2
Topologie d'un espace vectoriel normé

1. On considère un espace vectoriel E, qu'on suppose muni d'une norme $\|\cdot\|$.

I
Image directe, image réciproque

2. ✍ *Quel que soit l'ensemble X, le* **complémentaire** *d'une partie A de X est noté A^c.*

3. Étant donnée une application f d'un ensemble X dans un ensemble Y, on peut lui associer deux applications

$$f_* : \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(Y) \quad \text{et} \quad f^* : \mathfrak{P}(Y) \to \mathfrak{P}(X).$$

4. Image directe

4.1 ✍ *L'***image (directe)** *d'une partie $A \subset X$ par une application $f : X \to Y$ est définie par*

$$f_*(A) = \{f(x),\, x \in A\} = \{y \in Y : \exists\, x \in A, \quad y = f(x)\}.$$

On la note aussi $f(A)$.

4.2 L'application f_* est croissante (pour l'inclusion) de $\mathfrak{P}(X)$ dans $\mathfrak{P}(Y)$.

$$\forall\, (A, B) \in \mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X), \quad A \subset B \implies f_*(A) \subset f_*(B)$$

4.3 ➙ *Soit $f : X \to Y$. Quelles que soient les parties A et B de X,*

(1) $$f_*(A \cup B) = f_*(A) \cup f_*(B)$$

(2) $$f_*(A \cap B) \subset f_*(A) \cap f_*(B).$$

5. Image réciproque

5.1 ✍ *L'***image réciproque** *d'une partie $A \subset Y$ par une application $f : X \to Y$ est définie par*

$$f^*(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}.$$

On la note aussi $[f \in A]$ ou $[f(x) \in A]$.

5.2 La notation $[f \in A]$, ou $[f(x) \in A]$, est souvent la plus pratique.

5.3 L'application f^* est croissante (pour l'inclusion) de $\mathfrak{P}(Y)$ dans $\mathfrak{P}(X)$.

$$\forall\, (A, B) \in \mathfrak{P}(Y) \times \mathfrak{P}(Y), \quad A \subset B \implies [f \in A] \subset [f \in B]$$

5.4 ➙ *Soit $f : X \to Y$. Quelles que soient les parties A et B de Y,*

(1) $$[f \in A \cup B] = [f \in A] \cup [f \in B]$$

(2) $$[f \in A \cap B] = [f \in A] \cap [f \in B]$$

(3) $$[f \in A^c] = [f \in A]^c$$

6. Composées de f_* et f^*

6.1 Pour toute partie B de Y,

$$f_* \circ f^*(B) \subset B.$$

6.2 Pour toute partie A de X,

$$A \subset f^* \circ f_*(A).$$

6.3 Si $f : X \to Y$ est une bijection, alors

$$f^* = (f^{-1})_* \qquad \text{et} \qquad (f^{-1})^* = f_*.$$

7. Exemples d'images réciproques

1. Le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque de l'ouvert $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ par l'application det : $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

2. Le groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque du fermé $\{1\}$ par l'application det.

3.a Le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque du singleton $\{I_n\}$ par l'application

$$\left[M \mapsto M^\top.M\right] : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}).$$

3.b Le sous-groupe $SO_n(\mathbb{R})$ des rotations s'écrit

$$SO_n(\mathbb{R}) = [M^\top.M = I_n] \cap [\det(M) = 1].$$

4. Le sous-espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques réelles est l'image réciproque du singleton $\{0_n\}$ par l'application

$$\left[M \mapsto M^\top - M\right] : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}).$$

5. Le sous-espace $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices anti-symétriques est l'image réciproque du singleton $\{0_n\}$ par l'application

$$\left[M \mapsto M^\top + M\right] : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}).$$

6. Un cercle du plan euclidien canonique est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par un polynôme de degré 2 :

$$\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 = 0\right].$$

7. Un disque du plan euclidien canonique est l'image réciproque du fermé $]-\infty, 0]$ par un polynôme de degré 2 :

$$\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 \leqslant 0\right].$$

8. L'image réciproque du segment $[r^2, R^2]$ par l'application

$$\left[(x, y) \mapsto (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right] : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

est l'anneau de centre (x_0, y_0), de rayon intérieur r et de rayon extérieur R.

9. Une sphère de l'espace euclidien canonique est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par un polynôme de degré 2 :

$$\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - R^2 = 0\right].$$

10. L'image réciproque du carré $[0, a] \times [0, a]$ par l'application

$$\left[(x, y) \mapsto (|x - x_0|,\, |y - y_0|)\right] : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

est un carré de centre (x_0, y_0) et de côté $2a$.

11. Dans le plan euclidien canonique, les ***coniques*** sont les images réciproques du fermé $\{0\}$ par les polynômes de degré 2 en deux variables :

$$[ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0].$$

12. Les ***quadriques*** de l'espace euclidien canonique sont les images réciproques du fermé $\{0\}$ par les polynômes de degré 2 en trois variables :

$$[a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + b_1xy + b_2yz + b_3xz + c_1x + c_2y + c_3y + d = 0].$$

13. Un hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par une forme linéaire non nulle.
Un hyperplan affine de $\mathbb{R}^n$ est l'image réciproque d'un singleton $\{a\} \subset \mathbb{R}$ par une forme linéaire non nulle.

14. Une représentation cartésienne d'un sous-espace vectoriel ou affine de $\mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire un système de r équations en n inconnues) caractérise ce sous-espace comme l'image réciproque d'un singleton de $\mathbb{R}^r$ par une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^r$.

15. Pour tout $1 \leqslant r \leqslant n$, on note M_r, l'ensemble des matrices dont le rang est supérieur à r.

15.a À toute matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ sont associés $\binom{n}{r}$ mineurs de taille $1 \leqslant r \leqslant n$. L'ensemble M_r est l'union des images réciproques de $\mathbb{R}^*$ par $\binom{n}{r}$ applications polynomiales en n^2 variables.

15.b Pour tout $1 \leqslant r < n$, l'ensemble des matrices de rang r est égal à $M_r \cap M_{r+1}^c$.

16. Pour tout $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on considère l'application

$$q_X = \left[M \mapsto X^\top.M.X\right] \ : \ \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}.$$

16.a

$$\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \left(\bigcap_{X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})} [q_X \in [0, +\infty[] \right)$$

16.b

$$\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \cap [\det(M) > 0]$$

Entraînement

8. Questions pour réfléchir

1. Condition sur f pour que

$$\forall\ (A, B) \in \mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X), \quad f_*(A \cap B) = f_*(A) \cap f_*(B).$$

2. Condition sur f pour que

$$\forall\ A \in \mathfrak{P}(X), \quad f_*(A^c) = \left[f_*(A)\right]^c.$$

3. Condition sur f^* pour que f soit surjective.
4. Condition sur f^* pour que f soit injective.
5. Condition sur $f : X \to Y$ pour que

$$\forall\ B \in \mathfrak{P}(Y), \quad f_* \circ f^*(B) = B.$$

6. Condition sur $f : X \to Y$ pour que

$$\forall\ A \in \mathfrak{P}(X), \quad f^* \circ f_*(A) = A.$$

9. Images directes

1. Représenter un cercle (resp. un carré) comme l'image directe d'un segment par une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. Représenter un disque comme l'image directe d'un carré $[a, b] \times [c, d]$ par une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
3. Représenter le groupe $SO_2(\mathbb{R})$ comme l'image directe d'un segment par une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

10. On considère deux applications

$$f : X \to Y \qquad \text{et} \qquad g : Y \to Z.$$

10.1 Quelle que soit la partie $A \subset X$,

$$(g \circ f)_*(A) = g_*\big(f_*(A)\big).$$

10.2 Quelle que soit la partie $C \subset Z$,

$$(g \circ f)^*(C) = f^*\big(g^*(C)\big).$$

II

Topologie

II.1 Filtre des voisinages

11. Définir une ***topologie*** sur un ensemble sert à établir les notions de suite convergente et de fonction continue au voisinage d'un point : on commence par définir la notion de *voisinage* d'un point.

12. On définit de manières distinctes les voisinages d'un point de E (pour définir ensuite les notions de suites convergentes et de fonctions continues) et les voisinages des points à l'infini (pour définir les limites à l'infini et les limites infinies).
Les propriétés fondamentales, communes à toutes les notions de voisinage, sont présentées dans le théorème **[14]**.

13. Voisinages d'un point de E
Soient x_0, un point de E et V, une partie de E.

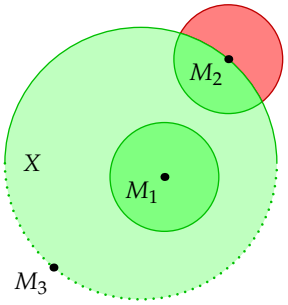
13.1 Il existe un réel $r > 0$ tel que la boule ouverte $B_o(x_0, r)$ soit contenue dans V si, et seulement si, il existe un réel $r > 0$ tel que la boule fermée $B_f(x_0, r)$ soit contenue dans V.

13.2 ✍ *Une partie V de E est un* **voisinage** *du point $x_0 \in E$ lorsque V contient une boule centrée en x_0 et de rayon strictement positif :*

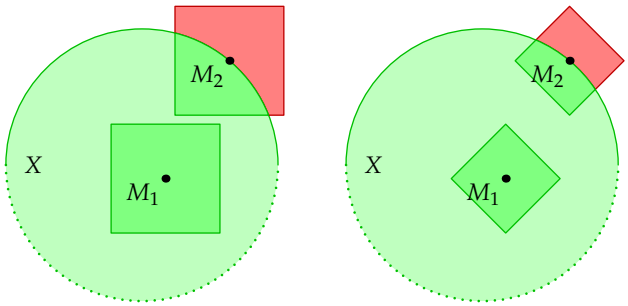
$$\exists\, r > 0, \qquad B(x_0, r) \subset V.$$

Cette propriété est notée $V \in \mathcal{V}(x_0)$, ou $V \in \mathcal{V}_E(x_0)$ en cas d'ambiguïté.

13.3 La partie X est un voisinage du point M_1, mais pas du point M_2 : tout disque centré en M_2 rencontre le complémentaire de X. Le point M_3 n'appartient pas à X.



13.4 Les propriétés précédentes, vues pour la norme euclidienne canonique, sont également vraies pour la norme produit $\|\cdot\|_\infty$ et pour la norme $\|\cdot\|_1$.



