de la première oscillation. Déterminer la valeur de  $h$  et conclure.

## Problème II : circuit de Blumlein

On étudie dans ce problème un circuit permettant de déclencher très rapidement des décharges dans un gaz pour former un plasma. On le rencontre par exemple dans les lasers à Na, dans des dispositifs de production de rayons X.

On établit dans une première partie des résultats classiques sur les circuits linéaires du deuxième ordre qu'on appliquera dans les parties suivantes.

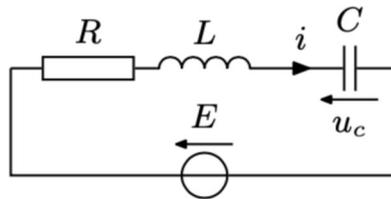
### Données :

- Tension de l'alimentation  $E_0 = 20 \text{ kV}$ .
- Capacités :  $C_s = C_d = 7,6 \text{ nF}$ .
- Paramètres du circuit dit de stockage :  $L_s = 30 \text{ nH}$ ,  $R_s = 470 \Omega$ .
- Paramètres du thyatron :  $L_t = 150 \text{ nH}$ ,  $R_t = 0,7 \Omega$ .

Ces paramètres correspondent à la « source Flash de rayonnement X pour le diagnostic de sprays denses » du laboratoire « Groupe de Recherche sur l'Énergétique des Milieux Ionisés » du CNRS d'Orléans.

### 1- Généralités

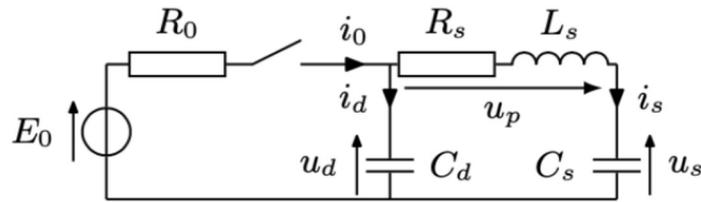
On considère le circuit RLC série de la figure ci-dessous, dans laquelle la tension  $E$  est constante.



- 1- Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension  $u_c$  aux bornes du condensateur. On y fera apparaître une pulsation caractéristique  $\omega_0$ , et un facteur de qualité  $Q$ .
- 2- Déterminer la solution générale de cette équation différentielle pour  $Q > \frac{1}{2}$ .
- 3- **3a-** Déterminer la solution générale de cette équation différentielle pour  $Q < \frac{1}{2}$ . On fera apparaître deux constantes de temps  $\tau_+$  et  $\tau_-$ , avec  $\tau_+ > \tau_- > 0$ , dont on donnera les expressions en fonction de  $\omega_0$  et  $Q$ .  
**3b-** Simplifier les expressions de  $\tau_+$  et  $\tau_-$  pour  $Q \ll 1$ . Vérifier qu'on obtient alors  $\tau_+ = RC$  et  $\tau_- = \frac{L}{R}$ . On pourra utiliser  $\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2}$  pour  $\varepsilon \ll 1$ .  
**3c-** Déterminer, sous cette approximation, la solution vérifiant les conditions initiales  $u_c(0) = 0$  et  $i(0) = 0$
- 4- En déduire le temps caractéristique pour atteindre l'asymptote est :
  - proportionnel à  $Q$  pour  $Q \gg 1$ ;
  - inversement proportionnel à  $Q$  pour  $Q \ll 1$ .
- 5- On s'intéresse à la décharge du circuit précédent : on a  $E = 0$  et les conditions initiales sont  $u_c(0) = U_0$  et  $i(0) = 0$ . On considère le cas  $R = 0$ .  
**5a-** Déterminer les expressions de  $u_c(t)$  et  $i(t)$ .  
**5b-** En déduire l'expression de la puissance  $P(t)$  fournie par le condensateur, ainsi que sa valeur maximale. Quand est-elle atteinte ?

## 2- Charge

On considère le circuit de la figure ci-dessous. L'interrupteur, initialement ouvert est fermé à l'instant  $t = 0$  et pour  $t < 0$  les deux condensateurs sont déchargés et aucun courant ne circule dans aucune branche.

