3
Topologie produit

I

Norme produit

1. Espace vectoriel produit
On considère des espaces vectoriels $E_1, E_2, \ldots, E_p$ et l'espace vectoriel produit qui leur est associé :

$$E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p.$$

1.1 Pour chaque vecteur x de l'espace produit E, il existe des vecteurs $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \ldots, x_p \in E_p$ tels que

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_p).$$

1.2 Si $x = (x_1, \ldots, x_p)$ et $y = (y_1, \ldots, y_p)$, alors la combinaison linéaire $\lambda \cdot x + y$ est égale par définition à

$$(\lambda \cdot x_1 + y_1,\ \lambda \cdot x_2 + y_2, \ldots,\ \lambda \cdot x_p + y_p)$$

(quel que soit le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$).

2. Importance de la topologie produit
Les espaces $\mathbb{K}^p$ sont définis comme des espaces vectoriels produits et leur topologie sert de modèle pour la topologie des espaces vectoriels normés de dimension finie, qui est le cadre théorique pour étudier la régularité des fonctions de plusieurs variables.
La topologie d'un espace produit permet également de préciser en quel sens l'addition dans un espace vectoriel normé et la multiplication interne dans une algèbre normée, qui sont toutes deux des applications de l'espace produit $E \times E$ dans E, sont des applications continues.

3. Norme produit
3.1 ✍ *Étant donnés des espaces vectoriels normés*

$$(E_1, \|\cdot\|_1), (E_2, \|\cdot\|_2), \ldots, (E_p, \|\cdot\|_p),$$

on a défini [**1.35**] *la* **norme produit** $\|\cdot\|_\infty$ *sur l'espace vectoriel produit*

$$E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$$

en posant

$$\forall\, (x_1, \ldots, x_p) \in E, \quad \big\|(x_1, \ldots, x_p)\big\|_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant p} \|x_k\|_k.$$

3.2 ➙ *La norme produit $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur l'espace produit E.*

Suites à valeurs dans un espace produit

4. ✍ *Pour $1 \leqslant k \leqslant p$, la k-ième* **composante** *d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de l'espace produit E est la suite $(u_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{k,n} = \pi_k(u_n) \in E_k.$$

5. ➙ *Soit $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_p) \in E$.*
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans l'espace produit E converge vers ℓ :

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n - \ell\|_\infty = 0$$

si, et seulement si, les p composantes de la suite u convergent vers les p composantes de ℓ :

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant p, \quad \lim_{n\to+\infty} \|u_{k,n} - \ell_k\|_k = 0.$$

6. Dans un espace produit, on dit qu'*une suite converge composante par composante.*

I.1 Topologie d'un espace produit

7. Parties bornées
7.1 Quel que soit $x = (x_1, \ldots, x_p) \in E$,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant p, \quad \|x_k\|_k \leqslant \|x\|_\infty.$$

7.2 ➙ *Une partie X de l'espace produit E est bornée pour la norme produit $\|\cdot\|_\infty$ si, et seulement si, il existe des parties*

$$X_1 \subset E_1,\ X_2 \subset E_2, \ldots, X_p \subset E_p$$

telles que

$$X \subset X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_p,$$

chaque partie X_k étant bornée pour la norme $\|\cdot\|_k$.

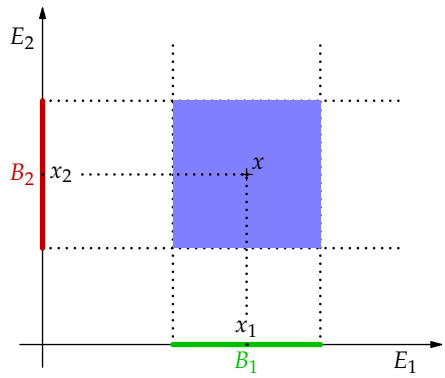
8. Boules
Soient $r > 0$ et $a = (a_1, \ldots, a_p) \in E$.
8.1 La ***boule fermée*** de centre a et de rayon r dans l'espace produit $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est égale à

$$[\|x_1 - a_1\|_1 \leqslant r] \times [\|x_2 - a_2\|_2 \leqslant r] \times \cdots [\|x_p - a_p\|_p \leqslant r].$$

8.2 La ***boule ouverte*** de centre a et de rayon r dans l'espace produit $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est égale à

$$[\|x_1 - a_1\|_1 < r] \times [\|x_2 - a_2\|_2 < r] \times \cdots [\|x_p - a_p\|_p < r].$$

8.3 Pour la topologie produit, une boule est un produit cartésien de boules de même rayon.



9. Projections et injections canoniques
9.1 ✍ *Pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$, la k-***ième projection canonique** *est l'application linéaire $\pi_k : E \to E_k$ définie par*

$$\forall\, x = (x_1, \ldots, x_p) \in E, \quad \pi_k(x) = x_k.$$

On dira que x_k est la k-ième **composante** *du vecteur $x \in E$.*
9.2 Si $E = \mathbb{K}^p$, alors $\pi_k(x)$ est la k-ième coordonnée du vecteur x relative à la base canonique de $\mathbb{K}^p$.
9.3 ✍ *Pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$, la k-***ième injection canonique** *est l'application linéaire $i_k : E_k \to E$ définie par*

$$\forall\, x_k \in E_k, \quad i_k(x_k) = (0_{E_1}, \ldots, x_k, \ldots, 0_{E_p}).$$

9.4 ➙ *Pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$,*

— *la projection canonique π_k est une application lipschitzienne de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(E_k, \|\cdot\|_k)$ telle que $|||\pi_k||| = 1$;*
— *l'injection canonique i_k est une isométrie de $(E_k, \|\cdot\|_k)$ dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.*

Voisinages, ouverts, fermés

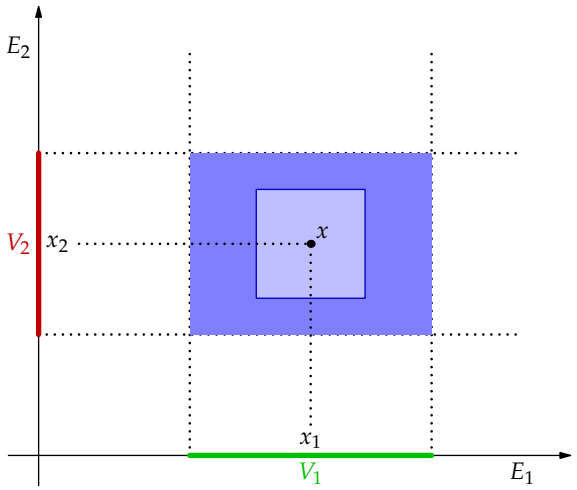
10.1 ✍ *Une partie V de E est un* **voisinage élémentaire** *du point $x = (x_1, \dots, x_p) \in E$ lorsqu'il existe des voisinages*

$$V_1 \in \mathscr{V}_{E_1}(x_1), \quad V_2 \in \mathscr{V}_{E_2}(x_2), \dots, \quad V_p \in \mathscr{V}_{E_p}(x_p)$$

tels que

$$V = V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_p.$$

10.2 Le produit $V_1 \times V_2$ contient une boule de centre x et de rayon strictement positif, c'est donc un voisinage de x.

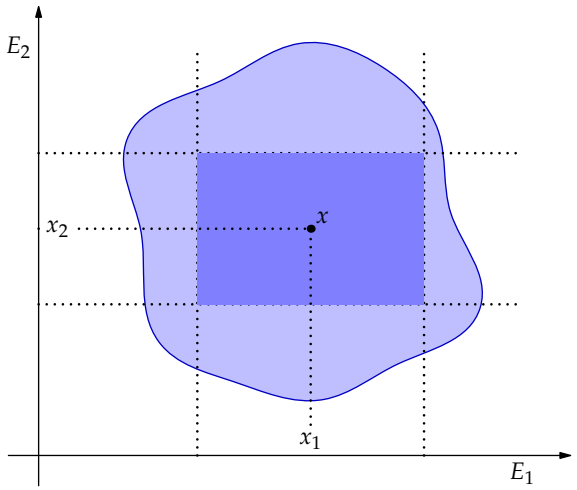


10.3 Pour tout $r > 0$, la boule ouverte et la boule fermée de rayon r et de centre $x \in E$ sont des voisinages élémentaires de E.

11. ➙ *Une partie W de E est un voisinage du point x pour la topologie produit si, et seulement si, elle contient un voisinage élémentaire :*

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant p,\ \exists\, V_k \in \mathscr{V}_{E_k}(\pi_k(x)), \quad V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_p \subset W.$$

12. La partie X est un voisinage de $x = (x_1, x_2)$ pour la topologie produit sans être un voisinage élémentaire.



13. ➙ *Si U_k est un ouvert de $(E_k, \|\cdot\|_k)$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$, alors $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_p$ est un ouvert de l'espace produit $(E, \|\cdot\|_\infty)$.*

14. ➙ *Si F_k est un fermé de $(E_k, \|\cdot\|_k)$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$, alors $F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_p$ est un fermé de l'espace produit $(E, \|\cdot\|_\infty)$.*

Parties compactes

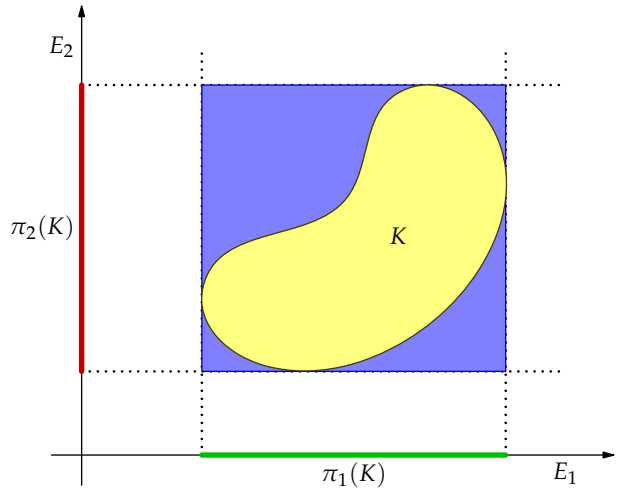
15. ➙ *Pour tout $1 \leqslant j \leqslant p$, on suppose que K_j est une partie compacte de E_j. Alors le produit*

$$K = K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_p$$

est une partie compacte de l'espace produit E.

16. ➙ *Si K est un compact de E, alors il existe des compacts $K_1 \subset E_1$, $K_2 \subset E_2$, …, K_p de E_p tels que*

$$K \subset K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_p.$$



I.2 Continuité

Fonctions à valeurs dans un produit

17. La continuité d'une fonction f à valeurs dans un espace produit est facile à étudier : il suffit d'étudier les composantes de f et on peut pour ainsi dire oublier la topologie dont est muni l'espace d'arrivée.

17.1 ✍ *Soit f, une fonction définie sur un ensemble Ω, à valeurs dans l'espace produit E. Pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$, la k-ième* **composante** *de f est la fonction $f_k : \Omega \to E_k$ définie par*

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad f_k(\omega) = \pi_k(f(\omega)).$$

17.2 ➙ *Une fonction f à valeurs dans l'espace produit $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est continue si, et seulement si, chacune de ses composantes est continue.*

17.3 Une application $f : (F, \|\cdot\|_F) \to (E, \|\cdot\|_\infty)$ est lipschitzienne si, et seulement si, toutes ses composantes

$$f_k : (F, \|\cdot\|_F) \to (E_k, \|\cdot\|_k)$$

sont lipschitziennes.