13.5 Une partie V de $\mathbb{R}$ est un voisinage de x_0 si, et seulement si, il existe un réel $r > 0$ tel que

$$]x_0 - r, x_0 + r[\subset V.$$

14. ⇝ Propriétés filtrantes des voisinages
Pour tout point $x_0 \in E$:

14.1 *Si $V \in \mathcal{V}(x_0)$, alors $V \neq \varnothing$.*

14.2 *Si $V, W \in \mathcal{V}(x_0)$, alors $V \cap W \in \mathcal{V}(x_0)$.*

14.3 *Si $V \in \mathcal{V}(x_0)$ et si $V \subset W$, alors $W \in \mathcal{V}(x_0)$.*

15. L'intersection d'un nombre *fini* de voisinages d'un point x_0 est un voisinage de x_0.

16. Séparation des points

16.1 ➙ *Étant donné deux points distincts x et y dans E, il existe deux voisinages $V \in \mathscr{V}(x)$ et $W \in \mathscr{V}(y)$ tels que $V \cap W = \varnothing$.*

16.2 Pour tout $x_0 \in E$,

$$\bigcap_{W \in \mathscr{V}(x_0)} W = \{x_0\}.$$

16.3 Pour tout $x_0 \in E$, il existe une suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de voisinages de x_0 telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad W_{n+1} \subset W_n \quad \text{et} \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_n = \{x_0\}.$$

II.2 Ouverts, fermés

17. La ***topologie*** sur l'espace E est définie à partir de la notion de voisinage.

Parties ouvertes

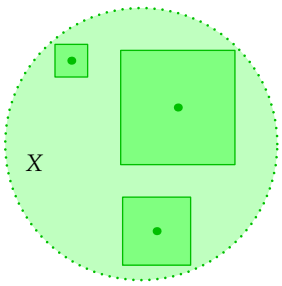
18.1 ✍ *Une partie U de E est* **ouverte** *lorsque U est un voisinage de chacun de ses points :*

$$\forall\, x_0 \in U, \quad U \in \mathscr{V}(x_0).$$

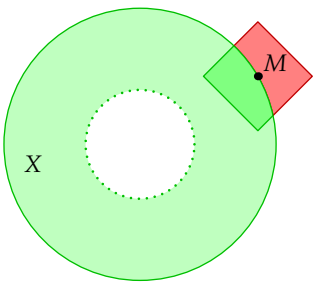
On dit aussi que U est un **ouvert** *de E.*

18.2 ✍ *La* **topologie** *de l'espace E est l'ensemble des parties ouvertes de E.*

18.3 La partie X est un ouvert pour la norme produit en tant que voisinage de chacun de ses points. C'est également vrai pour la norme euclidienne canonique et pour la norme $\|\cdot\|_1$.



18.4 La partie X n'est pas un voisinage du point M. Elle n'est donc pas ouverte pour la norme $\|\cdot\|_1$, pas plus que pour la norme euclidienne canonique ou pour la norme produit $\|\cdot\|_\infty$.



19. ➙ **Ouverts fondamentaux**

19.1 *L'ensemble vide et E sont des ouverts de E.*

19.2 *Toute boule ouverte est un ouvert de E.*

20. ➙ **Opérations sur les ouverts**

20.1 *L'union d'une famille quelconque de parties ouvertes est une partie ouverte.*

20.2 *L'intersection d'une famille finie d'ouverts est un ouvert.*

Parties fermées

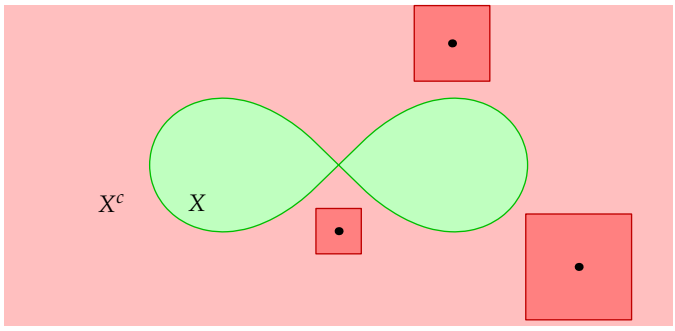
21. Parties fermées

On peut définir les parties fermées par référence aux parties ouvertes **[21.1]**, mais on comprendra mieux cette notion par la caractérisation **[24.1]** : les parties fermées sont celles qui sont stables par passage à la limite.

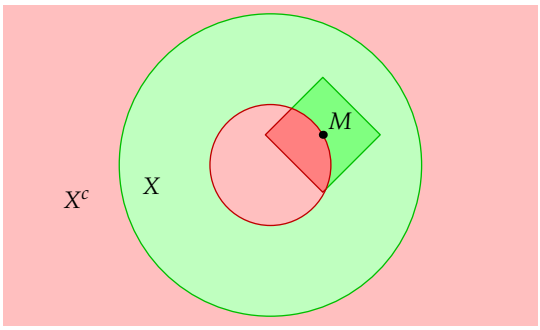
21.1 ✍ *Une partie $F \subset E$ est* **fermée** *lorsque son complémentaire F^c est un ouvert.*

On dit aussi que F est un **fermé** *de E.*

21.2 La partie X est fermée car son complémentaire X^c est un voisinage de chacun de ses points (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, mais aussi pour la norme euclidienne canonique et pour $\|\cdot\|_1$).



21.3 La partie X n'est pas fermée car son complémentaire X^c n'est pas un voisinage du point $M \in X^c$ (pour la norme $\|\cdot\|_1$, mais aussi pour la norme euclidienne canonique et pour la norme produit $\|\cdot\|_\infty$).



22. ➙ **Fermés fondamentaux**

22.1 *L'ensemble vide et E sont des fermés.*

22.2 *Toute boule fermée est un fermé.*

22.3 *En particulier, les singletons sont des fermés.*

22.4 *Toute sphère est un fermé.*

23. ➙ **Opérations sur les fermés**

23.1 *L'intersection d'une famille quelconque de fermés est un fermé.*

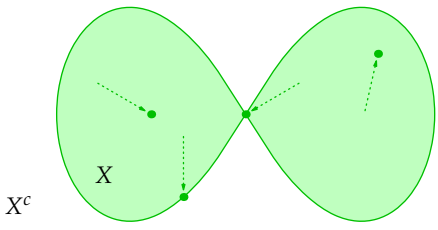
23.2 *L'union d'une famille finie de fermés est un fermé.*

23.3 *En particulier, toute partie finie de E est fermée.*

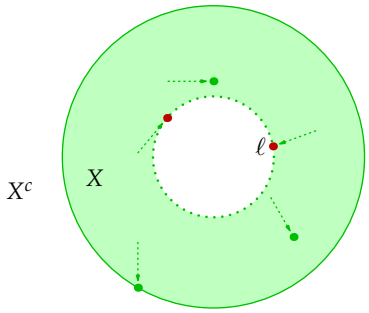
24.1 ➙ **Caractérisation séquentielle des fermés**

Une partie A de E est un fermé si, et seulement si, la limite de toute suite convergente d'éléments de A est un élément de A.

24.2 Pour toute suite convergente d'éléments de X, la limite appartient encore à X, donc la partie X est fermée.



24.3 Il existe au moins une suite convergente d'éléments de X dont la limite ℓ n'appartient pas à X, donc la partie X n'est pas fermée.



25. Exemples et contre-exemples

1. Le plan $[z = 0]$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^3$ muni de la norme produit.
2. Si l'espace $E = \mathscr{B}([a,b])$ des fonctions bornées sur $[a,b]$ est muni de la norme de la convergence uniforme sur $[a,b]$, alors le sous-espace $\mathscr{C}^0([a,b])$ est un fermé de E.
3. D'après le théorème de Weierstrass **[8.51.1]**, le sous-espace des applications polynomiales sur $[0,1]$ n'est pas un fermé de $\mathscr{C}^0([0,1])$ muni de la norme de la convergence uniforme sur $[0,1]$.

Adhérence d'une partie

26.1 ✍ *Un point x de E est* **adhérent** *à A lorsque*

$$\forall\, r > 0, \quad A \cap B_f(x,r) \neq \varnothing.$$

26.2 ✍ *L'***adhérence de** *A est l'ensemble, noté $\overline{A}$, des points de E qui sont adhérents à A.*
26.3 Tout point de A est adhérent à A : $A \subset \overline{A}$.

27. ➙ Caractérisation de l'adhérence
Les propriétés suivantes sont équivalentes.
27.1 *Le point x est adhérent à la partie A de E.*
27.2 $\forall\, r > 0,\ \exists\, y(r) \in A, \quad d\big(x, y(r)\big) \leqslant r$
27.3 *Il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.*
27.4 *La distance de x à A est nulle : $d(x,A) = 0$.*

28.1 Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\overline{A}$ qui converge vers $\ell \in E$, alors il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad d(\ell, u_n) \leqslant d(\ell, x_n) + 2^{-n}$$

et $\ell \in \overline{A}$.
28.2 ➙ Autre caractérisation de l'adhérence
L'adhérence de A est un fermé qui contient A et tout fermé F qui contient A contient aussi l'adhérence de A :

$$A \subset F \implies \overline{A} \subset F.$$

28.3 Si $A \subset B$, alors $\overline{A} \subset \overline{B}$.
28.4 Une partie A de E est fermée si, et seulement si, $\overline{A} = A$.

Parties denses

29. ✍ *Une partie $B \subset A$ est* **dense** *dans A lorsque l'adhérence de B contient A.*

30. ➙ *Une partie B de A est dense dans A si, et seulement si, tout élément de A est limite d'une suite d'éléments de B.*

31. Exemples de parties denses
31.1 Le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dense dans le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.
31.2 L'intervalle ouvert $]a,b[$ est dense dans le segment $[a,b]$.
31.3 *Suite de* **[1.40]** – L'espace des suites réelles nulles à partir d'un certain rang est dense pour la norme $\|\cdot\|_1$ dans l'espace $\ell^1(\mathbb{R})$ des suites sommables, mais n'est pas dense pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ dans l'espace $\ell^\infty(\mathbb{R})$ des suites bornées.
31.4 Le sous-espace des fonctions polynomiales sur un segment $[a,b]$ est dense dans l'espace des fonctions continues sur $[a,b]$ muni de la norme de convergence uniforme sur $[a,b]$.
31.5 Le sous-espace des polynômes trigonométriques est dense dans l'espace des fonctions continues et 2π-périodiques muni de la norme de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.
31.6 Le sous-espace des fonctions en escalier est dense dans l'espace de Dirichlet $\mathcal{D}([a,b])$ pour la norme de la convergence en moyenne sur $[a,b]$.

Intérieur d'une partie

32.1 ✍ *Un point x_0 est* **intérieur à** *la partie A lorsque A est un voisinage de x_0.*
32.2 ✍ *L'***intérieur** *d'une partie A est l'ensemble, noté A°, des points intérieurs à A.*

$$x \in A^\circ \iff A \in \mathscr{V}(x)$$

32.3 Les points intérieurs à A sont des points de A : $A^\circ \subset A$.

33. Caractérisation de l'intérieur
33.1 ➙ *L'intérieur d'une partie A est un ouvert contenu dans A et tout ouvert G contenu dans A est aussi contenu dans l'intérieur de A :*

$$G \subset A \implies G \subset A^\circ.$$

33.2 Une partie A est ouverte si, et seulement si, $A = A^\circ$.
33.3 Pour toute partie A,

$$\big(\overline{A}\big)^c = (A^c)^\circ \quad \text{et} \quad (A^\circ)^c = \overline{(A^c)}.$$

34. Exemples d'intérieurs
34.1 L'intérieur d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ est l'intervalle ouvert dont les bornes sont celles de I.
34.2 L'intérieur de la boule fermée $B_f(x_0,r)$ est la boule ouverte $B_o(x_0,r)$.
34.3 L'intérieur de $\mathbb{Q}$, vu comme une partie de $\mathbb{R}$, est vide.

35. Intérieur d'un espace vectoriel
D'après l'exemple des droites et des plans en dimension 3, on comprend qu'un sous-espace strict est en quelque sorte une partie plate de E.
35.1 Un sous-espace vectoriel qui contient une boule ouverte $B_o(x_0,r)$ contient aussi la boule ouverte $B_o(0_E,r)$.
35.2 ➙ *L'intérieur d'un sous-espace vectoriel strict de E est vide.*

Frontière d'une partie

36.1 ✍ *La* **frontière de** *A (ou* **bord** *de A) est définie par*

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c} = \overline{A} \setminus A^\circ.$$

36.2

$$E = A^\circ \sqcup \partial A \sqcup (A^c)^\circ$$

36.3 Un point x appartient à la frontière de A si, et seulement si, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A et une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A^c telles que

$$x = \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

II.3 Compacité

37. La notion de ***compacité*** tire son origine du théorème de Bolzano-Weierstrass **[1.77]** et permet de reformuler sous forme générale les propriétés des fonctions continues sur un segment de $\mathbb{R}$.

