1
Normes

I
Borne supérieure, borne inférieure

I.1 Axiome de la borne supérieure

1. Soit A, une partie de $\mathbb{R}$. On note $\mathfrak{M}(A)$, l'ensemble des majorants de A :

$$M \in \mathfrak{M}(A) \iff \forall\, x \in A, \quad x \leqslant M$$

et $\mathfrak{m}(A)$, l'ensemble des minorants de A :

$$m \in \mathfrak{m}(A) \iff \forall\, x \in A, \quad m \leqslant x.$$

1.1 ✍ *Une partie A de $\mathbb{R}$ admet une* **borne supérieure** *lorsque l'ensemble $\mathfrak{M}(A)$ de ses majorants admet un plus petit élément. Dans ce cas, $\min \mathfrak{M}(A)$ est noté $\sup(A)$.*
1.2 ✍ *Une partie A de $\mathbb{R}$ admet une* **borne inférieure** *lorsque l'ensemble $\mathfrak{m}(A)$ de ses minorants admet un plus grand élément. Dans ce cas, $\max \mathfrak{m}(A)$ est noté $\inf(A)$.*

2. Borne supérieure et maximum
2.1 ➙ *Si la partie A admet un plus grand élément, alors elle admet aussi une borne supérieure et de plus $\sup(A) = \max(A)$.*
2.2 ➙ *Si A admet une borne supérieure et si cette borne appartient à A, alors c'est le plus grand élément de A, soit : $\sup(A) = \max(A)$.*

3. Axiome de la borne supérieure
Les deux énoncés suivants sont équivalents.
3.1 ➙ *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.*
3.2 ➙ *Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.*

I.2 Borne supérieure et inégalités

4. Majoration par le sup
4.1 ➙ *La borne supérieure de A est un majorant de A :*

$$\forall\, x \in A, \qquad x \leqslant \sup(A).$$

4.2 Soit $A \subset \mathbb{R}$, non vide et majorée. S'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers ℓ, alors $\ell \leqslant \sup(A)$.
4.3 ➙ *Pour toute partie bornée et non vide $A \subset \mathbb{R}$,*

$$\inf(A) \leqslant \sup(A).$$

5. Caractérisation séquentielle
Soit A, une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$.
5.1 Il existe une suite d'éléments de A qui converge vers $\sup(A)$ et une suite d'éléments de A qui converge vers $\inf(A)$.
5.2 ➙ *Un majorant M de A est égal à $\sup(A)$ si, et seulement si, il existe une suite d'éléments de A qui converge vers M.*
5.3 Si B est une partie non majorée de $\mathbb{R}$, alors il existe une suite d'éléments de B qui tend vers $+\infty$.

6. Passage à la borne supérieure
Connaissant une majoration par une quantité indépendante d'un paramètre x, on peut ***passer à la borne supérieure*** sur ce paramètre.
Cette opération est analogue au ***passage à la limite*** pour une suite convergente, qui fait passer d'une propriété vraie à partir d'un certain rang à une propriété de la limite. →**[4.2]**
6.1 ➙ *Si A est une partie non vide et majorée par M :*

$$\forall\, x \in A, \quad x \leqslant M$$

alors :

$$\sup(A) \leqslant M.$$

6.2 ➙ *Si $f : A \to \mathbb{R}$ est une fonction majorée par M :*

$$\forall\, x \in A, \quad f(x) \leqslant M$$

alors

$$\sup_{x \in A} f(x) \leqslant M.$$

7. Passage à la borne inférieure
7.1 ➙ *Si A est une partie non vide et minorée par m :*

$$\forall\, x \in A, \qquad x \geqslant m$$

alors on peut **passer à la borne inférieure** *dans cette inégalité :*

$$\inf(A) \geqslant m.$$

7.2 ➙ *Si $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction minorée par m :*

$$\forall\, x \in X, \quad f(x) \geqslant m$$

alors on peut passer à la borne inférieure dans cette inégalité :