Fonctions définies sur un espace produit

18. Une ***fonction f de plusieurs variables réelles*** $x_1, x_2, \dots, x_d$ doit être considérée comme une fonction d'*une seule* variable

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$$

qui appartient à l'espace produit $\mathbb{R}^d$.
L'étude de la continuité de f repose donc sur la topologie produit et il faut savoir que l'étude des ***applications partielles***

$$[x_1 \mapsto f(x)], \quad [x_2 \mapsto f(x)], \quad \dots \quad [x_d \mapsto f(x)]$$

n'est d'aucun intérêt à ce sujet.

19. On sait déjà **[9.4]** que les projections canoniques

$$\pi_k : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p \to E_k$$

sont continues. La topologie produit est définie pour cela ! →**[24]**

20. ➙ **Continuité de l'addition**
*Soit $(E, \|\cdot\|)$, un espace vectoriel normé. Si l'espace produit $E \times E$ est muni de la norme produit, alors l'*addition

$$[(x,y) \mapsto x+y]$$

est une application linéaire et lipschitzienne de $E \times E$ dans E.

21. **Continuité de la distance**
Quels que soient x, y, u et v dans E,

$$\big|d(x,y) - d(u,v)\big| \leqslant d(x,u) + d(y,v).$$

L'application *distance* d est lipschitzienne de $E \times E$ (muni de la topologie produit) dans E.

Entraînement

22. **Questions pour réfléchir**

1. La norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $E = \mathbb{R}^3$ est une norme produit. Nature géométrique de la sphère unité. Cette norme sur $\mathbb{R}^3$ est-elle associée à un produit scalaire ?
2. Soit $X = \{1, \dots, p\}$. L'espace $\mathbb{K}^p$ muni de la norme produit est canoniquement isométrique à l'espace $\mathscr{B}(X, \mathbb{K})$ muni de la norme de la convergence uniforme sur X.
3. *Suite de* [**9**] – Étudier les applications $i_k \circ \pi_k$ et $\pi_k \circ i_k$.
4. Si $f : E \to F$ est une application continue, alors son graphe est une partie fermée de l'espace produit $E \times F$.
5. Si les applications $f_k : (E_k, N_k) \to (F, \|\cdot\|)$ sont lipschitziennes pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$, alors l'application $f : E \to F^p$ définie par

$$\forall\, x = (x_1, \dots, x_p) \in E, \quad f(x) = \big(f_1(x_1), \dots, f_p(x_p)\big)$$

est lipschitzienne de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans (F^p, N_∞) (où N_∞ désigne la norme produit sur l'espace F^p).

6.a Généraliser [**17**.2] au cas d'une fonction $f : X \to E$ admettant une limite $\ell \in E$ au voisinage d'un point $x_0 \notin X$ (par exemple $X =]0, +\infty[$ et $x_0 = 0$ ou $x_0 = +\infty$).

6.b On suppose que la fonction $f : X \to \mathbb{R}^3$ tend vers l'infini au voisinage d'un point $x_0 \in X$. Que dire des composantes de f au voisinage de x_0 ?

23. Pour tout $1 \leqslant k \leqslant d$, on suppose que N_k et $\|\cdot\|_k$ sont des normes équivalentes sur E_k. Alors les normes définies sur l'espace produit $E = E_1 \times \cdots \times E_p$ par

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant d} \|x_k\|_k \quad \text{et} \quad N_\infty(x) = \max_{1 \leqslant k \leqslant d} N_k(x_k)$$

sont équivalentes.

24. Soit N, une norme sur l'espace produit E telle que, pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$, la projection canonique π_k soit continue de (E, N) dans (E_k, N_k).

24.1 La norme produit $\|\cdot\|_\infty$ est dominée par N.

24.2 Tout ouvert pour la norme produit est aussi un ouvert pour la norme N [**2.125.4**] : la topologie définie par la norme $\|\cdot\|_\infty$ est la *moins fine* parmi les topologies pour lesquelles les projections canoniques sont continues.

25. **Distance et compacité**
Soit K, un compact non vide de E.

1. Pour tout $x \in E$,

$$d(x, K) = \min_{y \in K} d(x,y).$$

2. Si K' est un compact disjoint de K, alors [**1.90**]

$$d(K, K') > 0.$$

3. L'axe des abscisses et le graphe de exp sont des fermés disjoints de $\mathbb{R}^2$, mais la distance qui les sépare est nulle.

26. Soient A, un compact et B, un fermé de E.

1. La partie

$$A + B = \big\{x + y,\ (x,y) \in A \times B\big\}$$

est un fermé de E.

2. Si B est compact, alors $A + B$ est compact.

27. Si K est un compact de E qui ne contient pas le vecteur nul, alors le cône positif

$$F = \big\{\lambda x,\ (\lambda, x) \in \mathbb{R}_+ \times K\big\}$$

est un fermé de E.
La partie $K = [(x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leqslant 1]$ est bien compacte mais la partie $F = [x_1 > 0] \cup \{(0,0)\}$ n'est pas fermée.

II

Applications multilinéaires

28. Si E est une algèbre associative unitaire, la multiplication interne sur E est une application bilinéaire de $E \times E$ dans E et, quel que soit $r \geqslant 2$, l'application

$$[(x_1, \dots, x_r) \mapsto x_1 * \cdots * x_r]$$

est une application r-linéaire sur E^r.

29. Inversement, on pourra comprendre toute application bilinéaire comme une sorte de multiplication et toute application multilinéaire comme une sorte de multiplication itérée.

30. On considère trois espaces vectoriels normés

$$(F, \|\cdot\|_F), \quad (G, \|\cdot\|_G) \quad \text{et} \quad (H, \|\cdot\|_H)$$

et une application bilinéaire $\varphi : F \times G \to H$.
L'espace vectoriel $E = F \times G$ muni de la norme produit :

$$\forall\, u = (x,y) \in E, \quad \|u\|_\infty = \max\big\{\|x\|_F,\ \|y\|_G\big\}.$$

30.1 S'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall\, (x,y) \in F \times G, \quad \big\|\varphi(x,y)\big\|_H \leqslant C\|x\|_F\, \|y\|_G,$$

alors

$$\big\|\varphi(u+h) - \varphi(u)\big\|_H \leqslant 2C\big(\|u\|_\infty + \|h\|_\infty\big)\|h\|_\infty$$

pour tout $(u,h) \in E \times E$. .

30.2 Si φ est bornée au voisinage de $0_E = (0_F, 0_G)$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall\, (x,y) \in F \times G, \quad \big\|\varphi(x,y)\big\|_H \leqslant C\|x\|_F\, \|y\|_G.$$

30.3 ➙ **Continuité des applications bilinéaires**
Soient $(F, \|\cdot\|_F)$, $(G, \|\cdot\|_G)$ et $(H, \|\cdot\|_H)$, trois espaces vectoriels normés et N^∞, la norme produit sur $F \times G$. Une application bilinéaire φ est continue de $(F \times G, N^\infty)$ dans $(H, \|\cdot\|_H)$ si, et seulement si,

$$\exists\, C \geqslant 0,\ \forall\, (x,y) \in F \times G, \quad \big\|\varphi(x,y)\big\|_H \leqslant C\|x\|_F\, \|y\|_G.$$

31. **Exemples fondamentaux**

31.1 Sur tout espace préhilbertien, comme par exemple $\mathbb{R}^p$, le ***produit scalaire*** est une forme bilinéaire continue pour la norme associée à ce produit scalaire.

31.2 Si $\mathbb{R}^3$ est muni de la norme euclidienne canonique, le ***produit vectoriel*** est une application bilinéaire continue.

31.3 Quel que soit l'espace vectoriel normé $(V, \|\cdot\|)$, la ***multiplication externe***

$$[(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x]$$

est une application bilinéaire continue de $\mathbb{K} \times V$ dans V.

31.4 Soit V, une algèbre associative unitaire. Si la norme $\|\cdot\|$ est sous-multiplicative :

$$\forall\,(x,y)\in V,\quad \|xy\|\leqslant\|x\|\,\|y\|,$$

alors la ***multiplication interne***

$$[(x,y)\mapsto xy]$$

est une application bilinéaire continue de $V\times V$ dans V.
31.5 Soit $(E,\|\cdot\|_E)$, un espace vectoriel normé. Si l'espace $\mathrm{L}_c(E)$ est muni de la norme $|||\cdot|||$ subordonnée à $\|\cdot\|_E$, alors [**1.100.1**] l'application

$$[(f,x)\mapsto f(x)]$$

est une application bilinéaire continue de $\mathrm{L}_c(E)\times E$ dans E et la composition

$$[(f,g)\mapsto f\circ g]$$

est bilinéaire et continue de $\mathrm{L}_c(E)\times\mathrm{L}_c(E)$ dans $\mathrm{L}_c(E)$ [**1.101**].

Caractérisation des applications multilinéaires continues

32. On considère des espaces vectoriels normés $(E_1,\|\cdot\|_1),\ldots,(E_p,\|\cdot\|_p)$. L'espace produit

$$E=E_1\times\cdots\times E_p$$

est muni de la norme produit $\|\cdot\|_\infty$ [**1.35**].
32.1 Soit $\varphi\,:\,E\to F$, une application p-linéaire. S'il existe une constante $C>0$ telle que

$$\forall\,x=(x_1,\ldots,x_p)\in E,\quad \big\|\varphi(x)\big\|_F\leqslant C\prod_{k=1}^{p}\|x_k\|_k,$$

alors

$$\big\|\varphi(u+h)-\varphi(u)\big\|_F\leqslant Cp\big(\|u\|_\infty+\|h\|_\infty\big)^{p-1}\|h\|_\infty$$

quels que soient les vecteurs u et h dans E.
32.2 ➙ *Une application p-linéaire*

$$\varphi\,:\,(E,\|\cdot\|_\infty)\to(F,\|\cdot\|_F)$$

est continue si, et seulement si,

$$\exists\,C\geqslant 0,\ \forall\,x=(x_1,\ldots,x_p)\in E,\quad \big\|\varphi(x)\big\|_F\leqslant C\prod_{k=1}^{p}\|x_k\|_k.$$

33. Exemples
L'espace $\mathbb{R}^p$ est muni de la norme euclidienne canonique.
On rappelle que la notation Det désigne le déterminant relatif à une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^p$ (qui ne dépend pas de la base choisie).
33.1 Le ***produit mixte*** :

$$\forall\,u,v,w\in\mathbb{R}^3,\quad [u,v,w]=\langle\,u\wedge v\,|\,w\,\rangle=\mathrm{Det}(u,v,w)$$

est une forme trilinéaire continue.
33.2 Plus généralement, on peut établir l'*inégalité d'Hadamard* : quels que soient les vecteurs $u_1,\ldots,u_p$ dans $\mathbb{R}^p$,

$$\big|\,\mathrm{Det}(u_1,\ldots,u_p)\big|\leqslant\prod_{k=1}^{p}\|u_k\|.$$

Opérations sur les fonctions continues

34. Comme on le sait sans doute, les très utiles théorèmes [**35**] et [**36**] peuvent se déduire de la définition de la continuité.
Il est intéressant de les déduire du théorème de composition des limites [**2.59**] grâce aux résultats précédents [**30.3**], [**32.2**].