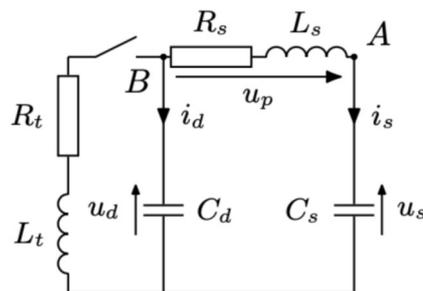


- 6- **6a-** Déterminer, pour  $t = 0^+$  juste après la fermeture de l'interrupteur les expressions des tensions  $u_d$ ,  $u_s$ ,  $u_p$  et des intensités  $i_d$ ,  $i_s$  et  $i_0$ .  
**6b-** En déduire quelles valeurs on peut choisir pour  $R_0$  pour que la puissance initiale délivrée par le générateur  $E_0$  reste inférieure à  $P_0 = 1$  kW.
- 7- Un régime stationnaire s'établit au bout d'un temps long.  
**7a-** Déterminer les tensions  $U_d$ ,  $U_s$  et  $U_p$  quand le régime stationnaire est établi (on ne cherchera pas à résoudre d'équation différentielle). En déduire l'expression puis la valeur de l'énergie stockée dans chacun des condensateurs.  
**7b-** On ouvre alors l'interrupteur. Déterminer l'évolution ultérieure du système. Doit-on prendre des précautions particulières lors de l'ouverture de l'interrupteur.

L'alimentation haute tension  $E_0$  reste déconnectée du circuit dans toute la suite du problème, on ne la représentera donc plus sur les schémas.

## 3- Déclenchement

On souhaite faire croître très rapidement la tension  $u_p$ . Pour cela on branche aux bornes du condensateur  $C_d$  un commutateur spécial nommé thyatron, rapide et capable de supporter une grande puissance. On le modélise comme l'association série d'un interrupteur idéal, d'une résistance  $R_t$  et d'une bobine  $L_t$ . Le circuit est alors celui représenté ci-contre. On ferme l'interrupteur à un instant qu'on choisira comme nouvelle origine des temps.



- 8- Montrer que les tensions  $u_d$  et  $u_s$  vérifient un système d'équations différentielles de la forme ci-contre, avec  $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6$  des constantes positives qu'on exprimera en fonction des caractéristiques du circuit.

$$u_s - u_d + K_1 \frac{du_s}{dt} + K_2 \frac{d^2u_s}{dt^2} = 0 \quad (1)$$

$$u_d + K_3 \frac{du_d}{dt} + K_4 \frac{du_s}{dt} + K_5 \frac{d^2u_d}{dt^2} + K_6 \frac{d^2u_s}{dt^2} = 0 \quad (2)$$

- 9-** On cherche à simplifier ce système en supposant que les variations temporelles de  $u$  sont très lentes par rapport à celles de  $u_d$ .
- 9a-** Simplifier alors l'équation (2) pour obtenir une équation différentielle ne portant que sur  $u_d$ . On y fera apparaître une pulsation caractéristique notée  $\omega_d$  et un facteur de qualité noté  $Q_d$  dont on calculera les valeurs, ainsi que celle de la pseudo période notée  $T_d$ .
- 9b-** Résoudre cette équation différentielle et donner l'ordre de grandeur de la constante de temps d'amortissement des oscillations de  $u_d$ .
- 9c-** Justifier brièvement qu'on peut approximativement remplacer  $u_d(t)$  par une constante (qu'on précisera) dans l'équation (1). Résoudre l'équation différentielle sur  $u_s$  obtenue et préciser la nature de son régime d'évolution (on définira un facteur de qualité  $Q_s$ ).
- 10-** Déterminer, au moyen d'approximations qu'on justifiera, la puissance maximale reçue par le thyatron. Calculer sa valeur.

#### 4 Décharge dans le plasma

Les électrodes entre lesquelles on souhaite allumer un plasma en créant une décharge sont branchées aux nœuds A et B. La décharge s'amorce quand la tension  $u = u_p$  atteint une valeur suffisante.

- 11-** Montrer qu'avec les approximations précédentes, on peut écrire aux temps courts :

$$u_p(t) \approx A \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega t) \right)$$

avec  $\tau$  et  $\omega$  des constantes qu'on exprimera en fonction des paramètres établis à la question **9-**

- 12-** Tracer l'allure de cette fonction et déterminer l'instant  $t$  où  $u_p$  est maximale ainsi que la valeur de ce maximum. Calculer leurs valeurs.