$$\inf_{x \in X} f(x) \geqslant m.$$

8. ➙ Monotonie des opérateurs
Soient A et B, deux parties de $\mathbb{R}$ qui admettent chacune une borne supérieure et une borne inférieure.
Si $A \subset B$, alors

$$\inf(B) \leqslant \inf(A) \quad \textit{et} \quad \sup(A) \leqslant \sup(B).$$

9. ➙ *Soit A, une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$.*

$$\forall\, \lambda > 0, \quad \sup(\lambda A) = \lambda \sup(A) \quad \textit{et} \quad \inf(\lambda A) = \lambda \inf(A).$$

Entraînement

10. Questions pour réfléchir
1. Décrire $\mathfrak{M}(\varnothing)$ et $\mathfrak{m}(\varnothing)$.
2. Condition pour que $\mathfrak{M}(A)$ (resp. $\mathfrak{m}(A)$) soit une partie non vide de $\mathbb{R}$.
3. Conditions pour qu'une partie admette un plus grand élément ?
4. Exemple de partie $A \subset \mathbb{R}$ admettant une borne supérieure mais pas de plus grand élément ?
5. Soient A, une partie de $\mathbb{R}$ admettant une borne supérieure M et $\varepsilon > 0$.
   5.a Il existe $x_\varepsilon \in A$ tel que $M - \varepsilon < x_\varepsilon \leqslant M$.
   5.b Existe-t-il $y_\varepsilon \in A$ tel que $M - \varepsilon < y_\varepsilon < M$?
6. Soient f et g, deux fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   6.a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \big[f(x) + g(x)\big] \leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) + \sup_{x \in \mathbb{R}} g(x)$$

   6.b Même si les deux fonctions f et g atteignent un maximum, leur somme $f + g$ n'atteint pas nécessairement un maximum.
7. Condition sur $A \subset \mathbb{R}$ pour que $\inf(A) = \sup(A)$.
8. *Suite de* **[9]** – Examiner les cas $\lambda = 0$ et $\lambda < 0$.
9. On suppose que

$$\forall\, x \in A, \quad x < M.$$

Comparer $\sup(A)$ et M : le passage à la borne supérieure conserve-t-il les inégalités strictes ?

10. Si $u_i \leqslant v_j$ pour tout $i \in I$ et tout $j \in J$, alors

$$\inf_{i\in I} u_i \leqslant \sup_{i\in I} u_i \leqslant \inf_{j\in J} v_j \leqslant \sup_{j\in J} v_j.$$

Illustrer ce résultat par une figure.

11. Si $u_i \leqslant v_i$ pour tout $i \in I$, alors

$$\inf_{i\in I} u_i \leqslant \inf_{i\in I} v_i \quad \text{et} \quad \sup_{i\in I} u_i \leqslant \sup_{i\in I} v_i.$$

Comparer $\sup_{i\in I} u_i$ et $\inf_{i\in I} v_i$ (à l'aide d'une figure).

11. Si $A \subset \mathbb{R}$ est une partie bornée non vide, alors il existe une suite d'éléments de A^c qui converge vers $\sup(A)$.

12. On suppose que A admet M pour borne supérieure.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A qui converge vers M, alors on peut extraire une suite croissante $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers M. Il existe donc une suite croissante d'éléments de A qui converge vers M.
2. Existe-t-il une suite strictement croissante d'éléments de A qui converge vers M ?

Interversion des bornes

13. Soit $(U_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$, une famille réelle bornée.

13.1 Pour tout $i \in I$,

$$\inf_{j\in J} U_{i,j} \leqslant \inf_{j\in J} \sup_{k\in I} U_{k,j}.$$

13.2 Pour toute famille réelle $(U_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$, bornée ou non,

$$\sup_{i\in I} \inf_{j\in J} U_{i,j} \leqslant \inf_{j\in J} \sup_{i\in I} U_{i,j}.$$

13.3 Avec $U_{i,j} = \frac{i}{i+j}$ pour $(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, l'inégalité entre les bornes est stricte.