35. ➙ *L'ensemble $\mathscr{C}^0(F,G)$ est un espace vectoriel.*

36. ➙ *Soient $f\in\mathscr{C}^0(F,G_1)$ et $g\in\mathscr{C}^0(F,G_2)$. Si φ est une application bilinéaire et continue de $G_1\times G_2$ dans H, alors l'application*

$$\big[x\mapsto\varphi\big(f(x),g(x)\big)\big]$$

est continue de F dans H.

37. Continuité des fonctions polynomiales
Soit $(V,\|\cdot\|)$, une algèbre associative unitaire munie d'une norme sous-multiplicative [**1.33**].
37.1 ✍ *Une application $f\,:\,V\to V$ est une* **application polynomiale** *lorsqu'il existe une famille presque nulle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de V telle que*

$$\forall\,x\in V,\quad f(x)=\sum_{m\in\mathbb{N}}a_m\cdot x^m.$$

37.2 ➙ *Toute application polynomiale de V dans V est continue.*

Entraînement

38. Questions pour réfléchir
1. Une application bilinéaire et continue de $F\times G$ dans H est-elle lipschitzienne ?
2. Soit $\varphi\,:\,E\to F$, un morphisme d'algèbres, qu'on suppose continu (en tant qu'application linéaire de E dans F). L'application

$$[(u,v)\mapsto\varphi(u\star v)]$$

est continue de $E\times E$ dans F.
3. Si f et g sont deux applications continues d'un intervalle $I\subset\mathbb{R}$ dans une algèbre normée $(F,\|\cdot\|_F)$, alors leur produit

$$[t\mapsto f(t)g(t)]$$

est une application continue de I dans F.
4. Soit I, un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $\lambda\in\mathscr{C}^0(I,\mathbb{K})$ et si f et g sont deux applications continues de I dans $(F,\|\cdot\|_F)$, alors

$$[t\mapsto\lambda(t)\cdot f(t)+g(t)]$$

est une application continue de I dans F.

39. Soient $(E,\|\cdot\|)$, (F,N_1), (G,N_2) et $(V,\|\cdot\|_V)$, quatre espaces vectoriels normés. On suppose que les applications

$$f\,:\,E\to F\quad\text{et}\quad g\,:\,E\to G$$

sont lipschitziennes et bornées.
Pour toute application bilinéaire et continue φ de l'espace produit $(F\times G,\|\cdot\|_\infty)$ dans V, l'application définie par

$$\forall\,x\in E,\qquad h(x)=\varphi\big(f(x),g(x)\big)$$

est lipschitzienne.
40. Soient $(E,\|\cdot\|_E)$, un espace vectoriel normé (de dimension quelconque) et $(v_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$, une famille de vecteurs de E.
Toute application polynomiale

$$\left[x\mapsto\sum_{k=0}^{n}x^k\cdot v_k\right]$$

de $\mathbb{K}$ dans E est continue.

III

Relations de comparaison

III.1 Suites

41. On considère un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ et on souhaite déterminer avec plus ou moins de précision l'ordre de grandeur d'une suite de vecteurs.
Les suites de référence sont, en général, des suites réelles dont le terme général est strictement positif.

42. Domination

42.1 ✍ *La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E est* **dominée** *par la suite réelle $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque la suite réelle $\big(\|a_n\|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

$$a_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(\alpha_n) \iff \|a_n\| \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(\alpha_n)$$

42.2 La suite de vecteurs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si, et seulement si, la suite de vecteurs $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \alpha_n \cdot b_n$$

est bornée.

43. Négligeabilité

43.1 ✍ *La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E est* **négligeable** *devant la suite réelle $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque la suite réelle $\big(\|a_n\|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

$$a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\alpha_n) \iff \|a_n\| \underset{n\to+\infty}{=} o(\alpha_n)$$

43.2 La suite de vecteurs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant la suite réelle $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si, et seulement si, la suite de vecteurs $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \alpha_n \cdot b_n$$

tend vers 0_E.

44. Équivalence

44.1 Si $\|a_n - b_n\| = o(\|b_n\|)$, alors $\|a_n - b_n\| = o(\|a_n\|)$.

44.2 ✍ *Deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs sont* **équivalentes** *:*

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$$

lorsque

$$\|a_n - b_n\| \underset{n\to+\infty}{=} o(\|b_n\|).$$

44.3 Si $a_n \sim b_n$, alors $\|a_n\| \sim \|b_n\|$ et si la norme est associée à un produit scalaire, alors l'angle formé par les vecteurs a_n et b_n tend vers 0.

44.4 S'il existe une suite de scalaires $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 1 telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \lambda_n \cdot b_n,$$

alors $a_n \sim b_n$.

III.2 Fonctions

45. Pour étudier l'ordre de grandeur d'une fonction f définie au voisinage de x_0, qui peut être aussi bien un vecteur de E qu'un point à l'infini [**2.103.2**], on compare la norme $\|f(x)\|$ à une fonction de référence (qui est en général strictement positive).

45.1 ✍ *L'expression $f(x)$ est* **dominée** *par $g(x)$ au voisinage de x_0 lorsque $\|f(x)\| = \mathcal{O}\big(\|g(x)\|\big)$ au voisinage de x_0.*
On note alors

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} \mathcal{O}\big(g(x)\big).$$

45.2 ✍ *L'expression $f(x)$ est* **négligeable** *devant $g(x)$ au voisinage de x_0 lorsque $\|f(x)\| = o\big(\|g(x)\|\big)$ au voisinage de x_0.*
On note alors

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g(x)\big).$$

46. Pour établir $f = \mathcal{O}(g)$ ou $f = o(g)$, rien n'oblige à considérer des fonctions f et g qui prennent leurs valeurs dans le même espace vectoriel. Il en va autrement pour déterminer un équivalent de f.

46.1 Pour x voisin de x_0,

$$f(x) - g(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(f(x)\big) \iff f(x) - g(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g(x)\big).$$

46.2 ✍ *Soient f et g, définies sur un même voisinage de x_0, à valeurs dans le même espace vectoriel normé F. Au voisinage de x_0, les fonctions f et g sont* **équivalentes** *lorsque*

$$f(x) - g(x) = o\big(g(x)\big)$$

On note alors

$$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x).$$

47. Exemples au voisinage de l'origine

On suppose que le vecteur $\boldsymbol{h}$ est voisin de $\mathbf{0}_E$.

47.1 Si $f_k(\boldsymbol{h}) = o(\boldsymbol{h})$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$ et si g est une combinaison linéaire de $f_1, \ldots, f_p$, alors $g(\boldsymbol{h}) = o(\boldsymbol{h})$.

47.2 Si φ est une application linéaire continue, alors

$$\varphi(\boldsymbol{h}) = \mathcal{O}(\boldsymbol{h}).$$

47.3 Compositions

On suppose que $u(\boldsymbol{h}) = o(\boldsymbol{h})$.

1. Pour tout $\boldsymbol{v} \in E$, on a $u(t \cdot \boldsymbol{v}) = o(t)$ pour t voisin de 0.
2. Si $v(\boldsymbol{h}) = o\big(u(\boldsymbol{h})\big)$, alors $v(\boldsymbol{h}) = o(\boldsymbol{h})$.
3. Si φ est une application linéaire continue, alors

$$\varphi\big(u(\boldsymbol{h})\big) = o(\boldsymbol{h}).$$

48. Exemples au voisinage de l'infini

On suppose ici que $\|\boldsymbol{h}\|$ tend vers $+\infty$.

48.1 Si $f_k(\boldsymbol{h}) = o(\boldsymbol{h})$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$ et si g est une combinaison linéaire de $f_1, \ldots, f_p$, alors $g(\boldsymbol{h}) = o(\boldsymbol{h})$.

48.2 Si φ est une application linéaire continue, alors

$$\varphi(\boldsymbol{h}) = \mathcal{O}(\boldsymbol{h}).$$

48.3 Si $u(\boldsymbol{h}) = \mathcal{O}(\boldsymbol{h})$ et si $v(\boldsymbol{h}) = o\big(u(\boldsymbol{h})\big)$, alors $v(\boldsymbol{h}) = o(\boldsymbol{h})$.

49. Applications bilinéaires [30.3]

Soit φ, une application bilinéaire continue de $E_1 \times E_2$ dans F.

1. Au voisinage de l'origine, $\varphi(\boldsymbol{h}) = o(\boldsymbol{h})$.
2. Au voisinage de l'infini, $\varphi(\boldsymbol{h}) = \mathcal{O}\big(\|\boldsymbol{h}\|^2\big)$.
3. Au voisinage de l'origine ou au voisinage de l'infini, si $f(h) = \mathcal{O}(\|\boldsymbol{h}\|^\alpha)$ et si $g(h) = o(\|\boldsymbol{h}\|^\beta)$, alors

$$\varphi\big(f(\boldsymbol{h}), g(\boldsymbol{h})\big) = o(\|\boldsymbol{h}\|^{\alpha+\beta}).$$

Entraînement

50. Questions pour réfléchir

1. Si $\|a_n\| \sim \|b_n\|$, les suites de vecteurs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles équivalentes ?
2. On suppose que $b_n \neq 0_E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et qu'il existe une suite de scalaires $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 1 et une suite de vecteurs $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \lambda_n \cdot b_n + c_n \quad \text{et} \quad c_n \underset{n\to+\infty}{=} o(b_n).$$

Alors $a_n \sim b_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. On suppose que la norme sur E est associée à un produit scalaire et que $a_n \sim b_n$. Alors il existe une suite de scalaires $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 1 et une suite de vecteurs $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \lambda_n \cdot b_n + c_n \quad \text{et} \quad c_n \underset{n\to+\infty}{=} o(b_n).$$

4. On suppose que, pour la norme N_1, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par (resp. négligeable devant ; resp. équivalente à) la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Si la norme N_2 est équivalente à la norme N_1, alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi dominée par (resp. négligeable devant ; resp. équivalente à) la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Soit ρ, une application définie sur un voisinage de 0_E, à valeurs dans F. On suppose que le quotient $\|\rho(h)\|_F/\|h\|_E$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}_+$ lorsque $\|h\|_E$ tend vers 0. Comparer $\rho(h)$ et h.

51. Si $\boldsymbol{h} = (x, y)$ est voisin de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$, alors

$$x^2 y = o(\|\boldsymbol{h}\|^2) \quad \text{et} \quad x^3 = o(\|\boldsymbol{h}\|^2)$$

(quelle que soit la norme considérée sur $\mathbb{R}^2$).

52. L'expression

$$\frac{xy}{x^4 + y^4}$$

n'est pas bornée, mais ne tend pas vers l'infini au voisinage de l'origine.

53. On considère l'application f définie par $f(0,0) = 0$ et par

$$\forall\, (x,y) \neq (0,0), \quad f(x,y) = \frac{xy}{|x| + |y|}.$$

Alors $f(\boldsymbol{h}) = \mathcal{O}(\boldsymbol{h})$ mais $f(\boldsymbol{h}) \neq o(\boldsymbol{h})$ au voisinage de $(0,0)$.