38. ✍ *Une partie A de E est* **compacte** *lorsque toute suite d'éléments de A possède au moins une valeur d'adhérence dans A.*

39. Si F est une partie fermée de E contenue dans une partie compacte K, alors F est une partie compacte de E.

40.1 ➙ *Toute partie compacte A de E est fermée et bornée.*
40.2 Un intervalle de $\mathbb{R}$ est compact si, et seulement si, c'est un segment.

40.3 La réciproque est fausse : il existe des parties fermées et bornées qui ne sont pas compactes. →[50]

40.4 Une partie compacte non vide de $\mathbb{R}$ admet un plus grand et un plus petit élément.

41. ↣ **Théorème de Bolzano-Weierstrass**
Toute partie fermée et bornée de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ est compacte.

42. ↣ *Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a qu'une seule valeur d'adhérence ℓ et si tous les u_n appartiennent à une partie compacte, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.*

Entraînement

43. Questions pour réfléchir

1. $V \in \mathscr{V}(x_0) \iff \exists\, r > 0, \quad B_f(x_0, r) \subset V$
2. *Suite de* [15] – L'intersection d'une *suite* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de voisinages de x_0 n'est pas nécessairement un voisinage de x_0.
3. Une partie U est un ouvert si, et seulement si,

$$\forall\ x_0 \in U,\ \exists\, r > 0, \quad B_f(x_0, r) \subset U.$$

4. Une boule fermée non vide n'est pas un ouvert de E.
5. Tout ouvert est la réunion d'une famille de boules ouvertes.
6. Un ouvert non vide est une partie infinie.
7. Quels intervalles de $\mathbb{R}$ sont-ils des parties ouvertes ?
8. Une boule ouverte n'est pas un fermé.
9. Quels intervalles de $\mathbb{R}$ sont-ils des parties fermées ?
10. Si un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ est à la fois ouvert et fermé, alors il est égal à $\mathbb{R}$. →[144]
11. $x \in \overline{A} \iff \forall\, r > 0, \quad A \cap B_o(x, r) \neq \varnothing$
12. L'adhérence d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.
13. L'adhérence d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ est l'intervalle fermé qui a mêmes bornes que I.
14. L'adhérence de la boule ouverte $B_o(x_0, r)$ est la boule fermée $B_f(x_0, r)$.
15. S'il existe une suite d'éléments de A qui tend vers ω, le point ω est-il adhérent à A ?
16. L'intersection des parties fermées de E qui contiennent A est égale à l'adhérence de A.
17. Si F est dense dans G et si G est dense dans E, alors F est dense dans E.
18. Le point x_0 est intérieur à A si, et seulement si,

$$\exists\, r > 0, \quad B_f(x_0, r) \subset A.$$

19. L'union des parties ouvertes contenues dans A est l'intérieur de A.
20. L'intersection d'un compact et d'une partie fermée est un compact.
21. Si $f : (E, N) \to (F, \|\cdot\|)$ est lipschitzienne et si K est une partie compacte de E pour N, alors $f_*(K)$ est une partie compacte de F pour $\|\cdot\|$.

44. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, un espace vectoriel normé.

44.1 Toute boule ouverte peut s'écrire comme une union de boules fermées.

44.2 Toute boule fermée peut s'écrire comme une intersection de boules ouvertes.

44.3 L'intérieur de la boule unité fermée est la boule unité ouverte.

44.4 L'adhérence de la boule unité ouverte est la boule unité fermée.

45. Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite décroissante de parties compactes de l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad K_{n+1} \subset K_n.$$

45.1 L'intersection

$$K_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$$

est une partie compacte de E.

45.2 Si l'intersection K_∞ est vide, alors il n'existe qu'un nombre *fini* de compacts K_n non vides :

$$\exists\, N_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant N_0, \quad K_n = \varnothing.$$

46. Boules et bases

1. Si l'espace vectoriel E admet une base $(e_i)_{i\in I}$ (sans qu'il soit nécessairement de dimension finie), alors toute boule centrée en 0_E et de rayon $r > 0$ contient une base de E.
2. Pour tout $a \in E$, il existe une famille presque nulle de scalaires $(\alpha_i)_{i\in I}$ telle que

$$a = \sum_{i\in I} \alpha_i e_i.$$

Si $\sum_{i\in I} \alpha_i \neq 1$, alors la famille $(e_i - a)_{i\in I}$ est une base de E. Interpréter géométriquement ce résultat.

3. Toute boule de rayon $r > 0$ contient une base de E.

47. Densité des nombres dyadiques
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une application continue telle que

$$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

1. L'ensemble $\mathscr{D}$ des ***nombres dyadiques***

$$\mathscr{D} = \Big\{\frac{p}{2^n},\ p \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\Big\}$$

est dense dans $\mathbb{R}$.

2. Si $f(0) = f(1) = 0$, alors f est l'application nulle.
3. L'application f est affine.

48. Variations sur le théorème de Weierstrass [8.51.1]
L'espace $E = \mathscr{C}^0([a, b])$ est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ de la convergence uniforme sur $[a, b]$.

1. Soit $f \in E$, telle que $f(a) = f(b) = 0$. Il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales qui converge vers f pour $\|\cdot\|_\infty$ et telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad g_n(a) = g_n(b) = 0.$$

2. Soit $f \in E$, de moyenne nulle :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Il existe une suite de fonctions polynomiales de moyenne nulle qui converge vers f pour $\|\cdot\|_\infty$.

3. Si $f \in E$ est une fonction positive sur $[a, b]$, alors il existe une suite de fonctions polynomiales et positives sur $[a, b]$ qui converge vers f pour $\|\cdot\|_\infty$.
4. Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$, alors il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales sur $[a, b]$ telles que

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - P_n\|_\infty = \lim_{n\to+\infty} \|f' - P_n'\|_\infty = 0.$$

49.1 Une intersection quelconque de parties compactes de E est une partie compacte de E.

49.2 L'union d'un nombre fini de parties compactes de E est une partie compacte de E.

50. On munit l'espace $E = \mathscr{C}^0_{2\pi}$ des fonctions continues et de période 2π de la norme de convergence en moyenne quadratique sur $I = [0, 2\pi]$ [6.92].

1.a La suite de terme général $f_n = [t \mapsto \cos nt]$ est bornée.

1.b Si n et p sont deux entiers non nuls et distincts, alors $\|f_n - f_p\| = 1$ et on ne peut extraire aucune suite convergente de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. La boule unité de E est une partie fermée et bornée qui n'est pas compacte.

III

Continuité

51. ✍ **Continuité en un point**
Soient $(E,\|\cdot\|_E)$ et $(F,\|\cdot\|_F)$, deux espaces vectoriels normés. Une application f de E dans F est **continue au point** $x_0 \in E$ *lorsque*

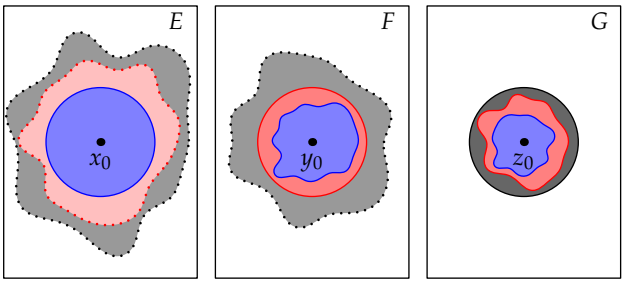
$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\eta>0, \forall\,x\in E,\quad \|x-x_0\|_E\leqslant\eta \implies \|f(x)-f(x_0)\|_F\leqslant\varepsilon.$$

52. Pour savoir si l'application $f : E \to F$ est continue au point $x_0 \in E$, il suffit de connaître les valeurs de f au voisinage de x_0 (par exemple la restriction de f à la boule ouverte $B(x_0,1)$). Pour cette raison, on dit que la continuité est une **propriété locale**.

53. ➙ *Si f est continue au point x_0, alors elle est bornée au voisinage de x_0.*

54. ➙ *Si f est continue au point x_0 et si $f(x_0)\neq y_0$, alors $f(x)\neq y_0$ au voisinage de x_0.*

55. ➙ **Théorème de composition des limites**
Soient $(E,\|\cdot\|_E)$, $(F,\|\cdot\|_F)$ et $(G,\|\cdot\|_G)$, trois espaces vectoriels normés.
Si $f : E \to F$ est continue au point $x_0 \in E$ et si $g : F \to G$ est continue au point $y_0 = f(x_0) \in F$, alors la composée $g\circ f$ est continue au point x_0.



56. ▷ *Si l'application $f : E \to F$ est continue au point x_0, alors pour* toute *suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E qui converge vers x_0, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$.*

57. **Caractérisations séquentielles de la continuité**
57.1 ➙ *Si, pour* toute *suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E qui converge vers x_0, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$, alors l'application $f : E \to F$ est continue au point x_0.*
57.2 ➙ *On suppose que, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E qui converge vers x_0, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Alors la fonction f est continue au point x_0.*

Applications continues

58. ✍ *Une application $f : E \to F$ est* **continue** *lorsqu'elle est continue en chaque point $x_0 \in E$. L'ensemble des applications continues de E dans F est noté $\mathscr{C}^0(E,F)$.*

59. ➙ *Si les applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont continues, alors la composée $g\circ f : E \to G$ est continue.*

60. ➙ *Toute application lipschitzienne est continue.*

61. Si $f : (E,\|\cdot\|_E) \to (F,\|\cdot\|_F)$ est continue, alors $\|f\|_F$ est continue de $(E,\|\cdot\|_E)$ dans $(\mathbb{R},|\cdot|)$.

62. ➙ **Densité et prolongement des égalités**
Si f et g sont deux applications continues de $(E,\|\cdot\|_E)$ dans $(F,\|\cdot\|_F)$ et s'il existe une partie D dense dans E telle que f et g coïncident sur D, alors f et g coïncident sur E.

Continuité des applications linéaires

63. Comme on l'a mentionné plus haut [**1.94**], l'espace $\mathrm{L}_c(E)$ des endomorphismes lipschitziens de E est en fait l'espace des endomorphismes continus de E.

64. ➙ *Soit f, une application linéaire de E dans F. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
1. *L'application f est continue sur E.*
2. *L'application f est continue au point $x_0 = 0_E$.*
3. *L'application f est bornée au voisinage de 0_E.*
4. $$\exists\,k>0,\ \forall\,x\in E,\quad \|f(x)\|_F\leqslant k\|x\|_E$$
5. *L'application f est lipschitzienne sur E.*

Continuité uniforme

65. ✍ *L'application $f : (E,\|\cdot\|_E) \to (F,\|\cdot\|_F)$ est* **uniformément continue** *si, et seulement si,*

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\eta>0, \forall\,(x,y)\in E\times E,\quad \|x-y\|_E\leqslant\eta \implies \|f(x)-f(y)\|_F\leqslant\varepsilon.$$

66. L'ensemble des applications uniformément continues de E dans F est un espace vectoriel.

67.1 Toute application lipschitzienne est uniformément continue.
67.2 Toute application uniformément continue est continue. La réciproque est fausse en général. →[73]

Propriétés topologiques des fonctions continues

68. ➙ *Soient $(E,\|\cdot\|_E)$ et $(F,\|\cdot\|_F)$, deux espaces vectoriels normés et f, une application continue de E dans F.*
68.1 *Pour tout ouvert $\Omega_F \subset F$, l'image réciproque $[f\in\Omega_F]$ de Ω_F par f est un ouvert de E.*
68.2 *L'image réciproque par f de toute partie fermée de F est une partie fermée de E.* →[79]

Applications usuelles

69. ➙ *Le noyau d'une application linéaire continue de E dans F est un fermé de E.*

70. **Continuité des formes linéaires**
Soit f, une forme linéaire sur E.
1. Si f n'est pas continue, alors f n'est pas bornée sur la sphère unité et il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0_E telle que $f(x_n)=1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
2. La forme linéaire f est continue si, et seulement si, son noyau est fermé.