14. Nous allons considérer ici des parties de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas nécessairement bornées.

14.1 Conventions

Nous suivrons ici les conventions suivantes :

— Si $A \subset \mathbb{R}$ n'est pas majorée, alors $\sup(A) = +\infty$.

— Si $A \subset \mathbb{R}$ n'est pas minorée, alors $\inf(A) = -\infty$.

Avec ces conventions, toute suite croissante tend vers sa borne supérieure et toute suite décroissante tend vers sa borne inférieure.

1. Soit $A \subset \mathbb{R}$, non vide. Que la partie A soit bornée ou non, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui tend vers $\sup(A)$ et une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui tend vers $\inf(A)$.
2. Si $A \subset B$, alors $\inf(B) \leqslant \inf(A)$ et $\sup(A) \leqslant \sup(B)$.
3. Quels que soient $A \subset \mathbb{R}$ non vide et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A) \quad \text{et} \quad \inf(\lambda A) = \lambda \inf(A).$$

4. Les autres propriétés des bornes perdent tout intérêt pour des parties non bornées :

— On peut toujours majorer par $+\infty$ (ou minorer par $-\infty$), mais c'est sans aucune utilité ;

— Le passage au sup (resp. à l'inf) suppose l'existence d'un majorant (resp. d'un minorant) réel et est donc sans objet.

14.2 On considère une famille réelle $(U_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ et on pose

$$M = \sup_{(i,j)\in I\times J} U_{i,j},$$

que cette quantité soit réelle ou infinie.

5. Si M' est un réel tel que $M' < M$, alors il existe $i_0 \in I$ et $j_0 \in J$ tels que

$$M' < U_{i_0,j_0} \leqslant M$$

donc

$$M' < \sup_{i\in I} \sup_{j\in J} U_{i,j} \leqslant M \quad \text{et} \quad M' < \sup_{j\in J} \sup_{i\in I} U_{i,j} \leqslant M.$$

6. Pour toute famille réelle $(U_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$, bornée ou non,

$$\sup_{i\in I} \sup_{j\in J} U_{i,j} = \sup_{j\in J} \sup_{i\in I} U_{i,j} \quad \text{et} \quad \inf_{i\in I} \inf_{j\in J} U_{i,j} = \inf_{j\in J} \inf_{i\in I} U_{i,j}.$$

15. Théorème de Fubini–Tonelli [14]

Si $\sum x_n$ est une série de terme général *positif*, alors la somme infinie $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ a un sens, que la série soit convergente ou divergente :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} x_n = \sup_{N\in\mathbb{N}} \sum_{n=0}^{N} x_n \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

1. Soit $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$, une famille de réels *positifs*. Quels que soient $i \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$, on pose

$$U_{i,j} = \sum_{n=0}^{i} \sum_{p=0}^{j} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{j} \sum_{n=0}^{i} u_{n,p}.$$

Que la famille $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ soit sommable ou non,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} \Big) = \sum_{p=0}^{+\infty} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p} \Big).$$

II

Distances dans un espace vectoriel

16. Une ***norme*** sert à mesurer la distance qui sépare deux points. On peut ainsi définir la notion de ***suite convergente***, puis de la notion de ***fonction continue***.

17. Norme associée à un produit scalaire

Un ***espace préhilbertien réel*** est un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ muni d'un ***produit scalaire***, c'est-à-dire d'une application

$$\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle \ : \ E \times E \to \mathbb{R}$$

bilinéaire, symétrique et définie positive.