54. Une fonction non différentiable
On étudie au voisinage de $(0,0)$ la fonction f définie par

$$\forall\, (x,y) \neq (0,0), \quad f(x,y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}.$$

1. Pour $\boldsymbol{h}$ voisin de l'origine, $f(\boldsymbol{h}) = \mathcal{O}(\boldsymbol{h})$.
2. Si φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ telle que $f(\boldsymbol{h}) \sim \varphi(\boldsymbol{h})$ au voisinage de $(0,0)$, alors

$$\forall\, \boldsymbol{h} = (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(\boldsymbol{h}) = x - y.$$

La différence $f(\boldsymbol{h}) - \varphi(\boldsymbol{h})$ est dominée par $\boldsymbol{h}$, mais pas négligeable devant $\boldsymbol{h}$.

IV

Espaces vectoriels de dimension finie

55. La topologie produit de $\mathbb{K}^p$ va nous servir de référence pour étudier la topologie de tout espace vectoriel normé de dimension finie.

IV.1 Topologie produit de $\mathbb{K}^p$

56. L'espace $\mathbb{K}^p$ est muni de sa topologie produit lorsque $\mathbb{K}^p$ est considéré comme l'espace produit défini par

$$(E_1, \|\cdot\|_1) = (E_2, \|\cdot\|_2) = \cdots = (E_p, \|\cdot\|_p) = (\mathbb{K}, |\cdot|),$$

la norme produit étant alors définie par

$$\forall\, x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p, \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leqslant k\leqslant p} |x_k|.$$

56.1 Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{K}^p$ converge pour la norme produit $\|\cdot\|_\infty$ si, et seulement si, pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$, la suite des coordonnées $(x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{K}$. **[5]**
56.2 ➙ *Si $\mathbb{K}^p$ est muni de la norme produit, toute partie fermée et bornée de $\mathbb{K}^p$ est compacte.*

57. Soit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$, la base canonique de $\mathbb{K}^p$. Toute norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{K}^p$ est dominée par la norme produit $\|\cdot\|_\infty$:

$$\forall\, x \in \mathbb{K}^p, \quad \|x\| \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{p} \|\varepsilon_k\|\Big) \|x\|_\infty.$$

57.1 Toute norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{K}^p$ est une application lipschitzienne de $(\mathbb{K}^p, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
57.2 La sphère unité de $(\mathbb{K}^p, \|\cdot\|_\infty)$ est compacte.
57.3 ➙ *Toutes les normes sur $\mathbb{K}^p$ sont équivalentes.*

Continuité

58. Notons $(\varepsilon_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$, la base canonique de $\mathbb{K}^p$.
58.1 Les ***formes linéaires coordonnées*** associées à la base canonique sont les applications ε_k^*, $1 \leqslant k \leqslant p$, définies par

$$\forall\, x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p, \quad \varepsilon_k^*(x) = x_k$$

si bien que

$$\forall\, x \in \mathbb{K}^p, \quad x = \sum_{k=1}^{p} \varepsilon_k^*(x) \cdot \varepsilon_k.$$

58.2 Si $\mathbb{K}^p$ est muni de sa norme produit, les formes linéaires coordonnées ε_k^*, $1 \leqslant k \leqslant p$, sont continues [**1.95.3**].
59. ➙ *Si $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ sont munis de leurs normes produits respectives, les applications linéaires de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ sont continues.*

IV.2 Théorèmes fondamentaux

60. Soient E, un espace vectoriel de dimension d sur $\mathbb{K}$, muni d'une norme N. On considère une base

$$\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_d)$$

de E et les formes coordonnées $(e_k^*)_{1\leqslant k\leqslant d}$ associées à cette base, définies par

$$\forall\, x \in E, \quad x = \sum_{k=1}^{d} e_k^*(x) \cdot e_k.$$

60.1 L'application φ définie par

$$\forall\, (x_k)_{1\leqslant k\leqslant d} \in \mathbb{K}^d, \quad \varphi\big((x_1, \ldots, x_d)\big) = \sum_{k=1}^{d} x_k \cdot e_k$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}^d$ sur E.
60.2 Il existe une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{K}^d$ telle que l'isomorphisme φ soit une isométrie de $(\mathbb{K}^d, \|\cdot\|)$ sur (E, N) :

$$\forall\, x \in \mathbb{K}^d, \qquad N\big(\varphi(x)\big) = \|x\|.$$

61. ➙ **Équivalence des normes**
Si E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$, toutes les normes sur E sont équivalentes.

62. La topologie d'un espace vectoriel normé de dimension finie est donc indépendante de la norme choisie et il est inutile de préciser pour quelle norme particulière une suite est convergente ; une fonction est continue ; une partie est bornée, ouverte, fermée, compacte...

63. Dans certaines circonstances, la norme considérée doit être précisée. C'est par exemple le cas lorsqu'on veut calculer la norme subordonnée d'une application linéaire.

64. ➙ **Caractérisation des parties compactes**
Soit E, un espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N. Une partie K de E est compacte si, et seulement si, elle est fermée et bornée (pour la norme N).

65. ➙ *Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les boules fermées et les sphères sont des parties compactes.*

66. ➙ **Théorème de Bolzano-Weierstrass**
De toute suite bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie (E, N), on peut extraire une suite convergente dans E pour N.

67. Sous-espaces de E
Soit F, un sous-espace de dimension finie de E.
67.1 De toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de F qui converge vers $\ell \in E$, on peut extraire une sous-suite $(u_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un élément de F.
67.2 ➙ *Soit (E, N), un espace vectoriel normé. Tout sous-espace de dimension finie de E est une partie fermée.*

68. * *Tout sous-espace vectoriel strict de E est une partie d'intérieur vide.*

69. Continuité des formes linéaires
Il existe une norme $N_{\mathscr{B}}$ sur E pour laquelle toutes les formes linéaires sur E sont continues. [**1.36**], [**1.95.3**]
Toutes les formes linéaires sur E sont donc continues pour la norme N.

70. ➙ *Toute fonction polynomiale des coordonnées :*

$$x \mapsto \sum_{m \in \mathbb{N}^d} \left[e_1^*(x)\right]^{m_1} \left[e_2^*(x)\right]^{m_2} \cdots \left[e_d^*(x)\right]^{m_d} u_m$$

est continue sur E.

71. ➙ *Toute fonction rationnelle des coordonnées est continue sur son ensemble de définition.*

72. ➙ **Continuité des applications linéaires**
Si E est un espace vectoriel de dimension finie, toute application linéaire f de E dans F est continue, quelles que soient les normes choisies sur E et F, quelle que soit la dimension de F.
De plus, il existe un vecteur unitaire $x_0 \in E$ tel que

$$|||f||| = \left\|f(x_0)\right\|_F.$$

73. Continuité des applications multilinéaires
Soit φ, une application bilinéaire de $E_1 \times E_2$ dans F.
73.1 Pour tout $x_1 \in E_1$, l'application

$$\Phi_g(x_1) = [x_2 \mapsto \varphi(x_1, x_2)]$$

est une application linéaire de E_2 dans F.
73.2 L'application

$$\Phi_g = \left[x_1 \mapsto \Phi_g(x_1)\right]$$

est une application linéaire de E_1 dans $\mathrm{L}(E_2, F)$.
73.3 ➙ *Si E_1 et E_2 sont deux espaces vectoriels de dimension finie, toute application bilinéaire de $E_1 \times E_2$ dans F est continue, quelles que soient les normes considérées sur E_1, E_2 et F.*
73.4 Plus généralement, si $E_1, \ldots, E_p$ sont des espaces vectoriels de dimensions finies, toute application p-linéaire de $E_1 \times E_p$ dans un espace vectoriel F quelconque sont continues, quelles que soient les normes considérées sur $E_1, \ldots, E_p$ et F.

Calculs de limites à l'aide des coordonnées

74. Avec [**69**], on peut étudier la convergence d'une suite (ou d'une série) et la limite d'une fonction à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie en raisonnant "coordonnée par coordonnée" (quelle que soit la base $\mathscr{B}$ choisie).
Pour cela, on reprend les notations de [**60**].

75. ➙ *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E converge vers $\ell \in E$ si, et seulement si, chaque composante*

$$\left(e_k^*(u_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

converge vers $e_k^*(\ell) \in \mathbb{K}$.

76. ➙ *Une série $\sum u_n$ de vecteurs de E converge si, et seulement si, pour tout indice $1 \leqslant k \leqslant d$, la composante*

$$\sum e_k^*(u_n)$$

converge. Dans ce cas, →[**1.96**]

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{k=1}^{d} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e_k^*(u_n) \right) \cdot e_k.$$

77. ➙ *Une fonction f à valeurs dans E est continue en un point a si, et seulement si, pour tout indice $1 \leqslant k \leqslant d$, la composante*

$$e_k^* \circ f$$

(à valeurs dans $\mathbb{K}$) est continue au point a.

78. ➙ *Une fonction f à valeurs dans E tend vers $\ell \in E$ au voisinage de a si, et seulement si, pour tout indice $1 \leqslant k \leqslant d$, la composante*

$$e_k^* \circ f$$

tend vers $e_k^*(\ell) \in \mathbb{K}$.

Séries absolument convergentes

79. ✍ *Une série $\sum u_n$ est* **absolument convergente** *lorsque la série de terme général positif $\sum \|u_n\|$ est convergente.*

80. ➙ *Une combinaison linéaire de séries absolument convergentes est absolument convergente.*

81. ➙ **Théorème fondamental**
Soit $\sum u_n$, une série absolument convergente dont le terme général u_n appartient à un espace vectoriel E de dimension finie. Alors la série $\sum u_n$ est convergente.

82. Le Théorème précédent vaut pour *toutes* les normes définies sur l'espace vectoriel E.
Il vaut dans certains espaces de dimension infinie, mais pas tous, et pas pour toutes les normes.

IV.3 Utilisation des coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$

83. Toutes les normes sur $\mathbb{R}^2$ sont équivalentes [**57.3**] : la norme euclidienne canonique est aussi bonne qu'une autre et a l'avantage d'apparaître naturellement quand on utilise les coordonnées polaires.
83.1 Théorème de relèvement
Quel que soit $\boldsymbol{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, il existe deux réels $r \geqslant 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que

$$x = r\cos\theta \qquad \text{et} \qquad y = r\sin\theta.$$

De plus, $r = \|\boldsymbol{u}\|$ (norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^2$).
83.2 ➙ *Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tend vers ℓ au voisinage de (x_0, y_0) si, et seulement si, il existe $\alpha > 0$ et une fonction $\varphi :]0, \alpha[\to \mathbb{R}$ de limite nulle en 0 telle que*

$$\forall\ (r, \theta) \in]0, \alpha[\times \mathbb{R}, \quad \left|f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) - \ell\right| \leqslant \varphi(r).$$

83.3 Les expressions suivantes :

$$\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, \qquad \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, \qquad \frac{2x^3+3y^3}{2x^2+y^2}, \qquad \frac{xy^3}{\sqrt{x^4+y^4}}$$

tendent vers 0 au voisinage de $(0, 0)$.
83.4 Les expressions suivantes :

$$\frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}, \qquad \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \qquad \frac{xy}{x^2+y^2}$$

n'ont pas de limite au voisinage de $(0, 0)$.