71. **Problème du supplémentaire orthogonal [5.29]**
Soient E, un espace préhilbertien et F, un sous-espace vectoriel de E.
1. Si $E = F\oplus F^\perp$, alors la projection orthogonale sur F est continue et le sous-espace F est un fermé de E.
2. Tout sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace préhilbertien est fermé.
3. Si la dimension de F est infinie, il se peut que F ne soit pas fermé, mais $F^\perp = (\overline{F})^\perp$ et

$$F\oplus F^\perp = F\oplus(\overline{F})^\perp \subset \overline{F}\oplus(\overline{F})^\perp \subset E.$$

Continuité et compacité

72.1 ➙ *Soit $f : (E,\|\cdot\|_E) \to (F,\|\cdot\|_F)$, une application continue. Si $K\subset E$ est une partie compacte de E, alors son image $f_*(K)$ est une partie compacte de F.*
72.2 ➙ *Si $f : E\to\mathbb{R}$ est une application continue, alors la restriction de f à un compact non vide K de E est bornée et atteint ses bornes.*
72.3 Si $f : E\to F$ est une application continue, alors la restriction f à un compact non vide K de E est bornée et il existe deux éléments x_m et x_M de K tels que

$$\forall\,x\in K,\qquad \|f(x_m)\|_F\leqslant\|f(x)\|_F\leqslant\|f(x_M)\|_F.$$

73. ➙ **Théorème de Heine**
Si $f : (E,\|\cdot\|_E) \to (F,\|\cdot\|_F)$ est une application continue, alors sa restriction à une partie compacte de E est uniformément continue.

Entraînement

74. Questions pour réfléchir

1. L'application $f : E \to F$ est continue au point x_0 si, et seulement si, l'application

$$\left[h \mapsto \|f(x_0+h) - f(x_0)\|_F\right] : E \to \mathbb{R}$$

est continue au point 0_E.

2. Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ converge vers un point $\ell \in E$ en lequel l'application f est continue, alors $f(\ell) = \ell$.

3. Soit u, une application linéaire de E dans F. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

3.a L'application u est continue sur E.

3.b L'application u est continue en un point $x_0 \in E$

3.c L'application est bornée au voisinage d'un point $x_0 \in E$.

4. Toute application linéaire continue est en fait uniformément continue.

5. Que signifie le fait qu'une fonction soit uniformément continue en un point x_0 ?

6. Une composée d'applications uniformément continues est-elle uniformément continue ?

7. Si f et g sont deux applications uniformément continues de l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$ dans l'algèbre normée $(F, \|\cdot\|_F)$, leur produit fg est-il aussi une application uniformément continue ?

8. Les sous-espaces propres d'une application linéaire continue de E dans F sont des fermés de E.

9. L'image directe d'un ouvert (resp. d'un fermé) de E par une application continue de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$ n'est pas nécessairement un ouvert de F (resp. un fermé de F).

10. L'image réciproque d'une partie compacte par une fonction continue est-elle compacte ?

75. Si $f : E \to F$ est une application continue et bornée, alors

$$\sup_{x\in A} \|f(x)\|_F = \sup_{x\in\overline{A}} \|f(x)\|_F$$

pour toute partie $A \subset E$.

76. Continuité des applications linéaires

Soit f, une application linéaire de E dans F.

1. Si f est continue, alors

$$A = \{x \in E : \|f(x)\|_F = 1\}$$

est un fermé de E.

2.a Si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E qui tend vers 0_E, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors l'application f est continue.

2.b Si f n'est pas continue, alors A n'est pas fermée.

77. Crochet de Lie [9.186]

Soient u et v, deux endomorphismes continus de E. S'il existe un scalaire α tel que

$$u \circ v - v \circ u = \alpha\, \mathrm{I}_E,$$

alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u \circ v^{n+1} - v^{n+1} \circ u = (n+1)\alpha v^n$$

et si v n'est pas nilpotent, alors $\alpha = 0$.

78. Applications ouvertes

78.1 ✍ *Une application $f : X \to Y$ est dite* **ouverte*** *lorsque l'image directe par f de tout ouvert $O \subset X$ est un ouvert de Y.*

78.2 Si f est une application linéaire et si l'image de la boule unité ouverte de X est un ouvert de Y, alors f est ouverte.

78.3 Si l'application $f : X \to Y$ est bijective et ouverte, alors l'image directe par f de tout fermé $F \subset X$ est un fermé de Y.

78.4 ✍ *L'application $f : X \to Y$ est un* **homéomorphisme*** *lorsque cette application est une bijection de X sur Y, que cette bijection est continue sur X et que sa bijection réciproque est continue sur Y.*

78.5 Tout homéomorphisme est une application ouverte.

78.6 Si $f : X \to Y$ est un homéomorphisme, alors une partie $K \subset X$ est compacte si, et seulement si, son image $f_*(K)$ est une partie compacte de Y.

79. Soit $f : X \to Y$, une application.

79.1 L'application f est continue au point $x_0 \in X$ si, et seulement si, l'image réciproque par f de tout voisinage de $y_0 = f(x_0)$ est un voisinage de x_0.

79.2 Si l'image réciproque par f de tout ouvert de Y est un ouvert de X, alors l'application f est continue.

79.3 Si l'image réciproque par f de tout fermé de Y est un fermé de X, alors l'application f est continue.

80. Soit K, un compact contenu dans un ouvert U de E.

1.
$$\forall\, x \in K,\ \exists\, \alpha > 0, \quad B_o(x,\alpha) \subset U.$$

2. La fonction $x \mapsto \mathrm{d}(x, U^c)$ est continue sur le compact K et ne s'annule pas, donc

$$\exists\, \alpha > 0,\ \forall\, x \in K, \quad B_o(x,\alpha) \subset U.$$

81. Estimation asymptotique des fonctions uniformément continues

Si $f : E \to F$ est une application uniformément continue, alors il existe deux réels a et b tels que

$$\forall\, x \in E, \qquad \|f(x)\|_F \leqslant a\|x\|_E + b.$$

En particulier, $\|f(x)\|_F = \mathcal{O}(\|x\|_E)$ au voisinage de l'infini.

IV

Étude locale des fonctions

82. On étudie ici des fonctions définies sur une partie d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$, à valeurs dans un espace vectoriel normé $(F, \|\cdot\|_F)$ (ou dans une partie de F).

82.1 On énonce sous une forme assez abstraite (voisinages, fermés, compacts...) des résultats qui généralisent des résultats bien connus pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (où on parle d'intervalles, d'inégalités larges, de segments).

82.2 La notion de ***limite*** généralise la notion de ***continuité***.

IV.1 Topologie relative à une partie

83. La topologie d'un espace vectoriel E permet de définir la continuité d'applications définies sur E.

83.1 Pour étudier une fonction qui n'est définie que sur une *partie* A de E, partie qui n'est en général pas un sous-espace vectoriel de E, il faut définir une topologie sur A qui soit cohérente avec la topologie de E.

83.2 La notion de ***topologie relative à une partie*** nous permettra ainsi d'étendre les notions de ***limite*** et de ***continuité*** aux fonctions qui ne sont définies que sur une partie d'un espace vectoriel.

83.3 Si A n'est pas un sous-espace vectoriel de E, alors la restriction à A de la norme définie sur E n'est pas une norme.
En revanche, la restriction à $A \times A$ de la distance associée à la norme, qui est définie sur $E \times E$, vérifie encore les axiomes des distances [**1.24**]. On peut donc définir naturellement une structure d'espace métrique sur A : c'est précisément la topologie relative à A.

84. Ouverts relatifs à une partie

L'ensemble $\mathcal{T}$ des ouverts de E est la ***topologie*** de E.

84.1 ✍ *Pour toute partie $A \subset E$, on pose*

$$\mathcal{T}_A = \{O \cap A,\ O \in \mathcal{T}\}.$$

84.2 L'ensemble $\mathcal{T}_A$ contient l'ensemble vide $\varnothing$ ainsi que l'ensemble A.

84.3 L'ensemble $\mathcal{T}_A$ est stable par union quelconque et par intersection finie.

84.4 ✍ *L'ensemble $\mathcal{T}_A$ est la* **topologie relative à** *A et ses éléments sont les* **ouverts relatifs à** *A.*

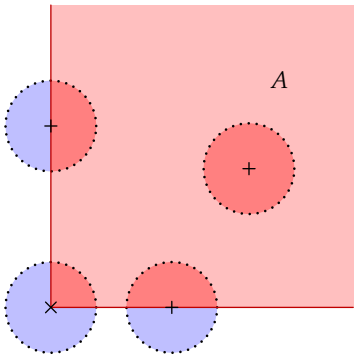
84.5 ➙ *Une partie $U \subset A$ est un ouvert relatif à A si, et seulement si, il existe un ouvert U_0 de E tel que*

$$U = A \cap U_0.$$

85. Voisinages relatifs à une partie
Soit A, une partie de E.
85.1 ✍ *Une partie $V \subset A$ est un* **voisinage de x_0 relatif à A** *lorsqu'il existe un voisinage W de x_0 tel que*

$$V = A \cap W.$$

85.2 ➙ *Une partie $U \subset A$ est un ouvert relatif à A si, et seulement si, cette partie est un voisinage relatif à A de chacun de ses points.*
85.3 En particulier, A est un voisinage relatif à A de chacun de ses points (même si A n'est pas un ouvert).



86. Fermés relatifs à une partie
Soit A, une partie de E.
86.1 ✍ *Le* **complémentaire relatif à A** *d'une partie $F \subset A$ est*

$$A \cap F^c$$

et noté $A \setminus F$.
86.2 ✍ *Une partie $F \subset A$ est un* **fermé relatif à A** *lorsque son complémentaire dans A est un ouvert relatif à A :*

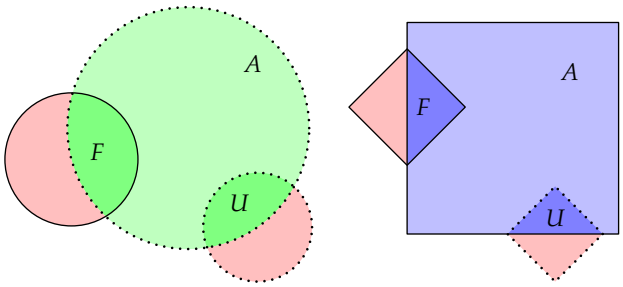
$$A \setminus F \in \mathcal{T}_A.$$

86.3 ➙ *Une partie $F \subset A$ est un fermé relatif à A si, et seulement si, il existe un fermé F_0 de E tel que*

$$F = A \cap F_0.$$

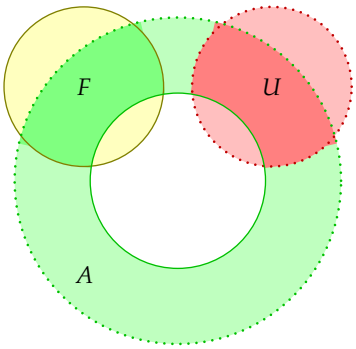
86.4 L'intersection d'une famille quelconque de fermés relatifs à A est un fermé relatif à A.
86.5 L'union d'une famille finie de fermés relatifs à A est un fermé relatif à A.
86.6 ➙ **Caractérisation séquentielle des fermés**
Une partie F de A est un fermé relatif à A si, et seulement si : pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F qui converge vers un élément ℓ qui appartient à A, la limite ℓ appartient encore à F.