## Problème III : Radioétiquetage au cuivre-64 DM6 4/01/2021

### A- Généralités sur l'élément cuivre

- 1- Le cuivre, de symbole Cu, est l'élément de la 4<sup>ème</sup> période du tableau périodique des éléments, situé dans la colonne n°11. Déterminer le numéro atomique Z du cuivre.
- 2- L'isotope 64 du cuivre, utilisé dans les radiosondes, est radioactif. Les isotopes stables, que l'on trouve dans la nature, sont les isotopes 63 et 65. Sachant que la masse molaire du cuivre est de  $M = 63,5 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ , en déduire les abondances naturelles approximatives des isotopes du cuivre.

Les études spectroscopiques ont montré que la configuration électronique d'un atome de cuivre dans son état fondamental pouvait s'écrire :  $[\text{Ar}]3d^{10}4s^1$ .

- 3- Quel élément a pour symbole Ar ? Que signifie la notation [Ar] ? À quelle famille appartient l'élément Ar ?
- 4- La configuration électronique proposée ci-dessus n'est pas celle que l'on attendrait a priori ; expliquer pourquoi.

Le cuivre est un métal parfois considéré comme un métal noble. En effet, il est inattaquable dans l'eau neutre et il ne réagit pas avec le dioxygène de l'air dans les conditions usuelles.

Cependant, le cuivre peut réagir dans les conditions suivantes :

- a) un morceau de cuivre porté au rouge dans la flamme d'un bec meker et placé dans un flacon de dioxygène peut réagir pour former une poudre rouge de formule brute  $\text{Cu}_2\text{O}$  ;
- b) un morceau de cuivre entrant en contact avec du gaz difluor s'enflamme pour donner un solide blanc de formule brute  $\text{CuF}_2$  ;
- c) un morceau de cuivre est attaqué par une solution d'acide sulfurique concentré, avec un abondant dégagement gazeux, la solution devenant progressivement bleue.

On modélisera une solution d'acide sulfurique comme de l'eau contenant les solutés  $\text{H}_{(\text{aq})}^+$  et  $\text{SO}_4^{2-}$ , les ions sulfate étant ici spectateurs.

- 5- Proposer une structure de Lewis pour l'ion  $\text{SO}_4^{2-}$  (on placera S au centre) et pour la molécule  $\text{H}_2\text{SO}_4$ . Que peut-on dire des liaisons S-O dans  $\text{SO}_4^{2-}$  et dans  $\text{H}_2\text{SO}_4$
- 6- Dans les produits des réactions a) et b) les éléments Cu, O et F ne sont pas présents à l'état neutre, mais sous forme « ionique » (on parlera de degrés d'oxydation différents) ; indiquer quels sont les ions monoatomiques présents dans  $\text{Cu}_2\text{O}$  et  $\text{CuF}_2$  (4 ions différents) et donner les configurations électroniques de chaque ion dans leur état fondamental. Écrire les équations des réactions a) et b).
- 7- Quel est le gaz qui se dégage dans la réaction c) ? Comment peut-on le mettre en évidence ? Écrire l'équation de la réaction c).
- 8- Quelle propriété chimique du cuivre est mise en évidence dans ces trois réactions ?

Les éléments de la colonne du cuivre sont l'argent, Ag (période 5) et l'or, Au (période 6). Ces métaux sont encore plus nobles que le cuivre.

- 9- À partir de configurations électroniques, retrouver les numéros atomiques de l'argent et de l'or.

### B- Radioactivité du cuivre 64 et radioétiquetage

- 10- Donner le nombre de protons et de neutrons dans le noyau d'un ion  ${}^{64}\text{Cu}^{2+}$ , ainsi que la configuration électronique de cet ion.
- 11- Ce noyau se désintègre spontanément notamment en un noyau de  ${}^{64}_{28}\text{Ni}$ . Montrer que le cuivre-64 est un noyau adapté à la tomographie par émission de positrons (TEP). On rappelle que le positron est l'antiparticule de l'électron.