84. Le théorème de composition des limites [**2.55**] peut être utilisé négativement pour démontrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point donné.

1. Quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$, les applications

$$[x \mapsto (x, \alpha x)], \quad [x \mapsto (x, x^2)], \quad [x \mapsto (x, x + \alpha x^2)]$$

sont continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ [**17.2**].

2. On considère l'application g définie par $g(0, 0) = 0$ et par

$$\forall\ (x, y) \neq (0, 0), \quad g(x, y) = \frac{x^5}{(y - x^2)^2 + x^6}.$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $[x \mapsto g(x, \alpha x)]$ est continue mais la fonction $\left[x \mapsto g(x, x^2)\right]$ n'est pas continue en $x = 0$, donc la fonction g n'est pas continue en $(0, 0)$.

3. Les expressions

$$\frac{y}{x^2 + (y - x^2)^2}, \qquad \frac{x^2y}{x^4+y^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{xy}{x-y}$$

n'ont pas de limite au voisinage de $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$.

IV.4 Espaces de matrices

85. Matrices et limites
Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note

$$A = \big(A[i,j]\big)_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}.$$

85.1 ➙ Suites de matrices
Quelle que soit la norme choisie sur $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, une suite de matrices $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice L si, et seulement si, il y a convergence coordonnée par coordonnée :

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n,\ \forall\, 1 \leqslant j \leqslant p, \quad L[i,j] = \lim_{k\to+\infty} A_k[i,j].$$

85.2 ➙ Fonctions à valeurs matricielles
Quelle que soit la norme choisie sur $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, une fonction

$$f \,:\, X \to \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

définie par

$$\forall\, x \in X, \quad f(x) = \big(f_{i,j}(x)\big)_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$$

est continue en $a \in X$ si, et seulement si, la composante

$$f_{i,j} \,:\, X \to \mathbb{K}$$

est continue en $a \in X$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et tout $1 \leqslant j \leqslant p$.

86. Le sous-espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures est fermé dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

87. ➙ *Soient $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$, une suite de matrices de $\mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$ et $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$, une suite de matrices colonnes dans $\mathfrak{M}_{d,1}(\mathbb{K})$.*
Si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers A et si $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers X, alors la suite de matrices colonnes $(A_kX_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers AX.

Applications continues usuelles

88. ➙ *La trace est continue de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.*

89. Déterminant
89.1 ➙ *L'application* det *est continue de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.*
89.2 ➙ *Le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.*
89.3 Le groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) = [\det M = 1]$ est un fermé de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ qui n'est pas compact si $n \geqslant 2$.

90. Transposition
90.1 ➙ *La transposition est continue de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.*
90.2 ➙ *Les sous-espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques sont des fermés de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.*
90.3 L'ensemble $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qui n'est pas un compact.
90.4 L'ensemble $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert relatif à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ qui est dense dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, mais ce n'est pas un ouvert de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et pas non plus un fermé.
90.5 ➙ *Le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ et le sous-groupe $SO_n(\mathbb{R})$ des rotations sont des parties compactes de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.*

91. ➙ Formules de Cramer
L'application

$$\left[A \mapsto A^{-1}\right]$$

de l'ouvert $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \subset \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est continue.

Exemples de parties denses

92. Densité des matrices inversibles
92.1 Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une suite de scalaires $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad A - \lambda_k I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}).$$

92.2 * *Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.*

93. Densité des matrices diagonalisables
93.1 Soit N, une norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Pour toute matrice triangulaire $T_0 \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une matrice diagonalisable T telle que $N(T - T_0) \leqslant \varepsilon$.
93.2 Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. L'application $\left[M \mapsto PMP^{-1}\right]$ est continue de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
93.3 * *L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.*

IV.5 Algèbres de dimension finie

94. On considère une algèbre E de dimension finie, munie d'une ***norme d'algèbre*** $\|\cdot\|$, c'est-à-dire d'une norme sous-multiplicative telle que $\|1_E\| = 1$.

95. ➙ Série géométrique
Convergence absolue de la série géométrique

Série exponentielle

96. ➙ *Convergence absolue de la série exponentielle*

97. ✍ **exponentielle**

98. On démontrera [chapitre Sommes.tex] que : si u et v commutent, alors $\exp(u+v) = \exp(u)\exp(v) = \exp(v)\exp(u)$.

99. Exponentielle et morphismes d'algèbre [94]
99.1 ➙ *Soit φ, un endomorphisme d'algèbre de E. Alors*

$$\exp\big(\varphi(u)\big) = \varphi\big(\exp(u)\big)$$

pour tout $u \in E$.
99.2 ➙ $\forall\, A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{K}), \quad (\exp A)^\top = \exp(A^\top)$.
99.3 ➙ $\forall\, A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{C}), \quad \overline{\exp A} = \exp \overline{A}$.
99.4 ➙ *Soit $P \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{K})$. Alors*

$$P^{-1}\exp(A)P = \exp(P^{-1}AP)$$

pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$.

Entraînement

100. Questions pour réfléchir

1. Une fonction de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ est ***rationnelle*** lorsque chacune de ses n composantes est le quotient de deux fonctions polynomiales de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}$.
Une fonction rationnelle de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ est continue sur son ensemble de définition.

2. Soit u, un endomorphisme continu de E, non identiquement nul. Pour tout $r > 0$, il existe une norme sur E telle que $|||u||| = r$.

3. Soient $(F, \|\cdot\|)$, un espace vectoriel normé et E, un sous-espace vectoriel de F de dimension finie. Alors, pour tout $x_0 \in F$,

$$\mathrm{d}(x_0, E) = \min_{y\in E} \mathrm{d}(x_0, y).$$

4. Si l'application $f \,:\, E \to F$ est linéaire et si la dimension de E est finie, l'expression $\|f(x)\|_F$ atteint-elle un maximum sur la boule unité ouverte de E ?

5. Soient E, un espace vectoriel de dimension finie et f, une application linéaire de E dans F.

5.a Il existe un vecteur unitaire $u \in E$ tel que

$$\forall\, x \in E, \quad \|x\| = 1 \implies \|f(x)\|_F \geqslant \|f(u)\|.$$

5.b L'application f est injective si, et seulement si, $\|f(u)\| > 0$.

6. Soient Ω, un voisinage de 0_E dans E ; $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$, une famille libre de vecteurs de E et f_1, …, f_r, des applications de Ω dans $\mathbb{K}$. On pose

$$\forall\, h \in \Omega, \quad f(h) = \sum_{k=1}^{r} f_k(h)\cdot\varepsilon_k.$$

Alors, lorsque $h \in \Omega$ est voisin de 0,

$$f(h) = o(h) \iff \forall\, 1 \leqslant k \leqslant r, \quad f_k(h) = o(h).$$

7. La série $\sum a_n$ est absolument convergente si, et seulement si, la série $\sum(-1)^n a_n$ est absolument convergente.

8. S'il existe une matrice colonne non nulle $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que $(\lambda_k X)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers λX dans $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, alors la suite scalaire $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers λ dans $\mathbb{K}$.

9. L'ensemble des matrices triangulaires supérieures et inversibles de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est-il ouvert ? fermé ?

10. L'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est-il ouvert ? fermé ?

11. La matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ mais pas dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. Si une matrice $B \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ est assez proche de A (pour une norme quelconque sur $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$), alors le discriminant du polynôme caractéristique de B est strictement négatif. Comparer avec [**93**.3].

12.a Si la matrice A est symétrique, alors $\exp(A)$ est symétrique.

12.b Si la matrice $\exp(A)$ est symétrique, la matrice A est-elle symétrique ?

101. Soit $f \in \mathrm{L}(E,F)$, où E est un espace vectoriel de dimension finie. Alors
$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+,\ \forall\, x \in E, \quad \|f(x)\|_F \geqslant \alpha \|x\|_E$$
et f est injective si, et seulement si, on peut choisir $\alpha > 0$. Dans ce cas,
$$\lim_{x\to\infty} \|f(x)\|_F = \infty.$$

102. On note $P \wedge Q$, le plus grand commun diviseur (unitaire) des polynômes P et Q.

1. L'application $[P \mapsto (P, P')]$ est continue de $\mathbb{R}_d[X]$ dans $\mathbb{R}_d[X] \times \mathbb{R}_d[X]$

2. Comme la suite de terme général $P_n = X(X - 2^{-n})$ converge vers X^2, l'application $[P \mapsto P \wedge P']$ n'est pas continue de $\mathbb{R}_d[X]$ dans $\mathbb{R}_d[X]$.

103. Soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$, deux normes sur E, espace de dimension finie. Pour toute application linéaire $f : E \to F$, on pose
$$|||f|||_1 = \sup_{\|x\|_1=1} \|f(x)\|_F \quad \text{et} \quad |||f|||_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|f(x)\|_F.$$
Il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que
$$\forall\, f \in \mathrm{L}(E,F), \quad \alpha |||f|||_1 \leqslant |||f|||_2 \leqslant \beta |||f|||_1.$$

104. Soient E, un espace vectoriel de dimension finie et $\|\cdot\|$, une norme sur E.

104.1 Il existe une constante $K > 0$ telle que
$$\forall\, (u,v) \in \mathrm{L}(E) \times \mathrm{L}(E), \quad \|u \circ v\| \leqslant K \|u\|\, \|v\|.$$

104.2 Il existe une norme sur $\mathrm{L}(E)$ sous-multiplicative et équivalente à la norme $\|\cdot\|$.

105. Sous-espaces de E

Soient E, un espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$ et F, un sous-espace de dimension finie. On propose ici plusieurs manières de démontrer [**67.2**].

105.1 On suppose que la dimension de E est finie.

1. Il existe un sous-espace G de E tel que $E = F \oplus G$.

2. Le sous-espace F est le noyau de la projection sur G parallèlement à F.

105.2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de vecteurs de F qui converge vers $\ell \in E$. On suppose que $\ell \notin F$ et on considère le sous-espace vectoriel $G = F \oplus \mathbb{K} \cdot \ell$.

1. Il existe une application continue $\varphi : G \to \mathbb{R}$ telle que
$$\forall\, x \in G, \quad x - \varphi(x) \cdot \ell \in F.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(u_n) = 0$ alors que $\varphi(\ell) = 1$.

105.3 On suppose que E est un espace préhilbertien.

1. La projection orthogonale p sur F et la projection orthogonale q sur $F^\perp$ sont bien définies et continues.

2. Le sous-espace F est le noyau de q, donc il est fermé.

105.4

1. Soit $\varepsilon \in F$, un vecteur non nul. La droite vectorielle dirigée par ε est fermée.

2. Soient $H \subset F$, un sous-espace fermé de E et $\varepsilon \in F$, un vecteur n'appartenant pas à H.

2.a On définit une norme sur le sous-espace $F = H \oplus \mathbb{K} \cdot \varepsilon$ en posant
$$\forall\, u = v + \lambda \cdot \varepsilon \in F, \quad N(u) = \max\{\|v\|, |\lambda|\}.$$

2.b Si la suite de terme général
$$u_n = v_n + \lambda_n \cdot \varepsilon \in F$$
converge pour la norme $\|\cdot\|$, alors elle est bornée pour la norme N et il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que les deux suites $(v_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\lambda_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

2.c Le sous-espace $H \oplus \mathbb{K} \cdot \varepsilon$ est fermé. On conclut par récurrence.