87. Si A est un ouvert de E, alors tout ouvert U relatif à A est un ouvert de E, mais un fermé F relatif à A n'est pas nécessairement un fermé de E.



De même, si A est un fermé de E, alors tout fermé F relatif à A est un fermé de E, mais un ouvert U relatif à A n'est pas nécessairement un ouvert de E.

88. Si A n'est ni ouvert, ni fermé, les ouverts relatifs à A ne sont pas nécessairement des ouverts de E et les fermés relatifs à A ne sont pas nécessairement des fermés de A.



IV.2 Limite d'une fonction

89. On considère une fonction f définie sur une partie A de E, à valeurs dans F.
89.1 On note $\mathcal{V}_E(x_0)$, l'ensemble des voisinages de x_0 dans E et $\mathcal{V}_A(x_0)$, l'ensemble des voisinages de x_0 relatifs à A.
89.2 ✍ *Soient $f : A \to F$ et $x_0 \in \overline{A}$. La fonction f* **tend vers $\ell \in F$ au voisinage de x_0** *lorsque*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0, \forall\, x \in A,$$
$$\|x - x_0\|_E \leqslant \eta \implies \|f(x) - \ell\|_F \leqslant \varepsilon.$$

89.3 La fonction $f : A \to F$ tend vers ℓ au voisinage de x_0 si, et seulement si, la fonction

$$\left[h \mapsto \|f(x_0 + h) - \ell\|_F\right]$$

tend vers 0 lorsque $\|h\|_E$ tend vers 0 en vérifiant $x_0 + h \in A$.
89.4 Si la fonction f tend vers ℓ_1 et vers ℓ_2 au voisinage de x_0, alors $\ell_1 = \ell_2$.
89.5 ✍ *Si f tend vers $\ell \in F$ au voisinage de x_0, on dit que ℓ est* **la limite** *de f au voisinage de x_0. On note*

$$\ell = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{\mathcal{V}_A(x_0)} f.$$

90. ➙ **Composition de limites**
On considère trois espaces vectoriels normés E, F et G ; deux fonctions

$$f : A \to F \quad et \quad g : B \to G$$

où $A \subset E$ et $B \subset F$ en supposant que $f_*(A) \subset B$.
Si f tend vers y_0 au voisinage de x_0 et si g tend vers z_0 au voisinage de y_0, alors $(g \circ f)$ tend vers z_0 au voisinage de x_0.

91. Caractérisation séquentielle
Le théorème de composition des limites **[90]** peut être formulé en termes de suites.
91.1 ➙ *On suppose que $f : A \to F$ tend vers b au voisinage de a. Quelle que soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui tend vers a, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers b.*
91.2 ➙ *S'il existe deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui tendent vers a telles que les suites*

$$\left(f(u_n)\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad et \quad \left(f(v_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

ne tendent pas vers la même limite, alors f n'a pas de limite en a.
91.3 Réciproquement, on peut démontrer l'existence d'une limite en ne considérant que des suites. →**[7.5.3]**
91.4 ➙ *On suppose que la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ pour* toute *suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui tend vers x_0. Alors f tend vers ℓ au voisinage de x_0.*
91.5 ➙ *Soit $x_0 \in E$, un point adhérent à A.*
La fonction $f : A \to F$ admet une limite $\ell \in F$ au voisinage de x_0 si, et seulement si, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour toute *suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui tend vers x_0.* →**[1.76]**

Limite selon une partie

92. Soient $f : A \to F$, $P \subset A$ et x_0, un point adhérent à P.
92.1 ✍ *La fonction f admet une* **limite en x_0 selon P** *lorsque la restriction $f_{|P} : P \to F$ admet une limite en x_0, qui est alors notée*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in P}} f(x).$$

92.2 Si $f : A \to F$ admet une limite en x_0, alors f admet une limite en x_0 selon P et

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in P}} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

92.3 La fonction f admet une limite en x_0 selon P si, et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de P qui converge vers x_0, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

93. Limites latérales
On revient au cas d'une fonction f définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ pour reformuler des notions familières en termes abstraits.
93.1 ✍ *Soit x_0, un point adhérent à $I \subset \mathbb{R}$.*
La fonction f admet une **limite à gauche** *en x_0, notée $f(x_0-)$, lorsqu'elle admet une limite en x_0 selon $P = I \cap]-\infty, x_0[$.*
La fonction f admet une **limite à droite** *en x_0, notée $f(x_0+)$, lorsqu'elle admet une limite en x_0 selon $P = I \cap]x_0, +\infty[$.*
93.2 ✍ *Soit $x_0 \in I \subset \mathbb{R}$.*
Une fonction définie sur I est **continue à gauche** *en x_0 lorsqu'elle admet une limite en x_0 selon $P = I \cap]-\infty, x_0]$.*
Cette fonction est **continue à droite** *en x_0 lorsqu'elle admet une limite en x_0 selon $P = I \cap [x_0, +\infty[$.*
93.3 Une fonction $f : [a, b] \to E$ est continue en a (resp. en b) si, et seulement si, elle est continue à droite en a (resp. continue à gauche en b).

Continuité et topologie relative

94. Deux espaces vectoriels normés E et F étant donnés, on considère une fonction f, définie sur une partie A de E, à valeurs dans F.
94.1 Si $x_0 \in A$ et si f tend vers ℓ au voisinage de x_0, alors il faut que $\ell = f(x_0)$.
94.2 ✍ *La fonction $f : A \to F$ est* **continue en** *x_0 lorsque $x_0 \in A$ et qu'elle admet une limite au voisinage de x_0.*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0, \forall\, x \in A,\quad \|x - x_0\|_E \leqslant \eta \implies \big\|f(x) - f(x_0)\big\|_F \leqslant \varepsilon.$$

94.3 ✍ *Une fonction $f : A \to F$ est* **continue (sur A)** *lorsqu'elle est continue en chaque point $x_0 \in A$.*
94.4 Si la fonction $f : A \to F$ est continue, alors la fonction $\|f\| : A \to \mathbb{R}$ est continue.
95. ✍ *La fonction $f : A \to F$ est* **uniformément continue** *si, et seulement si,*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0, \forall\, (x, y) \in A \times A,\quad \|x - y\|_E \leqslant \eta \implies \big\|f(x) - f(y)\big\|_F \leqslant \varepsilon.$$

96. Continuité et compacité
Tous les théorèmes reliant les applications continues (définies sur l'espace E tout entier) et la compacité s'étendent, sans modification, aux fonctions définies sur une partie A de E.
96.1 ➙ *Si la fonction $f : A \to F$ est continue et si K est une partie compacte de E contenue dans A, alors $f_*(K)$ est une partie compacte de l'espace F.*
96.2 ➙ *Suite de* **[96.1]** *– Si $F = \mathbb{R}$, alors f est bornée et atteint ses bornes : elle atteint un maximum et un minimum.*
Plus généralement, la fonction f est bornée et il existe x_m et x_M dans K tels que

$$\forall\, x \in K,\quad \big\|f(x_m)\big\| \leqslant \big\|f(x)\big\| \leqslant \big\|f(x_M)\big\|.$$

96.3 La fonction inverse $[t \mapsto 1/t]$ est continue sur $A =]0, +\infty[$. La partie $K = A \cap [0, 1]$ est bornée et fermée relativement à A, mais ce n'est pas une partie compacte de $E = \mathbb{R}$ contenue dans A, ni un compact relatif à A.
96.4 ➙ *Si $K \subset E$ est une partie compacte et si la fonction $f : K \to F$ est continue, alors f est uniformément continue.*
97. Soit $f : X \to Y$, une application continue. On suppose que l'image de f est contenue dans une partie $B \subset Y$:

$$\forall\, x \in X,\qquad f(x) \in B.$$

Alors $f : X \to B$ est continue pour la topologie relative à B.
98. Continuité et restriction
Soient $f : X \to Y$; A, une partie de X et

$$f_A : A \to Y,$$

la restriction de f à A.
98.1 Si f est continue en un point $a \in A$, alors f_A est aussi continue au point a (pour la topologie relative à A).
98.2 Si f_A est continue en un point $a \in A$ et si A est un voisinage de a (pour la topologie de X), alors l'application f est continue au point a.
98.3 L'application $f = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas continue en 0, alors que la restriction de f à l'intervalle $A = [0, +\infty[$ est continue en 0.
99. Fonction définie par morceaux
99.1 On considère deux applications continues

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

et on définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant

$$\forall\, x \leqslant 0,\quad f(x) = g(x) \quad \text{et} \quad \forall\, x > 0,\quad f(x) = h(x).$$

1. L'application f est continue sur $\mathbb{R}^*$, continue à gauche en 0 et admet une limite finie à droite en 0.
2. L'application f est continue sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $g(0) = h(0)$.

99.2 Soit A, une partie de X. On considère deux applications continues

$$g : X \to Y \qquad \text{et} \qquad h : X \to Y$$

et on définit $f : X \to Y$ en posant

$$\forall\, x \in A,\quad f(x) = g(x) \quad \text{et} \quad \forall\, x \in A^c,\quad f(x) = h(x).$$

3. L'application f est continue sur l'ouvert

$$A^\circ \cup (A^c)^\circ.$$

Si

$$\forall\, x \in \overline{(A^c)} \cap \overline{A},\quad g(x) = h(x),$$

alors f est continue sur X.

Prolongement par continuité

100. Considérons une fonction $f : A \to F$, où $A \subset E$.
100.1 On considère une partie B telle que $A \subsetneq B \subset E$. Définir un ***prolongement*** de f à B consiste à définir les valeurs de $f(x)$ pour $x \in B \setminus A$.
100.2 Si la fonction f est continue sur A, il est intéressant de définir un prolongement de f qui soit continu sur B, c'est-à-dire **[58]** continue en chaque point de B. Il s'agit alors d'étudier la continuité d'une fonction définie par morceaux : le prolongement est défini d'une part sur A et d'autre part sur $B \setminus A$.
100.3 L'adhérence de la partie ouverte de $\mathbb{C}$ définie par

$$A = [1 < |z| < 2] \cap [\mathfrak{Im}(z) \neq 0]$$

est la couronne

$$B = [1 \leqslant |z| \leqslant 2].$$

La détermination principale de l'argument $f : A \to \mathbb{R}$, définie par

$$\forall\, z \in A,\quad f(z) = \mathrm{Arg}(z),$$

est continue sur A mais n'admet pas de prolongement continu sur B.