17.1 La ***norme*** associée à ce produit scalaire est définie par

$$\forall\, x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x \,|\, x \rangle}.$$

17.2 ⇝ Inégalité de Schwarz

Le produit scalaire et la norme vérifient l'inégalité de Schwarz :

$$\forall\, x, y \in E, \quad \big|\, \langle x \,|\, y \rangle \,\big| \leqslant \|x\|\, \|y\|.$$

17.3 ⇝ Cas d'égalité

En supposant que $x \neq 0_E$, si $\big|\, \langle x \,|\, y \rangle \,\big| = \|x\|\, \|y\|$, alors il existe un réel λ tel que $y = \lambda \cdot x$.

II.1 Espaces vectoriels normés

18. ✍ *Soit E, un espace vectoriel réel ou complexe. Le corps des scalaires est noté $\mathbb{K}$.*
On appelle **norme sur** *E toute application $N : E \to \mathbb{R}_+$*
18.1 *qui* **sépare les points** *:*

$$N(x) = 0 \iff x = 0_E$$

18.2 *est* **absolument homogène** *:*

$$\forall\, (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, \quad N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$$

18.3 *et vérifie l'***inégalité triangulaire** *:*

$$\forall\, (x, y) \in E \times E, \quad N(x+y) \leqslant N(x) + N(y).$$

19. Inégalité triangulaire
L'inégalité [**18.3**] peut être généralisée au cas d'une combinaison linéaire quelconque et exprimée sous la forme plus forte de l'encadrement [**19.2**].
19.1 Quels que soient les vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ dans E et les scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$,

$$N\Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|\, N(x_k).$$

19.2 ➙ *Si N est une norme sur E, alors*

$$\big|N(x) - N(y)\big| \leqslant N(x \pm y) \leqslant N(x) + N(y)$$

quels que soient x et y dans E.

20.1 ✍ *Un* **espace vectoriel normé** *est un espace vectoriel E sur lequel est défini une norme N.*
20.2 La restriction d'une norme N sur E à un sous-espace vectoriel F de E est une norme sur F.
20.3 ✍ *Soient (E, N), un espace vectoriel normé et F, un sous-espace vectoriel de E. La* **norme induite** *par N sur le sous-espace F est la restriction de N à F.*

21. Exemples fondamentaux
21.1 La valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$.
21.2 Le module est une norme sur $\mathbb{C}$ (vu comme un espace vectoriel réel aussi bien que comme un espace vectoriel complexe).
21.3 ✍ *Soit $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$, un produit scalaire sur l'espace vectoriel réel E. La* **norme associée au produit scalaire** *$\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ est définie par*

$$\forall\, x \in E, \qquad \|x\| = \sqrt{\langle x \,|\, x \rangle}.$$

22. Vecteurs unitaires
Soit N, une norme sur l'espace vectoriel E.
22.1 ✍ *Un vecteur $x \in E$ est* **unitaire** *lorsque $N(x) = 1$.*
22.2 ✍ *La* **sphère unité** *S^1 de (E, N) est définie par*

$$S^1 = \big[N(x) = 1\big].$$

22.3 ➙ *Pour tout vecteur $x \in E$* non nul*, il existe un scalaire $\lambda > 0$ et un vecteur $u \in S^1$ tels que*

$$x = \lambda u.$$

Cette factorisation de x est unique.

Distance associée à une norme

23. ✍ *La* **distance** *associée à la norme N sur E est l'application*

$$d : E \times E \to \mathbb{R}_+$$

définie par

$$\forall\, (x, y) \in E \times E, \quad d(x, y) = N(x - y).$$

24. ➙ *La distance d associée à une norme N est une application*
24.1 **symétrique** *:*

$$\forall\, (x, y) \in E \times E, \quad d(x, y) = d(y, x)$$

24.2 *qui* **sépare les points** *:*

$$d(x, y) = 0 \iff x = y$$

24.3 *qui vérifie l'***inégalité triangulaire** *:*

$$\forall\, (x, y, z) \in E \times E \times E, \quad d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z).$$