105.5 On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F qui converge vers un vecteur $\ell \in E$.

1. Il existe une suite extraite $(u_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que
$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \|u_{\varphi(k+1)} - u_{\varphi(k)}\| \leqslant 2^{-k}.$$

2. La série $\sum (u_{\varphi(k+1)} - u_{\varphi(k)})$ converge et sa somme appartient à F.

106. La fonction f définie sur $\Omega =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ par
$$\forall\, (x,y) \in \Omega, \quad f(x,y) = \frac{3x^3 + 2y^3}{x + 2y^2}$$
tend vers 0 au voisinage de $(0,0)$ car il existe un voisinage V de $(0,0)$ relatif à Ω tel que
$$\forall\, (x,y) \in V, \quad \left|f(x,y) - (3x^2 - 6xy^2 + 12y^4)\right| \leqslant 2|y|.$$

107. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ et de $a \in \mathbb{R}$ la fonction f définie par $f(0,0) = a$ et par
$$\forall\, (x,y) \neq (0,0), \quad f(x,y) = \frac{(xy)^n}{x^2 + y^2}$$
est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

108. Raccordement de deux fonctions continues

Soient E_1 et E_2, deux parties de $E = \mathbb{R}^2$: on suppose que
$$E_1 = [x \leqslant t] \quad \text{et} \quad [t < x] \subset E_2$$
de telle sorte que $E = E_1 \cup E_2$. On suppose connues deux applications continues $f_1 : E_1 \to \mathbb{R}$ et $f_2 : E_2 \to \mathbb{R}$.

1. On suppose qu'il existe une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que
$$\forall\, u \in E_1, \quad f(u) = f_1(u) \quad \text{et} \quad \forall\, u \in E_2, \quad f(u) = f_2(u).$$
Commenter.

2.a Si $E_2 = [t \leqslant x]$, alors f est continue sur E.

2.b L'application f définie par
$$\forall\, x \leqslant t, \quad f(x,t) = \exp(x - t)$$
et par
$$\forall\, t < x, \quad f(x,t) = \cos(x - t).$$
est continue sur $\mathbb{R}^2$.

3. Construire un exemple où $E_2 = [t < x]$ et f n'est pas continue.

V

Dérivation

109. Toutes les fonctions étudiées ici sont définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie.
Cet espace E est muni de sa topologie d'espace vectoriel normé de dimension finie [**62**]. Si nécessaire, on pourra considérer la norme $N_{\mathscr{B}}$ associée à une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_d)$ de E. →[**1.36**]
Les composantes relatives à la base $\mathscr{B}$ d'une fonction f seront notées $f_1, \ldots, f_d$:

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant d, \quad f_k = e_k^* \circ f \,:\, I \to \mathbb{K}.$$

On peut reconstituer la fonction f à partir de ses composantes au moyen de la formule suivante.

$$\forall\, t \in I, \quad f(t) = \sum_{k=1}^{d} f_k(t) \cdot e_k$$

V.1 Fonctions dérivables

110. Dérivabilité en un point

110.1✍ *Soient $f : I \to E$ et $t_0 \in I$. La fonction f est* **dérivable en** *t_0 lorsque le taux d'accroissement*

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

admet une limite (dans E) lorsque t tend vers t_0.
Cette limite est notée $f'(t_0)$ ou $D(f)(t_0)$.

110.2 La fonction f est dérivable en t_0 si, et seulement si, ses composantes $f_1, \ldots, f_d$ sont dérivables en t_0 et, dans ce cas,

$$f'(t_0) = \sum_{k=1}^{d} f_k'(t_0) \cdot e_k.$$

110.3 La fonction $f : I \to E$ est dérivable en $t_0 \in I$ si, et seulement si, il existe $a \in E$ tel que

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)a + o(t - t_0)$$

lorsque t tend vers t_0 et, dans ce cas, $f'(t_0) = a$.

110.4 Si f est dérivable en t_0, alors f est continue en t_0 (et en particulier définie en t_0).

111. Tangentes

Le ***graphe*** de la fonction $f : I \to E$ est une partie de l'espace affine $\mathbb{R} \times E$.

$$\Gamma_f = \big\{ (t, f(t)),\, x \in I \big\}$$

111.1✍ *Si $f : I \to E$ est dérivable en $t_0 \in I$, la droite d'équation*

$$\big[x = f(t_0) + (t - t_0) f'(t_0) \big]$$

est la **tangente** *au graphe de f au point d'abscisse t_0.*

111.2 La tangente au graphe de f au point d'abscisse t_0 est une droite affine de $\mathbb{R} \times E$ représentée paramétriquement par

$$\big(t_0, f(t_0)\big) + \mathbb{R} \cdot \big(1, f'(t_0)\big).$$

112. Dérivabilité à gauche et à droite

Pour qu'une fonction soit dérivable à droite en t_0, il faut qu'elle soit définie en t_0, mais aussi que l'intervalle $I \cap [t_0, +\infty[$ ne soit pas réduit à $\{t_0\}$.

112.1✍ *La fonction $f : I \to E$ est* **dérivable à droite** *en $t_0 \in I$ lorsque $t_0 \neq \max(I)$ et que le taux d'accroissement*

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

admet une limite dans E, notée $f_d'(t_0)$, lorsque t tend vers t_0 par valeurs strictement supérieures.

112.2✍ *La fonction $f : I \to E$ est* **dérivable à gauche** *en $t_0 \in I$ lorsque $t_0 \neq \min(I)$ et que le taux d'accroissement*

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

admet une limite dans E, notée $f_g'(t_0)$, lorsque t tend vers t_0 par valeurs strictement inférieures.

112.3 La fonction $f : I \to E$ est dérivable à droite en $t_0 \in I$ si, et seulement si, sa restriction à $I \cap [t_0, +\infty[$ est dérivable en t_0.

112.4 Si f est dérivable à droite en t_0, alors f est continue à droite en t_0.

112.5➙ *Si t_0 est un point intérieur à I, la fonction $f : I \to E$ est dérivable en t_0 si, et seulement si, f est dérivable à gauche et à droite en t_0 et si $f_g'(t_0) = f_d'(t_0)$.*

112.6 Si $f : [a, b] \to E$, alors f est dérivable à droite en a (resp. dérivable à gauche en b) si, et seulement si, f est dérivable en a (resp. dérivable en b).

112.7 La fonction $f : I \to E$ est dérivable à droite (resp. à gauche) en t_0 si, et seulement si, il existe $a \in E$ tel que

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0) \cdot a + o(t - t_0)$$

pour tout t dans un voisinage de t_0 relatif à $]t_0, +\infty[$ (resp. dans un voisinage de t_0 relatif à $]-\infty, t_0[$).

113. Demi-tangentes

113.1✍ *Si $f : I \to E$ est dérivable à droite en $t_0 \in I$, alors la* **demi-tangente à droite** *au point d'abscisse t_0 du graphe de f est le graphe de la fonction φ_d définie par*

$$\forall\, t \geqslant t_0, \quad \varphi_d(t) = f(t_0) + (t - t_0) \cdot f_d'(t_0).$$

113.2✍ *Si $f : I \to E$ est dérivable à gauche en $t_0 \in I$, alors la* **demi-tangente à gauche** *au point d'abscisse t_0 du graphe de f est le graphe de la fonction φ_g définie par*

$$\forall\, t \leqslant t_0, \quad \varphi_g(t) = f(t_0) + (t - t_0) \cdot f_g'(t_0).$$

114. Fonctions dérivables sur un intervalle

114.1✍ *La fonction $f : I \to E$ est* **dérivable (sur I)** *lorsqu'elle est dérivable en tout point $t_0 \in I$. Dans ce cas, la fonction de I dans E définie par $[t \mapsto f'(t)]$ est la fonction* **dérivée** *de f.*

114.2✍ *La fonction $f : I \to E$ est une fonction* **de classe $\mathscr{C}^1$ (sur I)** *lorsqu'elle est dérivable sur I et que sa dérivée f' est continue sur I.*

114.3➙ *Une fonction $f : I \to E$ est dérivable (resp. de classe $\mathscr{C}^1$) si, et seulement si, pour tout $1 \leqslant k \leqslant d$, sa composante*

$$f_k = e_k^* \circ f \,:\, I \to \mathbb{K}$$

est dérivable (resp. de classe $\mathscr{C}^1$) et →[**115.3**]

$$\forall\, t \in I, \quad f'(t) = \sum_{k=1}^{d} f_k'(t) \cdot e_k.$$

115. Linéarité

115.1➙ *Une combinaison linéaire de fonctions dérivables est dérivable.*

115.2 La dérivation $[f \mapsto f']$ est une application linéaire de $\mathscr{C}^1(I, E)$ dans $\mathscr{C}^0(I, E)$.

115.3➙ *Soient $f : I \to E$, une fonction dérivable (resp. de classe $\mathscr{C}^1$) et $T : E \to F$, une application linéaire. La composée $T \circ f : I \to F$ est dérivable (resp. de classe $\mathscr{C}^1$) et* →[**114.3**]

$$(T \circ f)' = T \circ (f').$$

115.4➙ *Soient deux matrices $Q \in \mathfrak{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $P \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, quelconques. Si la fonction*

$$A \,:\, I \to \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

est dérivable, alors la fonction $QAP : I \to \mathfrak{M}_{m,q}(\mathbb{K})$ est dérivable et

$$\frac{\mathrm{d}(QA_tP)}{\mathrm{d}t} = Q\, \frac{\mathrm{d}A_t}{\mathrm{d}t}\, P.$$

116. ➙ **Dérivation d'une fonction composée**
Soient I et J, deux intervalles de $\mathbb{R}$. Si les fonctions

$$\varphi : I \to J \qquad \text{et} \qquad f : J \to E$$

sont dérivables (resp. de classe $\mathscr{C}^1$), alors la composée

$$f \circ \varphi : I \to E$$

est dérivable (resp. de classe $\mathscr{C}^1$) et

$$\forall\, t \in I, \quad (f \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t) \cdot f'\big(\varphi(t)\big).$$

V.2 Formule de Leibniz

117. Le théorème **[118]** établit la dérivabilité d'un produit de fonctions dérivables et donne en outre la formule qui exprime la dérivée de ce produit : la ***formule de Leibniz***.
Par *produit*, il faut entendre ici toute application bilinéaire continue **[73.3]**.

118. ➙ *Soient E, F et G, trois espaces vectoriels normés de dimension finie et $B : E \times F \to G$, une application bilinéaire continue.*
Si les fonctions $f : I \to E$ et $g : I \to F$ sont dérivables, alors la fonction $h = B(f, g)$ est dérivable de I dans G et

$$\forall\, t \in I, \quad h'(t) = B\big(f'(t), g(t)\big) + B\big(f(t), g'(t)\big).$$

Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$, alors h est de classe $\mathscr{C}^1$.