101. Prolongement en un point
Soient $x_0 \notin A$, un point de E adhérent à A et $A_0 = A \cup \{x_0\}$.
101.1↦ *Une fonction $f : A \to F$ admet une limite au voisinage de x_0 si, et seulement si, il existe un prolongement $f_0 : A_0 \to F$ de f qui est continu en x_0. Dans ce cas,*

$$f_0(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

101.2 Dérivabilité du prolongement
Il ne faut surtout pas confondre la *dérivabilité du prolongement* f_0 (qui est un problème à résoudre) avec l'opération hasardeuse qui consisterait à *prolonger la dérivée de f*, opération dont le résultat risque de ne pas avoir de sens.
101.3 Considérons une fonction dérivable f de $I \subset \mathbb{R}$ dans E et un point x_0 adhérent à I.
Si la fonction f est prolongée en une fonction f_0 continue sur $I_0 = I \cup \{x_0\}$,

— ou bien ce prolongement est dérivable en x_0 et, dans ce cas, la dérivée de f_0 est définie au point x_0 ;
— ou bien ce prolongement n'est pas dérivable en x_0 : dans ce cas, la dérivée de f_0 n'est pas définie au point x_0 et si on cherche à prolonger la dérivée f_0' au point x_0, alors le prolongement qu'on obtiendra ne sera pas la dérivée de f_0.

101.4 Le prolongement f_0 est dérivable en x_0 si, et seulement si, il existe $a \in E$ tel que

$$f_0(x) = f_0(x_0) + (x - x_0) \cdot a + o(x - x_0)$$

lorsque x est voisin de x_0.

IV.3 Extensions de la notion de limite

102. Voisinages d'un point à l'infini
102.1✍ *Une partie V de $\mathbb{N}$ est un* **voisinage de $+\infty$ dans $\mathbb{N}$** *lorsque*

$$\exists\, N_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant N_0, \quad n \in V.$$

102.2 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$ si, et seulement si,

$$\forall\, W \in \mathscr{V}_E(\ell),\ \exists\, V \in \mathscr{V}_{\mathbb{N}}(+\infty),\ \forall\, n \in V, \quad u_n \in W.$$

102.3✍ *Une partie V de $\mathbb{Z}$ est un* **voisinage de $+\infty$ dans $\mathbb{Z}$** *lorsque*

$$\exists\, N_0 \in \mathbb{Z},\ \forall\, n \geqslant N_0, \quad n \in V.$$

De même, une partie V de $\mathbb{Z}$ est un **voisinage de $-\infty$ dans $\mathbb{Z}$** *lorsqu'il existe $N_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $n \in V$ pour tout $n \leqslant N_0$.*
102.4✍ *Une partie V de $\mathbb{R}$ est un* **voisinage de $+\infty$ dans $\mathbb{R}$** *lorsque*

$$\exists\, A \in \mathbb{R}, \quad [A, +\infty[\subset V.$$

C'est un **voisinage de $-\infty$** *lorsque*

$$\exists\, B \in \mathbb{R}, \quad]-\infty, B] \subset V.$$

102.5✍ *Une partie V de E est un* **voisinage de l'infini dans E** *lorsque son complémentaire V^c est borné.*
102.6↦ *Une partie V de E est un voisinage de l'infini si, et seulement si,*

$$\exists\, A \in \mathbb{R}_+, \quad \big(\|x\| \geqslant A \implies x \in V\big)$$

103. On considère $f : A \to F$.
103.1 La définition générale **[103.2]** de la notion de limite au voisinage de x_0 couvre le cas ordinaire pour lequel

$$x_0 \in \overline{A} \subset E \quad \text{et} \quad \omega \in F$$

mais aussi les cas suivants :

— pour $x_0 = \pm\infty$ si A est un voisinage de $\pm\infty$ dans $\mathbb{R}$
— pour $x_0 = \infty$ si A est une partie non bornée de E ;
— pour $\omega = \pm\infty$ (si $F = \mathbb{R}$) ou $\omega = \infty$
— ainsi que le cas d'une **suite**, de limite finie ou infinie, pour $x_0 = +\infty$ en prenant pour A un voisinage de $+\infty$ dans $\mathbb{N}$.

103.2✍ *La fonction f* **tend vers ω_0 au voisinage de x_0** *lorsque*

$$\forall\, W \in \mathscr{V}_F(\omega_0), \quad [f \in W] \in \mathscr{V}_A(x_0).$$

103.3 Soit $x_0 \in \overline{A}$: le point x_0 est en particulier un vecteur de E. Dans ce cas, la fonction f tend vers l'infini au voisinage de x_0 si, et seulement si, $\|f(x_0 + h)\|_F$ tend vers $+\infty$ lorsque $\|h\|_E$ tend vers 0 sous la contrainte $x_0 + h \in A$.
103.4 On a défini des voisinages de l'infini (dans $\mathbb{R}$, dans tout espace vectoriel normé ou relatifs à une partie) qui vérifient les mêmes propriétés filtrantes **[14]** que les voisinages d'un point quelconque de l'espace et qui séparent aussi les points.
L'*unicité de la limite* ainsi que le théorème de *composition des limites* sont donc encore de mise.
En revanche, la notion de *prolongement par continuité* n'a plus de sens ici.

104. Exemples de limites à l'infini
104.1 L'expression $(x + y)e^{-(x^2+y^2)}$ tend vers 0 au voisinage de l'infini dans $\mathbb{R}^2$.
104.2 L'expression $x^4 + y^2$ tend vers $+\infty$ et le quotient

$$\frac{x^2 + y^2}{2x^4 + y^4}$$

tend vers 0 au voisinage de l'infini dans $\mathbb{R}^2$.
104.3 L'expression $x^2\,\ell n(x^4 + y^2)$ n'est pas bornée, mais ne tend pas vers $+\infty$ au voisinage de l'infini.
104.4 L'expression $x^2 y + y\,\ell n^2 y$, définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, ne tend pas vers $+\infty$ au voisinage de l'infini.

Entraînement

105. Questions pour réfléchir
1. La partie $A \cap (x_0 + V)$ est un voisinage de x_0 relatif à A si, et seulement si, V est un voisinage de 0_E.
2. Décrire les intervalles de $\mathbb{R}$ qui sont des ouverts relatifs à A (resp. des fermés relatifs à A) dans chacun des cas suivants : $A = [0, +\infty[$, $A =]0, 1[$, $A = [-1, 1]$.
3. Un ouvert relatif à A est-il un ouvert de E ? Et si A est un ouvert de E ?
4. Un fermé relatif à A est-il un fermé de E ? Et si A est un fermé de E ?
5. On considère $\mathbb{N}$ comme une partie de $\mathbb{R}$. Toute partie de $\mathbb{N}$ est à la fois un ouvert et un fermé relatif à $\mathbb{N}$.
6. Si K est un compact de E et si F est un fermé relatif à K, la partie F est un compact de E.
7. Si K_0 est un compact de E, la partie $K = A \cap K_0$ est-elle un compact pour la topologie relative à A ?
8. *Suite de* **[89.2]** – Pourquoi suppose-t-on que $x_0 \in \overline{A}$?
9. *Suite de* **[89.2]** – Soit $B = f_*(A) \subset F$, l'image de A par f. La limite ℓ est un point adhérent à B.
10. *Suite de* **[91.1]** – Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles convergentes ? →**[103.4]**
11. Si la fonction $f : A \to F$ est continue en x_0, alors il existe un voisinage $V \in \mathscr{V}_A(x_0)$ tel que f soit bornée sur V.
12. *Suite de* **[92]** – Si $P \subset A$ et si x_0 est adhérent à P, alors x_0 est adhérent à A.
13. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et g, la restriction de f à $[0, +\infty[$. Comparer la continuité de f en 0 et la continuité de g en 0.
14. On suppose que $P \cup Q = A$ et que x_0 est un point adhérent à P et à Q. Si f admet la même limite en x_0 suivant P et Q, admet-elle une limite en x_0 ?
15. L'ensemble des fonctions uniformément continues de A dans F est un espace vectoriel.
16. Une fonction lipschitzienne sur A est uniformément continue sur A.
17. Une fonction uniformément continue sur la partie $A \subset E$ est continue sur A.
18. Soit $f : A \to F$ avec $A \subset E$. Condition sur A pour que f soit prolongeable en une application de E dans F ?
19. Soient $f : A \to F$, une fonction continue ; $A \subsetneq B \subset E$, une partie de E et $g : B \to F$, un prolongement de f.

19.a Le prolongement g est-il nécessairement continu sur B ?
19.b Est-il nécessairement continu sur A ?
19.c On suppose que $A =]-1,1[$ et $B = [-2,2]$ et que

$$\forall\, t \in A, \qquad f(t) = 1.$$

Si on impose

$$g(\pm 1) = \lim_{\substack{t \to \pm 1 \\ t \in A}} f(t),$$

le prolongement g est-il nécessairement continu sur A ?
20. Condition pour qu'une fonction $f : \mathbb{R}^* \to E$ admette un prolongement continu sur $\mathbb{R}$.
21. La fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ pour tout $x > 0$ et par $f(x) = -1$ pour tout $x < 0$ est dérivable. Elle n'admet pas de prolongement continu sur $\mathbb{R}$, mais sa dérivée admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}$.
22.a $V \in \mathscr{V}_{\mathbb{R}}(+\infty) \iff \exists\, A > 0, \quad]A, +\infty[\subset V$
22.b $V \in \mathscr{V}_{\mathbb{R}}(-\infty) \iff \exists\, B < 0, \quad]-\infty, B[\subset V$

106. Soit

$$V = \big\{ A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \,:\, A.A^{\top}.A = A \big\}.$$

106.1 Le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est contenu dans V.
106.2 Que dire des matrices inversibles $A \in V$?
106.3 Le groupe orthogonal est ouvert et fermé pour la topologie relative à V.

107. Soient $f : X \to Y$, une application bijective et continue et C, une partie compacte de X. La bijection réciproque de f est notée g.
107.1 L'ensemble $K = f_*(C)$ est une partie compacte de Y.
107.2 L'application g réalise une bijection de K sur C.
107.3 Soit F, une partie fermée relative à C.
1. L'ensemble $f_*(F)$ est une partie fermée de Y contenue dans K.
2. L'ensemble $g^*(F)$ est une partie fermée relative à K.
107.4 La restriction de g à K est continue **[79.3]**.

108. Adhérence relative à une partie
L'***adhérence de*** X ***relative à*** A est, par définition, égale à $\overline{X} \cap A$.
1. L'adhérence de X relative à A est le plus petit fermé relatif à A qui contient X.
2. Condition sur A pour que l'adhérence de X relative à A soit une partie fermée de E.

V

Connexité par arcs

109. On généralise ici la notion d'intervalle considéré comme une partie d'un seul tenant, afin de formuler un analogue du théorème des valeurs intermédiaires en dimension quelconque.
109.1 ✍ *Un* **arc** *de A reliant $x_1 \in A$ à $x_2 \in A$ est une fonction continue*

$$f : [a,b] \to A$$

telle que $f(a) = x_1$ et $f(b) = x_2$.
109.2 ✍ *Une partie $A \subset E$ est* **connexe par arcs** *lorsque, pour tout $(x_1, x_2) \in A \times A$, il existe un arc de A reliant x_1 à x_2.*

110. Exemples usuels
110.1 Les parties étoilées, et en particulier les parties convexes, sont connexes par arcs.
110.2 ➙ *Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.*

Théorème des valeurs intermédiaires

111. On sait que l'image d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ par une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

112. ➙ *Si A est une partie connexe par arcs et si $f : A \to F$ est continue, alors $f_*(A)$ est connexe par arcs.*

113. ▷ *Si A est une partie connexe par arcs et si $f : A \to \mathbb{R}$ est continue, alors $f_*(A)$ est un intervalle.*

Composantes connexes par arcs

114. Soit $A \subset E$, une partie non vide. Quels que soient les points x_0 et x_1 dans A, on note $x_0 \sim x_1$ lorsqu'il existe un arc de A reliant x_0 à x_1. →**[109.1]**
114.1 ➙ *La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur les points de l'ensemble A.*
114.2 La partie A est connexe par arcs si, et seulement si, il n'existe qu'une seule classe d'équivalence pour $\sim$.
114.3 Les classes d'équivalence pour $\sim$ sont connexes par arcs.
114.4 ✍ *Les* **composantes connexes par arcs** *d'une partie $A \subset E$ sont les classes d'équivalence de la relation d'équivalence $\sim$.*

Entraînement

115. Questions pour réfléchir

116. Sur le théorème des valeurs intermédiaires
1. Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue et si $f(0) = -f(1) = 1$, alors il existe $0 < x_0 < 1$ tel que $f(x_0) = 0$.
2. La fonction $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ définie par $f(t) = e^{i\pi t}$ est continue et $f(0) = -f(1) = 1$, alors que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Commenter.