25. ➙ *La distance d associée à une norme N est aussi* **invariante par translation** *:*

$$\forall\, (x, y, z) \in E \times E \times E, \quad d(x + z, y + z) = d(x, y).$$

26. Notion générale de distance
26.1 À chaque produit scalaire est associée une norme [**21.3**], mais il existe des normes qui ne sont pas associées à un produit scalaire. →[**2.137**]
26.2 On peut définir une notion générale de distance : toute application, définie sur une partie E (qui n'est pas nécessairement un espace vectoriel), qui vérifie les propriétés [**24**] est une distance sur E. Un ensemble E sur lequel est définie une distance est appelé un ***espace métrique***.
26.3 Si toute norme sur un espace vectoriel est associée à une distance [**23**], certaines distances ne sont pas associées à une norme (autrement dit : certains espaces métriques ne sont pas des espaces vectoriels normés). →[**154**]
26.4 On prendra soin de constater que toutes les notions topologiques définies dans un espace vectoriel normé peuvent en fait être formulées à l'aide de la distance associée à la norme.

Parties bornées

27.1 ✍ *Une partie A de E est* **bornée** *pour la norme N lorsque*

$$\exists\, M > 0,\ \forall\, x \in A, \quad N(x) \leqslant M.$$

27.2 ✍ *Une application $f : X \to E$ est* **bornée** *pour la norme N sur E lorsque son image $f_*(X)$ est une partie bornée de E :*

$$\exists\, M > 0,\ \forall\, x \in X, \quad N\big(f(x)\big) \leqslant M.$$

28. ✍ *La* **boule unité fermée** *B_f^1 et la* **boule unité ouverte** *B_o^1 sont définies par*

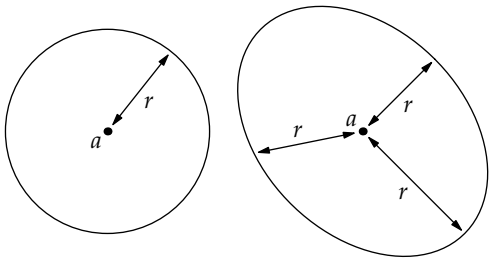
$$B_f^1 = \big[N(x) \leqslant 1\big] \qquad \text{et} \qquad B_o^1 = \big[N(x) < 1\big].$$

29.1 ✍ *La* **sphère** *de centre $a \in E$ et de rayon r pour la norme N est définie par*

$$S(a, r) = \big[N(x - a) = r\big] = \big[d(x, a) = r\big].$$

29.2 Sphères euclidiennes de rayon r et de centre a pour la norme euclidienne canonique (à gauche) et (à droite) pour la norme définie par

$$\forall\, \boldsymbol{u} = (u_x, u_y) \in \mathbb{R}^2, \quad \|\boldsymbol{u}\|^2 = \frac{3}{4}u_x^2 + \frac{3}{4}u_y^2 + \frac{1}{2}u_x u_y.$$

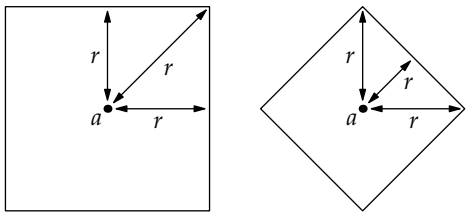


29.3 Sphères de rayon r et de centre a pour la ***norme produit*** (à gauche) :

$$\forall\, \boldsymbol{u} = (u_x, u_y) \in \mathbb{R}^2, \quad \|\boldsymbol{u}\|_\infty = \max\{|u_x|, |u_y|\}$$

et (à droite) pour la norme définie par

$$\forall\, \boldsymbol{u} = (u_x, u_y) \in \mathbb{R}^2, \quad \|\boldsymbol{u}\|_1 = |u_x| + |u_y|.$$