119. Fonctions polynomiales et rationnelles [109]
On suppose que la fonction $f : I \to E$ est dérivable.
119.1 Toute fonction polynomiale des composantes $f_1, \ldots, f_d$ est dérivable sur I et sa dérivée est une fonction polynomiale des composantes de f et de f'.
119.2 Toute fonction rationnelle des composantes $f_1, \ldots, f_d$ est dérivable sur son ensemble de définition et sa dérivée est une fonction rationnelle des composantes de f et de f'.

120. Applications usuelles de la formule de Leibniz
Tous les exemples sont énoncés pour des fonctions dérivables, mais sont encore valides pour des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.
120.1 On suppose $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne orientée canonique. Si les fonctions

$$f : I \to \mathbb{R}^3 \qquad \text{et} \qquad g : I \to \mathbb{R}^3$$

sont dérivables, alors la fonction

$$h = [t \mapsto f(t) \wedge g(t)] : I \to \mathbb{R}^3$$

est dérivable et

$$\forall\, t \in I, \quad h'(t) = f'(t) \wedge g(t) + f(t) \wedge g'(t).$$

120.2 Si les fonctions $x_k : I \to \mathbb{K}$ et $\varepsilon_k : I \to E$ sont dérivables pour tout $1 \leqslant k \leqslant d$, alors la fonction $f : I \to E$ définie par

$$\forall\, t \in I, \quad f(t) = \sum_{k=1}^{d} x_k(t) \cdot \varepsilon_k(t)$$

est dérivable et

$$\forall\, t \in I, \quad f'(t) = \sum_{k=1}^{d} \big[x_k'(t) \cdot \varepsilon_k(t) + x_k(t) \cdot \varepsilon_k'(t)\big].$$

120.3 Si $A : I \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $X : I \to \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont deux fonctions dérivables, alors la fonction

$$B = [t \mapsto A_t X_t]$$

est dérivable de I dans $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et

$$\forall\, t \in I, \quad B_t' = A_t' X_t + A_t X_t'.$$

120.4 On suppose que $F = E$, que B est un produit scalaire sur E et que les fonctions $f : I \to E$ et $g : I \to E$ sont dérivables.
1. Les fonctions $\langle f \,|\, g \rangle : I \to \mathbb{R}$ et $\|f\|^2 : I \to \mathbb{R}$ sont dérivables et

$$\frac{\mathrm{d}\,\langle f(t) \,|\, g(t) \rangle}{\mathrm{d}t} = \langle f'(t) \,|\, g(t) \rangle + \langle f(t) \,|\, g'(t) \rangle,$$
$$\frac{\mathrm{d}\|f(t)\|^2}{\mathrm{d}t} = 2\,\langle f(t) \,|\, f'(t) \rangle.$$

2. Si f ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\|f\| : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et

$$\frac{\mathrm{d}\|f(t)\|}{\mathrm{d}t} = \frac{\langle f(t) \,|\, f'(t) \rangle}{\|f(t)\|}.$$

3. Si E est un espace euclidien ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) et si $\|f(t)\| = 1$ pour tout $t \in I$, alors

$$\forall\, t \in I, \quad \langle f(t) \,|\, f'(t) \rangle = 0.$$

120.5 Soient E, un plan vectoriel et $\mathscr{B}$, une base de E. Si f et g sont deux fonctions dérivables de I dans E, alors

$$h = \big[t \mapsto \det\nolimits_{\mathscr{B}}\big(f(t), g(t)\big)\big]$$

est une fonction dérivable de I dans $\mathbb{K}$ et

$$h'(t) = \det\nolimits_{\mathscr{B}}\big(f'(t), g(t)\big) + \det\nolimits_{\mathscr{B}}\big(f(t), g'(t)\big)$$

pour tout $t \in I$.
120.6 Soit E, une algèbre de dimension finie. Le produit de deux fonctions dérivables de I dans E est une fonction dérivable sur I.
1. Soit $E = \mathrm{L}(V)$, où V est un espace vectoriel normé de dimension finie. Si les deux fonctions $f : I \to E$ et $g : I \to E$ sont dérivables, alors $h = [t \mapsto f(t) \circ g(t)]$ est dérivable sur I et

$$\forall\, t \in I, \quad h'(t) = f'(t) \circ g(t) + f(t) \circ g'(t).$$

2. Soit $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
2.a Si les fonctions $A : I \to E$ et $B : I \to E$ sont dérivables, alors $C = [t \mapsto A_t B_t]$ est dérivable sur I et

$$\forall\, t \in I, \quad C_t' = A_t' B_t + A_t B_t'.$$

2.b Si $P : I \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est dérivable et si $P_t \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ pour tout $t \in I$, alors $Q = [t \mapsto P_t^{-1}]$ est dérivable sur I et

$$\forall\, t \in I, \quad \frac{\mathrm{d}Q_t}{\mathrm{d}t} = -P_t^{-1} P_t' P_t^{-1}.$$

121. On peut étendre la Formule de Leibniz aux applications multilinéaires continues par récurrence.

122. * *Soient E, un espace vectoriel de dimension $d \geqslant 2$ et $\mathscr{B}$, une base de E. Quelles que soient les fonctions dérivables $f_1, \ldots, f_d$ de I dans E, l'application*

$$F = \big[t \mapsto \det\nolimits_{\mathscr{B}}\big(f_1(t), \ldots, f_d(t)\big)\big]$$

est dérivable de I dans $\mathbb{K}$ et

$$F'(t) = \sum_{k=1}^{d} \det\nolimits_{\mathscr{B}}\big(f_1(t), \ldots, f_k'(t), \ldots, f_d(t)\big)$$

pour tout $t \in I$.

V.3 Applications de classe $\mathscr{C}^k$

123. Pour tout entier $k \geqslant 1$, les classes $\mathscr{C}^k$ sont définies par récurrence.
Les propriétés des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ seront donc établies par récurrence à partir des propriétés des fonctions continues et des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.

123.1✍ *Pour tout entier $k \geqslant 1$, une fonction*

$$f : I \to E$$

est **de classe $\mathscr{C}^k$ (sur I)** *lorsqu'elle est dérivable et que sa dérivée f' est de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ sur I.*

123.2

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \mathscr{C}^{k+1}(I,E) \subset \mathscr{C}^k(I,E)$$

123.3 Si $I = [a,b]$, alors l'application $\|\cdot\|_{\mathscr{C}^p}$ définie par

$$\|f\|_{\mathscr{C}^p} = \sum_{k=0}^{p} \|f^{(k)}\|_\infty$$

est une norme sur $\mathscr{C}^p(I,E)$.

123.4✍ *Une fonction $f : I \to E$ est* **de classe $\mathscr{C}^\infty$ (sur I)**, *ou* **indéfiniment dérivable (sur I)**, *lorsque*

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad f \in \mathscr{C}^k(I,E)$$

de telle sorte que

$$\mathscr{C}^\infty(I,E) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{C}^k(I,E).$$

Opérations

124. Combinaisons linéaires

124.1➙ *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la classe $\mathscr{C}^k(I,E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{A}(I,E)$ et la dérivation*

$$D = [f \mapsto f']$$

est une application linéaire de $\mathscr{C}^{k+1}(I,E)$ dans $\mathscr{C}^k(I,E)$.

124.2➙ *La classe $\mathscr{C}^\infty(I,E)$ est un espace vectoriel stable par D.*

125. Produit

125.1 Triangle de Pascal

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant p, \quad \binom{p}{k-1} + \binom{p}{k} = \binom{p+1}{k}$$

125.2➙ **Formule de Leibniz**

Soient E et F, deux espaces de dimension finie. Si $f : I \to E$ et $g : I \to F$ sont de classe $\mathscr{C}^p$ et si $B : E \times F \to G$ est bilinéaire, alors $B(f,g) : I \to G$ est de classe $\mathscr{C}^p$ et

$$\big[B(f,g)\big]^{(p)}(t) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B\big(f^{(k)}(t), g^{(p-k)}(t)\big).$$

pour tout $t \in I$. →**[120]**

126. ➙ **Composition**

Si $f : J \to E$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^p$ telles que $\varphi_*(I) \subset J$, alors $f \circ \varphi : I \to E$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^p$.

Difféomorphismes (changements de variable)

127. On suppose ici que $p \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$.

127.1 Un ***difféomorphisme*** sert à *changer de variable* (dans une intégrale, dans une équation différentielle...) ou à *changer de paramètre* (dans un arc paramétré).

127.2✍ *Soient I et J, deux intervalles de $\mathbb{R}$.*
Une application $\varphi : I \to J$ est un **difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^p$** *lorsque*

1. *la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^p$ sur I*
2. *et réalise une bijection de I sur J*
3. *dont la réciproque $\varphi^{-1} : J \to I$ est de classe $\mathscr{C}^p$ sur J.*

127.3 En pratique, quand une grandeur exprimée en fonction d'une certaine variable, il peut être utile de l'exprimer comme une fonction d'une nouvelle variable :

$$V = f(x) = g(u).$$

Dans ce cas, les variables u et x sont reliées par

$$u = \varphi(x) \quad \text{ou par} \quad x = \varphi^{-1}(u)$$

et les fonctions f et g qui représentent la grandeur V dans deux systèmes de coordonnées différents sont reliées par

$$f = g \circ \varphi \quad \text{ou par} \quad g = f \circ \varphi^{-1}.$$

127.4➙ **Théorème d'inversion, version $\mathscr{C}^1$**

Si $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\forall\, x \in I, \quad \varphi'(x) \neq 0,$$

alors φ réalise une bijection de l'intervalle I sur $J = \varphi_*(I)$ (qui est un intervalle) dont la réciproque $\varphi^{-1} : J \to I$ est dérivable sur I et

$$\forall\, y \in J, \quad (\varphi^{-1})'(y) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))},$$

de telle sorte que φ^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J.

127.5➙ **Théorème d'inversion, version $\mathscr{C}^p$**

Une application φ de I, intervalle de $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{R}$ est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^p$ de I sur $J = \varphi_*(I)$ si, et seulement si, φ est de classe $\mathscr{C}^p$ sur I et

$$\forall\, x \in I, \quad \varphi'(x) \neq 0.$$

Entraînement

128. Questions pour réfléchir

1. *Suite de* **[113.1]** – La demi-tangente à droite au point d'abscisse t_0 est la demi-droite affine représentée paramétriquement par

$$\big(t_0, f(t_0)\big) + \mathbb{R}_+ \cdot \big(1, f'_d(t_0)\big).$$

2. On suppose que $f : I \to E$ est dérivable à gauche en $t_0 \in I$. On pose

$$M_0 = \big(t_0, f(t_0)\big) \in \mathbb{R} \times E \quad \text{et} \quad \boldsymbol{v}_0 = \big(1, f'_g(t_0)\big) \in \mathbb{R} \times E.$$

La demi-tangente à gauche au point M_0 du graphe de f est-elle représentée par $M_0 + \mathbb{R}_+ \cdot \boldsymbol{v}_0$ ou par $M_0 + \mathbb{R}_- \cdot \boldsymbol{v}_0$?

3. *Suite de* **[114.3]** – Appliquer au cas où $E = \mathbb{C}$, considéré comme un espace vectoriel réel.

4. Si la fonction $[t \mapsto A_t]$ est dérivable de I dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, alors $[t \mapsto \det A_t]$ est une fonction dérivable de I dans $\mathbb{K}$.