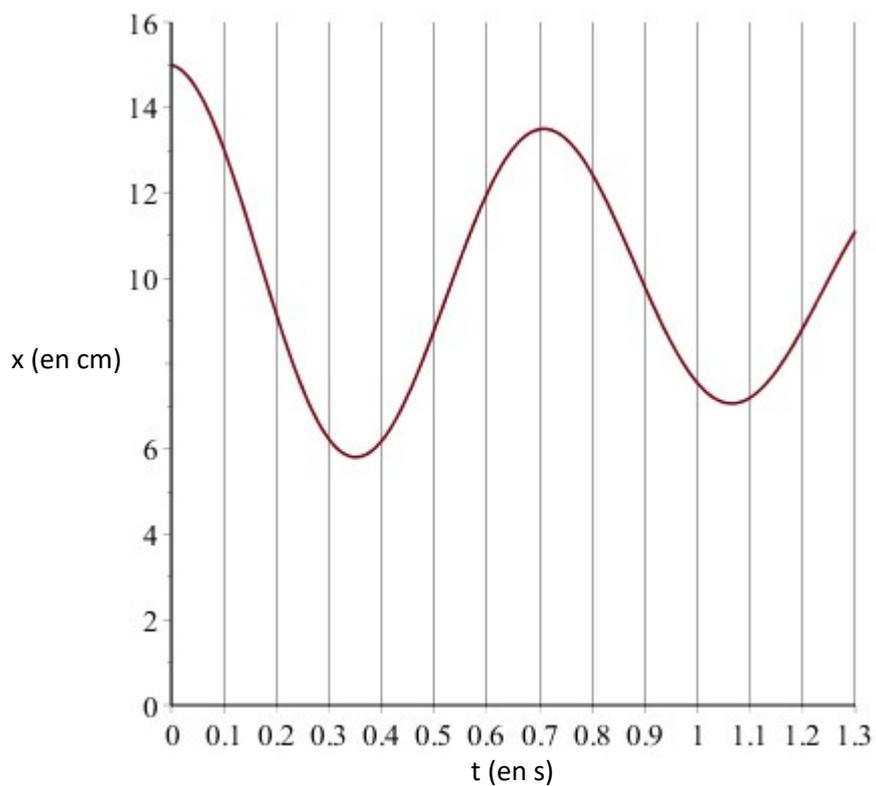
Typiquement, une réaction de radioéthyquetage se fait à partir d'un échantillon de  $3,7 \cdot 10^{10}$  Bq, soit 37 GBq, d'ions  ${}^{64}_{29}\text{Cu}^{2+}$  et 1  $\mu\text{mol}$  de précurseur PPC-DOTA dans un volume de 300  $\mu\text{L}$  d'eau. On précise que le becquerel (symbole Bq) est une unité d'activité pour un échantillon radioactif, un becquerel correspondant à une désintégration par seconde.

Définition de l'activité radioactive en Bq :  $A = -\frac{dN_{\text{Cu}}}{dt}$  où  $N_{\text{Cu}}$  est le nombre de noyaux de cuivre-64 à l'instant considéré.

Le temps de demi-vie  $t_{1/2}$  (ou période radioactive) du cuivre-64 est égal à 12 heures.

- 12- En notant  $\lambda$  la constante cinétique de désintégration du cuivre-64, établir l'équation différentielle de l'évolution temporelle de  $N_{\text{Cu}}$ . Résoudre cette équation pour obtenir la loi horaire ( $N_{\text{Cu}}$  en fonction du temps) pour un échantillon de cuivre-64 contenant initialement  $N_0$  atomes. En déduire le lien entre  $\lambda$  et la durée de demi-vie  $t_{1/2}$  (aussi appelé période radioactive).
- 13- Calculer la quantité de matière apportée d'ions  ${}^{64}\text{Cu}^{2+}$ , correspondant à une radioactivité de 37 GBq.
- 14- Montrer que, dans les conditions expérimentales décrites, la réaction de radioéthyquetage est quasi-totale. La constante globale  $K^\circ$  de la complexation entre PPC-DOTA et l'ion  $\text{Cu}^{2+}$  est définie par la grandeur  $\log K^\circ$ , qui vaut 22,5.

### Annexe (à rendre avec la copie)



Energies  
potentielles  
et  
cinétiques