30.1 ✍ *La* **boule fermée** *de centre $a \in E$ et de rayon r pour la norme N est définie par*

$$B_f(a,r) = \big[\|x-a\| \leqslant r\big] = \big[d(x,a) \leqslant r\big].$$

30.2 ✍ *La* **boule ouverte** *de centre $a \in E$ et de rayon r pour la norme N est définie par*

$$B_o(a,r) = \big[\|x-a\| < r\big] = \big[d(x,a) < r\big].$$

30.3 La boule fermée de centre $a \in E$ et de rayon r est l'union (disjointe) de la sphère de centre a et de rayon r et de la boule ouverte de centre a et de rayon r.

$$B_o(a,r) \subsetneq B_o(a,r) \sqcup S(a,r) = B_f(a,r)$$

31. ➙ *Une partie de E est bornée si, et seulement si, elle est contenue dans une boule (ouverte ou fermée).*

Normes sous-multiplicatives

32. Certains espaces vectoriels ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}(X)$, $\mathrm{L}(E)$, $\mathscr{A}(\Omega,\mathbb{K})$...) sont également munis d'une structure d'anneau, qui en font des ***algèbres (associatives unitaires)***.
Sur de tels espaces vectoriels, certaines normes sont plus utiles que d'autres.

33. ✍ *Soit $(E,+,\times,\cdot)$, une algèbre associative unitaire. Une norme N est* **sous-multiplicative** *sur E lorsque*

$$\forall\, x, y \in E, \qquad N(x \times y) \leqslant N(x).N(y).$$

34. La valeur absolue sur $\mathbb{R}$ et le module sur $\mathbb{C}$ sont deux normes sous-multiplicatives.

II.2 Exemples de normes

35. ✍ **Norme produit**
Soient $(E_1, N_1), \ldots, (E_d, N_d)$, des espaces vectoriels normés. On considère l'espace vectoriel produit :

$$E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_d.$$

La **norme produit** $\|\cdot\|_\infty$ *sur E est définie par*

$$\forall\, x = (x_1, \ldots, x_d) \in E, \qquad \|x\|_\infty = \max_{1\leqslant k\leqslant d} N_k(x_k).$$

Exemples en dimension finie

36. **Norme associée à une base**
Soient $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_d)$, une base de E et $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_d^*)$, la base duale. L'application $N_{\mathscr{B}} : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x \in E, \qquad N_{\mathscr{B}}(x) = \max_{1\leqslant k\leqslant d} \big|e_k^*(x)\big|$$

est une norme sur E.

37. **Normes sur $\mathbb{K}^d$**
Les normes usuelles sur $\mathbb{K}^d$ sont les suivantes :
37.1 ✍ *La* **norme euclidienne canonique** *sur $\mathbb{R}^d$:*

$$\forall\, x = (x_1, \ldots, x_d), \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{d} x_k^2}.$$

37.2 ✍ *La* **norme produit** *sur $\mathbb{K}^d$:*

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leqslant k\leqslant d} |x_k|$$

et la norme définie par

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{d} |x_k|.$$

38. **Normes sur des espaces de matrices**
De même, l'espace $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices est muni de trois normes usuelles.
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
38.1 ✍ *La* **norme euclidienne canonique** *sur $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est définie par*

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} |a_{i,j}|^2}.$$

38.2 La norme euclidienne canonique $\|\cdot\|_2$ est sous-multiplicative sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
38.3 ✍ *Pour tout $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,*

$$\|A\|_1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} |a_{i,j}| \quad \textit{et} \quad \|A\|_\infty = \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} |a_{i,j}|.$$

38.4 L'application définie sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ par

$$\|A\| = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \sum_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}|$$

est une norme sous-multiplicative sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Espaces de fonctions bornées

39. On se restreint pour le moment à considérer seulement des fonctions bornées.
39.1 ✍ *Soient (E,N), un espace vectoriel normé et X, un ensemble non vide. La* **norme (de la convergence) uniforme (sur X)** *sur l'espace $\mathscr{B}(X,E)$ des applications bornées de X dans E est définie par*

$$\forall\, f \in \mathscr{B}(X,E), \qquad \|f\|_\infty = \sup_{x\in X} N\big(f(x)\big).$$