117. On considère une application

$$M : \mathbb{R} \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$$

telle que, quels que soient les indices $1 \leqslant i, j \leqslant n$, l'application $M_{i,j} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue. On suppose que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad M(t).M(t) = M(t).$$

Alors le rang de $M(t)$ est indépendant de $t \in \mathbb{R}$.

118. Soit $D \subset \mathbb{C}$, une partie connexe par arcs. On suppose qu'il existe deux applications continues

$$\varphi : D \to \mathbb{C} \qquad \text{et} \qquad \psi : D \to \mathbb{C}$$

telles que

$$\forall\, z \in D, \qquad \exp[\varphi(z)] = \exp[\psi(z)].$$

Alors la différence $\varphi - \psi$ est constante sur D.

119. Soient $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, une application continue et $\mathscr{C}$, un cercle de rayon $R > 0$. Il existe deux points A et B, diamétralement opposés sur $\mathscr{C}$, tels que $g(A) = g(B)$.

120. Les composantes connexes par arcs d'un ouvert sont des parties ouvertes.

121. On suppose que A est une partie de $E = \mathbb{R}$.
121.1 Les composantes connexes par arcs de A sont des intervalles.
121.2 Tout ouvert $A \subset \mathbb{R}$ est l'union d'une famille finie ou dénombrable d'intervalles ouverts.
121.3 Les composantes connexes par arcs de $A = \mathbb{Q}$ sont des singletons.
121.4 Un fermé tel que l'***ensemble de Cantor*** n'est pas l'union d'une famille dénombrable d'intervalles fermés.

122. Connexité de la sphère unité
Soit E, un espace vectoriel normé de dimension supérieure à 2. On note S, la sphère unité de E.
1. Soit $a \in S$. Il existe $b \in S$ tel que $a \neq b$ et $a \neq -b$. Pour un tel b, la fonction

$$t \mapsto \frac{(1-t)a + tb}{\|(1-t)a + tb\|}$$

est continue de $[0,1]$ dans S.
2. La sphère unité S est connexe par arcs.
3. Le complémentaire de la boule unité fermée est connexe par arcs.
4. Dans $\mathbb{R}^2$, le complémentaire d'un ensemble fini est connexe par arcs.

VI

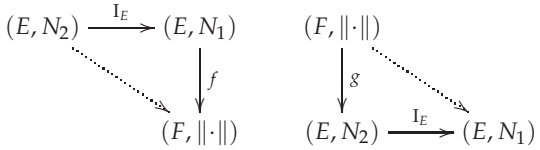
Comparaison des normes

123. Un même espace vectoriel E peut être muni de différentes normes et deux normes distinctes sur un même espace vectoriel définissent *a priori* deux topologies différentes. On n'étudie ici que les conséquences d'un changement de norme qui ne modifie pas la topologie de E.

Domination

124. La norme N_1 est dominée par N_2 si, et seulement si, l'application $\mathrm{I}_E : (E, N_2) \to (E, N_1)$ est lipschitzienne.

125. Comparaison des topologies
On suppose que la norme N_1 est dominée par la norme N_2.
125.1 Toute partie bornée pour N_2 est bornée pour N_1.
125.2 Toute application $f : X \to E$ qui est bornée pour N_2 est aussi bornée pour N_1.
125.3 Si V est un voisinage de x_0 pour N_1, alors V est aussi un voisinage de x_0 pour N_2.
125.4 Toute partie U de E qui est ouverte pour la norme N_1 est aussi ouverte pour la norme N_2.
125.5 L'intérieur de A pour la norme N_1 est contenu dans l'intérieur de A pour la norme N_2.
125.6 Si $N_2(x_n)$ tend vers 0, alors $N_1(x_n)$ tend vers 0.
125.7 Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ pour la norme N_2, alors elle converge aussi vers ℓ pour la norme N_1.
125.8 Toute partie F de E qui est fermée pour la norme N_1 est aussi fermée pour la norme N_2.
125.9 L'adhérence de A pour la norme N_1 contient l'adhérence de A pour la norme N_2.
125.10
1. Si f est lipschitzienne de (E, N_1) dans $(F, \|\cdot\|)$, alors f est lipschitzienne de (E, N_2) dans $(F, \|\cdot\|)$.
2. Si g est lipschitzienne de $(F, \|\cdot\|)$ dans (E, N_2), alors g est lipschitzienne de $(F, \|\cdot\|)$ dans (E, N_1).



125.11
1. Si f est continue de (E, N_1) dans $(F, \|\cdot\|)$, alors f est continue de (E, N_2) dans $(F, \|\cdot\|)$.
2. Si g est continue de $(F, \|\cdot\|)$ dans (E, N_2), alors g est continue de $(F, \|\cdot\|)$ dans (E, N_1).

Normes équivalentes

126.1 La norme N_2 est équivalente à la norme N_1 si, et seulement si, la norme N_1 est équivalente à la norme N_2.
126.2 Les normes N_1 et N_2 sont équivalentes si, et seulement si, N_1 est dominée par N_2 et N_2 est dominée par N_1.
126.3 Les normes N_1 et N_2 sont équivalentes si, et seulement si, l'application $\mathrm{I}_E : (E, N_1) \to (E, N_2)$ est lipschitzienne ainsi que sa réciproque $\mathrm{I}_E : (E, N_2) \to (E, N_1)$.

127. Comparaison des topologies
On suppose que les normes N_1 et N_2 sont équivalentes.
127.1 Une partie $A \subset E$ est bornée pour N_1 si, et seulement si, elle est bornée pour N_2.
127.2 Une partie $V \subset E$ est un voisinage de $x_0 \in E$ pour N_1 si, et seulement si, c'est un voisinage de x_0 pour N_2.
127.3 Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour N_1 si, et seulement si, elle converge pour N_2 et, dans ce cas, sa limite est la même pour les deux normes.
127.4 Une partie F de E est fermée pour la norme N_1 si, et seulement si, elle est fermée pour la norme N_2.
127.5 Les parties ouvertes pour N_1 et les parties ouvertes pour N_2 sont les mêmes.
127.6 L'intérieur d'une partie A est le même pour les deux normes N_1 et N_2.
127.7 L'adhérence d'une partie A est la même pour les deux normes N_1 et N_2.
127.8 Une partie de E est compacte pour N_1 si, et seulement si, elle est compacte pour N_2.
127.9 Une application $f : (E, N_1) \to (F, \|\cdot\|)$ est lipschitzienne si, et seulement si, $f : (E, N_2) \to (F, \|\cdot\|)$ est lipschitzienne.
127.10 Une application $g : (F, \|\cdot\|) \to (E, N_1)$ est lipschitzienne si, et seulement si, $g : (F, \|\cdot\|) \to (E, N_2)$ est lipschitzienne.
127.11 Une application $f : (E, N_1) \to (F, \|\cdot\|)$ est continue si, et seulement si, $f : (E, N_2) \to (F, \|\cdot\|)$ est continue.
127.12 Une application $g : (F, \|\cdot\|) \to (E, N_1)$ est continue si, et seulement si, $g : (F, \|\cdot\|) \to (E, N_2)$ est continue.

Entraînement

128. Questions pour réfléchir
1. La norme N_1 est dominée par N_2 si, et seulement si, la boule unité $B^1(N_2)$ pour la norme N_2 est une partie bornée pour la norme N_1.
2. Si la norme N_1 est dominée par N_2 sans être équivalente à N_2, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge pour la norme N_1 et qui diverge pour la norme N_2.
3. Les trois normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes sur $\ell^1(\mathbb{R})$?
4. Construire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une fonction f_n continue et affine par morceaux sur $[0,1]$ telle que

$$\|f_n\|_\infty = n, \quad \|f_n\|_1 = C, \quad \|f_n\|_2 \underset{n\to+\infty}{=} \Theta(\sqrt{n}).$$

Que peut-on en déduire ?

129. Sur $\mathscr{C}^0([a,b])$
Pour toute fonction f continue sur $[a,b]$,

$$\|f\|_1 \leqslant \sqrt{b-a}\|f\|_2 \quad \text{et} \quad \|f\|_2 \leqslant \sqrt{b-a}\|f\|_\infty.$$

130. Normes sur un espace de suites [1.40]
On note V, l'espace des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.
1. Comparer les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur V.
2. On considère V comme un sous-espace de $\ell^\infty(\mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. L'intérieur de V est vide et son adhérence est l'espace des suites de limite nulle (en particulier, V n'est pas fermé).

131. On considère un espace vectoriel E sur lequel sont définies deux normes N_1 et N_2.
1. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $N_1(x) < 1$ pour tout $x \in E$ tel que $N_2(x) < \alpha$. Alors

$$\forall\, x \neq 0_E,\ \forall\, \lambda > \frac{N_2(x)}{\alpha}, \quad N_1(x) < \lambda$$

et

$$\forall\, x \in E, \quad N_1(x) \leqslant \frac{1}{\alpha} N_2(x).$$

2. Si la boule unité ouverte de E pour la norme N_1 est aussi une partie ouverte pour la norme N_2, alors la norme N_1 est dominée par la norme N_2.
3. On suppose qu'une partie quelconque de E est ouverte pour la norme N_1 si, et seulement si, elle est ouverte pour la norme N_2. Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

132. *Suite de* **[1.111]** – On suppose que la constante de Lipschitz optimale de $f : (E, N_1) \to (F, \|\cdot\|)$ est égale à k.
1. Étudier les valeurs possibles pour la constante optimale de Lipschitz pour $f : (E, N_2) \to (F, \|\cdot\|)$.
2. Exemple de fonction pour laquelle la constante de Lipschitz optimale est indépendante de la norme choisie ?

Questions, exercices & problèmes

Perfectionnement

133. Exemples et contre-exemples

1. Exemple de suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties ouvertes dont l'intersection n'est pas un ouvert.
2. Exemple de suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties fermées dont la réunion n'est pas un fermé.
3. Exemples de parties qui ne sont ni ouvertes, ni fermées.
4. Exemples de parties qui sont à la fois ouvertes et fermées.
5. Exemples de parties non compactes de $\mathbb{R}$.
6. Exemple de suite divergente qui n'admet qu'une seule valeur d'adhérence.

7.a Exemple de partie fermée qui n'est pas complète.

7.b Exemple de partie complète qui n'est pas compacte.

8. Exemple d'application continue qui n'est pas uniformément continue.
9. Exemple d'application qui est uniformément continue sans être lipschitzienne.
10. Exemple d'ouvert relatif à un fermé A de E qui soit un fermé de E.
11. Exemple de fermé relatif à un ouvert A de E qui soit un ouvert de E.