5. On suppose que f est dérivable sur I et que t_0 est un point intérieur à I. Comparer $f'(t_0+)$ et $f'_d(t_0)$.

6. Étendre le théorème **[116]** aux fonctions f à valeurs dans un espace vectoriel normé E de dimension quelconque à l'aide du développement limité

$$f(u) = f(u_0) + (u - u_0) \cdot f'(u_0) + o(u - u_0),$$

avec $u_0 = \varphi(t_0)$ et $u = \varphi(t) = u_0 + (t - t_0) \cdot \varphi'(t_0) + o(t - t_0)$.

7. Étendre la formule de Leibniz aux applications multilinéaires.

8. *Suite de* **[124.1]** – Identifier le noyau et l'image de D.

9. Soient $\varphi : I \to J$, une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ et $\psi : J \to I$, sa bijection réciproque. Comparer les graphes de φ et de ψ, puis la tangente au graphe de φ au point d'abscisse $x_0 \in I$ avec la tangente au graphe de ψ au point d'abscisse $y_0 = \varphi(x_0)$.

129. On suppose que, pour tout $t \in I$, la famille

$$\mathscr{B}_t = \big(e_1(t), e_2(t)\big)$$

est une base de E et que les deux applications $e_1 : I \to E$ et $e_2 : I \to E$ sont dérivables. Si f et g sont deux applications dérivables de I dans E, alors

$$h = \big[t \mapsto \det_{\mathscr{B}_t}\big(f(t), g(t)\big)\big]$$

est dérivable. Expression de $h'(t)$?

Questions, exercices & problèmes

Perfectionnement

130. Exemples et contre-exemples

1. Exemple d'ouvert de $\mathbb{R}^2$ pour la topologie produit qui n'est pas un produit d'ouverts de $\mathbb{R}$.
2. Exemple de compact de l'espace produit E qui n'est pas un produit de parties compactes de $E_1, \ldots, E_p$.
3. Exemple de fonction continue qui n'est pas dérivable.
4. Exemple de fonction f dérivable sur $\mathbb{R}^*$ sans être dérivable au point 0, dont la dérivée admet une limite finie au voisinage de 0.
5. Exemples de sous-algèbres de dimension finie de E pour $E = \mathbb{K}[X]$; pour $E = \mathrm{L}(V)$.
6. Exemples de normes sur l'algèbre E qui sont (resp. ne sont pas) des normes d'algèbre

6.a pour $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$;

6.b pour $E = \mathrm{L}(V)$ avec V, espace vectoriel de dimension finie.

131. Questions pour réfléchir

1. Soit $(V, \|\cdot\|)$, une algèbre associative unitaire.

1.a Comment définir une application polynomiale en p variables $f : V^p \to V$?

1.b Une telle application est-elle continue ?

2. Ordre de grandeur d'une application affine $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ au voisinage d'un point M_0 de $\mathscr{E}$.
3. On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée admet des limites finies à gauche et à droite en 0. Comparer $f'(0)$, $f'_g(0)$, $f'_d(0)$, $f'(0+)$ et $f'(0-)$.
4. On suppose que $f :]a, b[\to E$ est dérivable. Est-il possible de prolonger f en une fonction dérivable sur $[a, b]$?
5. Étendre la formule de Leibniz aux applications multilinéaires continues à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension quelconque.
6. Généraliser [**122**] pour le calcul de la dérivée p-ième.
7. Généraliser [**129**] à un espace E de dimension $d \geqslant 3$. →[**122**]

Approfondissement

132. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de vecteurs de E qui converge vers $\ell \in E$. L'adhérence de $A = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, égale à $A \cup \{\ell\}$, est une partie compacte de E. Cette propriété est-elle encore vraie si E est un espace de dimension infinie ?

133. Polynômes de degré 2

L'espace $E = \mathbb{R}_2[X]$ est muni de la norme définie par

$$\|aX^2 + bX + c\| = \max\{|a|, |b|, |c|\}.$$

1. L'ensemble U des polynômes de degré 2 est un ouvert de E, qui est dense dans E mais pas connexe par arcs.

2.a Le discriminant $\Delta : U \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

2.b La partie $F = \big[\Delta(P) = 0\big]$ est un fermé relatif à U qui n'est pas un fermé de E.

2.c Si V est un voisinage relatif à U d'un polynôme $P_0 \in F$, alors $V \cap F^c \neq \varnothing$: on dit que F est une ***partie d'intérieur vide relativement à*** U.

134. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une application de classe $\mathscr{C}^1$. La fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) = \left| \begin{array}{ll} f'(x) & \text{si } x = y, \\ \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y. \end{array} \right.$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$ car

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) = \int_0^1 f'\big(x + t(y - x)\big)\,\mathrm{d}t.$$

135. L'application $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$, définie par $f(0, y) = 0$ pour tout $y > 0$ et par

$$\forall\, x, y > 0, \quad f(x,y) = x^y$$

est continue, mais ne peut être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

136. Soit E, un espace de dimension finie.

136.1 ✍ *Une application q de E dans $\mathbb{K}$ est une* **forme quadratique*** *lorsqu'il existe une application bilinéaire et symétrique de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$ telle que*

$$\forall\, x \in E, \quad q(x) = \varphi(x,x).$$

136.2 Toute forme quadratique sur E est continue sur E et il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\forall\, x \in E, \quad \big|q(x)\big| \leqslant K\|x\|^2.$$

137. L'espace E des suites presque nulles est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On considère la forme bilinéaire φ définie par

$$\forall\, u, v \in E, \quad \varphi(u,v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n.$$

137.1 Quelle que soit la suite $v \in E$, l'application $[u \mapsto \varphi(u,v)]$ est continue. De même, pour toute suite $u \in E$, l'application $[v \mapsto \varphi(u,v)]$ est continue.

137.2 La forme quadratique $[u \mapsto \varphi(u,u)]$ n'est pas bornée sur la sphère unité de E, donc la forme bilinéaire φ n'est pas continue sur E.

Pour aller plus loin

138. Questions pour réfléchir

1. Soient $\varphi : F \times G \to H$, une application bilinéaire et continue et $f : A \to F$ et $g : A \to G$, deux fonctions uniformément continue sur A. Le produit $\varphi(f,g)$ est-il une fonction uniformément continue sur A ?
2. Soit $f : E \to F$, où E est un espace vectoriel normé de dimension finie. Si f est continue sur un voisinage de $a \in E$, alors f est uniformément continue au voisinage de a.
3. Condition pour qu'un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}^n$ tende vers l'infini au voisinage de l'infini.
4. Si q est une forme quadratique sur E, espace vectoriel de dimension finie, alors

$$q(\boldsymbol{h}) = \mathcal{O}(\|\boldsymbol{h}\|^2) = o(\boldsymbol{h})$$

lorsque $\boldsymbol{h}$ est voisin de $\mathbf{0}_E$.

5. On appelle ***ouvert élémentaire*** de l'espace vectoriel produit (E, N^∞) tout ouvert U de la forme $U = U_1 \times \cdots \times U_p$, où chaque U_k est un ouvert de $(E_k, \|\cdot\|_k)$.

Tout ouvert de (E, N^∞) n'est pas un ouvert élémentaire, mais est réunion d'une famille d'ouverts élémentaires.

6. Caractériser les applications p-linéaires et continues de l'espace produit $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ dans F.
7. Si $E_1, \ldots, E_p$ sont des espaces vectoriels de dimension finie, toute application p-linéaire de $E = E_1 \times \cdots \times E_p$ dans F est continue, quelles que soient les normes choisies sur $E_1, \ldots, E_p$ et F, quelle que soit la dimension de F.
8. Soit E, un espace vectoriel normé de dimension finie.

8.a Comment définir une norme sur $\mathscr{C}^1([0, +\infty[, E)$?

8.b Comment définir une norme sur $\mathscr{C}^\infty([a,b], E)$?

9. Soit E, une algèbre de dimension finie. Existe-t-il une norme d'algèbre sur E ?

139. Fonctions homogènes

On suppose que f est ***homogène de degré*** α :

$$\forall\, \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(\lambda \cdot \boldsymbol{u}) = \lambda^\alpha f(\boldsymbol{u}).$$

1. Exemples de fonctions homogènes de degré 1 ? de fonctions homogènes de degré 2 ?

2. Si f est homogène de degré α, alors $f(\boldsymbol{u}) = o(\boldsymbol{u})$ au voisinage de $\mathbf{0}$ si, et seulement si, $\alpha > 1$.

140. Applications linéaires ouvertes [2.78]

140.1 Soit $f \in \mathrm{L}(E, F)$.

1. Si l'image par f de tout ouvert de E est un ouvert de F, alors f est surjective.
2. Si F est un espace de dimension finie, alors la réciproque est vraie.

140.2 On munit $E = F = \mathbb{R}[X]$ de la norme définie par

$$\forall\, P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X], \quad \|P\| = \max_{k\in\mathbb{N}} |a_k|.$$

L'image de la boule unité par l'application linéaire f définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f(X^n) = 2^{-n} X^n$$

est une partie d'intérieur vide.

141. Espaces homéomorphes

Un ***homéomorphisme*** de $(E, \|\cdot\|_E)$ sur $(F, \|\cdot\|_F)$ est une bijection $f : E \to F$ telle que les deux applications

$$f : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F) \quad \text{et} \quad f^{-1} : (F, \|\cdot\|_F) \to (E, \|\cdot\|_E)$$

sont continues.

Les espaces vectoriels normés $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont dits ***homéomorphes*** lorsqu'il existe un homéomorphisme de $(E, \|\cdot\|_E)$ sur $(F, \|\cdot\|_F)$.

1. Si f est un homéomorphisme de $(E, \|\cdot\|_E)$ sur $(F, \|\cdot\|_F)$, alors l'image par f d'une partie ouverte (resp. fermée, resp. compacte) de E est une partie ouverte (resp. fermée, resp. compacte) de F. Que dire de l'image par f d'une suite convergente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E ?
2. Deux espaces vectoriels normés de même dimension d sont homéomorphes.

142. Espaces complets [1.81]

On considère un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.

142.1 On suppose que toute suite de vecteurs de E qui vérifie le critère de Cauchy est convergente. Alors toute série absolument convergente de vecteurs de E est convergente.

142.2 Réciproquement, on suppose que toute série absolument convergente de vecteurs de E est convergente et on considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E qui vérifie le critère de Cauchy.

1. Il existe une suite extraite $(u_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que la série

$$\sum u_{\varphi(k+1)} - u_{\varphi(k)}$$

soit absolument convergente.

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

142.3 ✍ *Un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est* **complet*** *lorsqu'une suite de vecteurs de E est convergente si, et seulement si, elle vérifie le critère de Cauchy.*

142.4 Tout espace vectoriel de dimension finie est complet (quelle que soit la norme considérée).

142.5 En posant

$$\forall\, P = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k, \qquad \|P\| = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|a_k|}{2^k},$$

on définit une norme sur $E = \mathbb{K}[X]$. Pour cette norme, la série $\sum X^n$ est absolument convergente, mais elle n'est pas convergente.

142.6 Le *Théorème de Baire* assure qu'un espace vectoriel de dimension dénombrable (comme $\mathbb{K}[X]$) n'est jamais complet — quelle que soit la norme considérée.