39.2 ➙ *La norme de la convergence uniforme sur $\mathscr{B}(X,\mathbb{R})$ est sous-multiplicative.*
39.3 L'espace $E = \mathscr{C}^1(I)$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $I = [a,b]$ peut être normé par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in I} N(f(x)) \quad \text{ou par} \quad \|f\|_{\mathscr{C}^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

39.4 ✍ *Si l'intervalle I est un segment : $I = [a,b]$, alors l'espace des fonctions continues sur I peut être muni de la* **norme de la convergence en moyenne sur** *I :*

$$\forall\, f \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{K}), \qquad \|f\|_1 = \int_I \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t$$

avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
39.5 ✍ *De même, il peut être muni de la* **norme de la convergence en moyenne quadratique sur** *I, définie par*

$$\forall\, f \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{K}), \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_I \big|f(t)\big|^2\,\mathrm{d}t}.$$

Espaces de suites

40.1 ✍ **Suites bornées**
On note $\ell^\infty(\mathbb{K})$, l'espace vectoriel des suites bornées d'éléments de $\mathbb{K}$:

$$u \in \ell^\infty(\mathbb{K}) \iff \exists\, M > 0,\ \forall\, k \in \mathbb{N},\quad |u_k| \leqslant M.$$

et la norme naturelle sur l'espace $\ell^\infty(\mathbb{K})$ est définie par

$$\|u\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |u_k|.$$

40.2 ✍ **Familles sommables**
Une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est **sommable** *lorsque la série de terme général positif $\sum|u_k|$ est convergente.*
L'espace vectoriel des suites sommables est noté $\ell^1(\mathbb{K})$ et la norme naturelle sur l'espace $\ell^1(\mathbb{K})$ est définie par

$$\|u\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|.$$

40.3 ✍ **Familles de carré sommable**
Une suite u d'éléments de $\mathbb{K}$ est dite **de carré sommable** *lorsque la série $\sum u_k^2$ est absolument convergente.*
L'espace vectoriel des suites de carré sommable est noté $\ell^2(\mathbb{K})$.
La norme naturelle sur $\ell^2(\mathbb{K})$ est définie par

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|^2}.$$

II.3 Parties convexes

41. Structure affine d'un espace vectoriel
Soit E, un espace vectoriel. Les vecteurs de E seront ici appelés des ***points*** et notés avec des lettres majuscules.
41.1 Quels que soient les points A et B, il existe un, et un seul, vecteur $\boldsymbol{u} \in E$ tel que le point B soit l'image du point A par la translation de vecteur $\boldsymbol{u}$.
41.2 Ce vecteur $\boldsymbol{u}$ est noté $\boldsymbol{AB}$, si bien que

$$B = A + \boldsymbol{AB}.$$

41.3 On considère des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1.$$

Quels que soient les points $A_1, \ldots, A_n$, B et O,

$$B = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot A_k \iff \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \boldsymbol{BA_k} = \boldsymbol{0}_E$$
$$\iff \boldsymbol{OB} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \boldsymbol{OA_k}.$$

42.
42.1 ✍ *On considère un* **système pondéré**, *c'est-à-dire une famille finie de couples $(A_k, \alpha_k) \in E \times \mathbb{K}$ dont le* **poids total** *n'est pas nul :*

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 0.$$

42.2 ✍ *Le* **barycentre** *du système pondéré*

$$[(A_k, \alpha_k)]_{1\leqslant k\leqslant n}$$

de poids total α est le point $G \in E$ défini par

$$G = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot A_k.$$

42.3 ✍ *Un point G de E est une* **combinaison convexe** *des points $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de E lorsqu'il existe une famille de réels $(\alpha_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ tels que*