134. Questions pour réfléchir

1. Condition sur a, b, r et s pour que

1.a $B_f(b,s) \subset B_f(a,r)$;

1.b $B_f(b,s) \cap B_f(a,r) = \varnothing$;

1.c $B_f(b,s) \subset B_o(a,r)$;

1.d $B_o(b,s) \subset B_f(a,r)$;

1.e $B_o(a,r) \cap B_f(b,s) = \varnothing$.

2. Comparer $\overline{A\cap B}$ et $\overline{A}\cap\overline{B}$; $\overline{A\cup B}$ et $\overline{A}\cup\overline{B}$.
3. Comparer $(A\cap B)^\circ$ et $A^\circ\cap B^\circ$; $(A\cup B)^\circ$ et $A^\circ\cup B^\circ$.
4. Si $f : A \to F$ est continue et si K est un compact de E, la partie $f_*(K\cap A)$ de F est-elle compacte ?
5. Soient $A \subset E$ et $f : A \to F$, une fonction continue. L'image réciproque par f de tout ouvert (resp. de tout fermé) de F est un ouvert relatif à A (resp. un fermé relatif à A). Réciproque ?
6. On considère l'espace E des fonctions continues, intégrables et de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

6.a Construire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une fonction $f_n \in E$ telle que

$$\|f_n\|_1 = 1 \quad \text{et} \quad \|f_n\|_2 \underset{n\to+\infty}{=} \Theta(\sqrt{n}).$$

6.b Construire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une fonction $g_n \in E$ telle que

$$\|g_n\|_1 \underset{n\to+\infty}{=} \Theta(\sqrt{n}) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \|g_n\|_2 = 0.$$

135. Conséquences de l'inégalité triangulaire

135.1 Si A est une sphère ou une boule (ouverte ou fermée) de rayon r, alors A est une partie bornée de diamètre $2r$.

135.2 Les boules (ouvertes ou fermées) sont convexes.

135.3 Soient $0 < s \leqslant r$.

1. $d(a,b) \leqslant r - s \iff B_o(b,s) \subset B_o(a,r)$
2. $d(a,b) \geqslant r + s \iff B_o(b,s) \cap B_o(a,r) = \varnothing$

136.1 Soient M et N, deux matrices semblables. Alors les matrices $P(M)$ et $P(N)$ sont semblables, quel que soit le polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$.

136.2 Soient A, une matrice diagonalisable et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de matrices qui converge vers la matrice B.

1. Si toutes les matrices B_n sont semblables à A, alors la limite B est aussi diagonalisable et même semblable à A.
2. Ce résultat subsiste-t-il si la matrice A n'est pas diagonalisable ?

Approfondissement

137. Caractérisation des normes euclidiennes

Soit E, un espace vectoriel réel muni d'une norme $\|\cdot\|$.

137.1 Identité du parallélogramme

Si la norme $\|\cdot\|$ est associée à un produit scalaire, alors

$$(1) \qquad \forall\, x,y \in E, \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

et l'application

$$\varphi \,:\, E\times E \to \mathbb{R}$$

définie par

$$(2) \qquad \forall\, (x,y) \in E\times E, \quad \varphi(x,y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$$

est un produit scalaire sur E.

137.2 Quelle que soit la norme $\|\cdot\|$ définie sur E, l'application φ définie par (2) est symétrique et

$$\forall\, x \in E, \quad \varphi(x,0_E) = \varphi(0_E,x) = 0.$$

De plus,

$$\forall\, x \in E, \quad \varphi(x,x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \varphi(x) = 0 \iff x = 0_E$$

et, quel que soit $y \in E$, l'application

$$[x \mapsto \varphi(x,y)]$$

est continue sur E.

137.3 Si la norme $\|\cdot\|$ vérifie l'identité du parallélogramme (1), alors

$$\forall\, u,v,y \in E, \quad \varphi(u,y) + \varphi(v,y) = \varphi(u+v,y).$$

On en déduit que l'application φ est un produit scalaire sur E. (Cf JORDAN, Pascual et NEUMANN, J. von. On inner products in linear, metric spaces. *Annals of Mathematics*, 1935, vol. 36, no 3, p. 719-723.)

138. Classification des hyperplans

138.1 Soit H, un hyperplan de E.

1. L'adhérence $\overline{H}$ de H est un sous-espace vectoriel de E tel que $H \subset \overline{H} \subset E$.
2. Si $a \in \overline{H} \setminus H$, alors $E = H \oplus \mathbb{K}\cdot a \subset \overline{H}$.

138.2 * *Un hyperplan de E est une partie fermée ou une partie dense dans E.*

138.3 Soit f, une forme linéaire non nulle sur E.

3. L'application f est continue si, et seulement si, son noyau est fermé.
4. On suppose maintenant que f est continue. →**[1.98]**

4.a Les images réciproques $[f > 0]$ et $[f < 0]$ sont des ouverts connexes par arcs, mais leur réunion $[f \neq 0]$ est un ouvert qui n'est pas connexe par arcs.

4.b

$$\forall\, x \in E, \quad d(x, \operatorname{Ker} f) = \frac{|f(x)|}{|||f|||}.$$

139. Si $h \in \mathscr{L}^1([a,b])$ vérifie

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \int_a^b t^n h(t)\,\mathrm{d}t = 0,$$

alors on peut déduire du Théorème de Weierstrass que

$$\forall\, \varphi \in \mathscr{C}^0([a,b]), \quad \int_a^b \varphi(t)h(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

et h est nulle presque partout sur $[a,b]$.

Pour aller plus loin

140. Si q est une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^3$, alors $q(M)$ tend vers $+\infty$ lorsque M tend vers l'infini dans $\mathbb{R}^3$.

141. Caractérisations de la continuité en un point
Les propositions suivantes sont équivalentes au fait que l'application $f : E \to F$ est continue au point $x_0 \in E$.

1. $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0, \quad f_*\big(B_f(x_0,\eta)\big) \subset B_f\big(f(x_0),\varepsilon\big)$
2. $\forall\, W \in \mathscr{V}_F\big(f(x_0)\big),\ \exists\, V \in \mathscr{V}_E(x_0), \quad f_*(V) \subset W$
3. $\forall\, W \in \mathscr{V}_F\big(f(x_0)\big), \quad [f \in W] \in \mathscr{V}_E(x_0)$

142. Continuité uniforme
142.1 Une partie V est un voisinage de $x_0 \in E$ si, et seulement si, il existe un voisinage V_0 de 0_E tel que

$$V = x_0 + V_0 = \big\{x_0 + x,\ x \in V_0\big\}.$$

142.2 L'application $f : E \to F$ est continue au point x_0 si, et seulement si :

$$\forall\, W \in \mathscr{V}_F\big(f(x_0)\big), \quad [f \in W] \in \mathscr{V}_A(x_0)$$

ce qui équivaut à :

$$\forall\, W \in \mathscr{V}_F\big(f(x_0)\big),\ \exists\, V \in \mathscr{V}_E(0_E), \quad f_*(x_0 + V) \subset W.$$

Le voisinage V dépend bien sûr du voisinage W choisi, mais aussi du point x_0 considéré.
142.3 L'application $f : E \to F$ est uniformément continue lorsque

$$\forall\, W_0 \in \mathscr{V}_F(0_F),\ \exists\, V \in \mathscr{V}_E(0_E), \forall\, x_0 \in E, \quad f_*(x_0 + V) \subset \big(f(x_0) + W_0\big).$$

143. Applications localement lipschitziennes
Une fonction $f : E \to F$ est ***localement lipschitzienne*** lorsque, pour tout $x_0 \in E$, il existe un voisinage V de x_0 sur lequel f est lipschitzienne.

1. Exemples d'applications localement lipschitziennes.
2. Une application localement lipschitzienne est continue.
3. Une application localement lipschitzienne est-elle uniformément continue ?
4. Si $f : E \to F$ est localement lipschitzienne, alors la restriction de f à une partie compacte quelconque de E est lipschitzienne.

144. Connexité de $\mathbb{R}$
144.1 Soit A, une partie de $\mathbb{R}$ qui est à la fois ouverte et fermée. On suppose qu'il existe $x_0 \in A$ et $y_0 \notin A$ avec $x_0 < y_0$ et on considère l'ensemble

$$I = \big\{x \in A\ :\ [x_0, x] \subset A\big\}.$$

1. L'ensemble I admet une borne supérieure x_1.
2. L'ensemble I est donc égal à $[x_0, x_1[$ ou à $[x_0, x_1]$ et ces deux éventualités sont absurdes.
3. Les seules parties de $\mathbb{R}$ qui sont à la fois ouvertes et fermées sont $\varnothing$ et $\mathbb{R}$.

144.2 Plus généralement, la seule partie non vide d'un intervalle I qui soient à la fois ouvertes et fermées relativement à I est l'intervalle I lui-même.

145. Connexité d'un espace vectoriel
Soit $(E, \|\cdot\|)$, un espace vectoriel normé. Si une partie A de E est à la fois ouverte et fermée, alors A est vide ou égale à E.

146. Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$
Les sous-groupes additifs stricts de $\mathbb{R}$ sont de deux types : les uns sont fermés et en général isomorphes à $\mathbb{Z}$ tandis que les autres sont denses dans $\mathbb{R}$.
146.1 Classification des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$
Soit H, un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, distinct de $\{0\}$: on pose

$$a = \inf\{x \in H\ :\ x > 0\}.$$

1. On suppose que $a = 0$ et on se donne $\varepsilon > 0$.

1.a Il existe $x_0 \in H$ tel que $0 < x_0 < \varepsilon$.
1.b Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $|x - kx_0| \leqslant \varepsilon$.
1.c Le sous-groupe H est une partie dense de $\mathbb{R}$.

2. On suppose que $a > 0$.

2.a Il existe une suite d'éléments strictement positifs de H qui converge vers a.
2.b Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $H \cap]a, a + \varepsilon[= \varnothing$.
2.c Le sous-groupe H contient a et $H = a\mathbb{Z}$.
2.d Le sous-groupe H est fermé.

3.a Un sous-groupe H de $(\mathbb{R}, +)$, distinct de $\mathbb{R}$, est fermé si, et seulement si, il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $H = a\mathbb{Z}$.
3.b Soient a et b, deux réels strictement positifs tels que le quotient b/a ne soit pas rationnel. L'ensemble

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \big\{pa + qb,\ (p,q) \in \mathbb{Z}^2\big\}$$

est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ qui est dense dans $\mathbb{R}$.

146.2 Fonctions continues périodiques
4.a L'ensemble des périodes d'une fonction $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, E)$ est un sous-groupe fermé de $(\mathbb{R}, +)$.
4.b Si $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, E)$ est périodique mais pas constante, elle admet une plus petite période strictement positive.

147. Soit F, une partie finie d'un espace vectoriel normé. Construire un algorithme calculant

$$\min_{\substack{x \in F \\ y \in F \\ x \neq y}} \mathrm{d}(x, y)$$

et évaluer la complexité de cet algorithme.

148. Limite supérieure, limite inférieure
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite réelle bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\Omega_n = \{u_k,\ k \geqslant n\}, \quad v_n = \inf \Omega_n, \quad w_n = \sup \Omega_n.$$

1. Démontrer que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies et qu'elles convergent.

On note V et W, les limites respectives des suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Soit $\ell \in \mathbb{R}$, une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Démontrer que $V \leqslant \ell \leqslant W$.
3. Démontrer que V et W sont des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, les deux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Les réels V et W sont appelés respectivement **limite inférieure** *et* **limite supérieure** *de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ces deux "limites" ont un sens même lorsque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas et coïncident avec la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque cette suite converge : ces deux notions sont donc très pratiques !*