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n,\quad \alpha_k \geqslant 0,\qquad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1 \qquad \textit{et} \qquad G = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k A_k.$$

42.4 ✍ *L'***isobarycentre** *des points $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de E est le barycentre du système pondéré $[(A_k, 1)]_{1\leqslant k\leqslant n}$:*

$$G = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} A_k.$$

43. Exemples géométriques simples
Soient A et B, deux points distincts.
43.1 La ***droite*** (AB), définies par

$$(AB) = \big\{A + \lambda \cdot \boldsymbol{AB},\ \lambda \in \mathbb{R}\big\},$$

est l'ensemble des barycentres de A et B.
43.2 ✍ *Le* **segment** $[A, B]$ *est l'ensemble des combinaisons convexes de A et B :*

$$[A, B] = \big\{(1-t)A + tB,\ t \in [0,1]\big\}.$$

43.3 ✍ *Soient A, B et C, trois points. Le* **triangle** ABC *est l'ensemble des combinaisons convexes de A, B et C.*

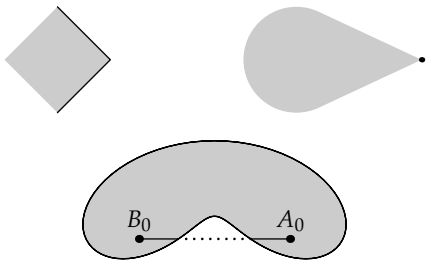
44.1 ✍ *Une partie $K \subset E$ est* **convexe** *lorsque*

$$\forall\, (A, B) \in K^2,\qquad [A, B] \subset K.$$

45. L'intersection de deux parties convexes de E est une partie convexe de E.

45.1 ➙ *Une partie $K \subset E$ est convexe si, et seulement si, toute combinaison convexe de points de K appartient à K.*

46. Exemples et contre-exemple
46.1 Les intervalles sont les parties convexes de $\mathbb{R}$.
46.2 Tout triangle est convexe.
46.3 Tout sous-espace vectoriel de E est convexe.
46.4



47. ➙ *Soit (E, N), un espace vectoriel normé. Quel que soit $a \in E$ et $r > 0$, la boule ouverte et la boule fermée de centre a et de rayon r sont convexes.*

Entraînement

48. Questions pour réfléchir
1. On suppose que x et y sont deux vecteurs non nuls d'un espace préhilbertien.
1.a Il existe un, et un seul, réel $\theta \in [0, \pi]$ tel que

$$\cos\theta = \frac{\langle x \,|\, y \rangle}{\|x\|\,\|y\|}.$$

1.b Que représente ce réel ?
1.c Préciser le cas d'égalité de l'inégalité de Schwarz [**17.3**].
2. Un sous-espace vectoriel est-il une partie bornée ?
3. Une intersection de parties bornées est-elle bornée ?
4. Condition pour que l'union d'une famille de parties bornées soit encore bornée.
5. Le complémentaire d'une partie bornée est-il borné ?
6. Une application linéaire est-elle bornée ?
7. Soient N_1 et N_2, deux normes distinctes sur E. Il existe un vecteur $x \in E$ unitaire pour N_1 sans être unitaire pour N_2.
8. Que dire d'un vecteur $x \in E$ dont la norme $N(x)$ ne dépend pas de la norme N définie sur E ?
9. La sphère unité et la boule unité sont-elles des parties bornées ? des sous-espaces vectoriels ?
10. Quels que soient $a \in E$ et $r > 0$, la sphère $S(a, r)$ n'est pas vide.

11. Toute boule ouverte (resp. fermée) de rayon strictement positif contient une boule fermée (resp. ouverte) de rayon strictement positif.
12.a Une boule ouverte est l'union d'une suite croissante (pour $\subset$) de boules fermées.
12.b Une boule fermée est l'intersection d'une suite décroissante (pour $\subset$) de boules ouvertes.
13. La sphère $S(a,r)$ et les boules $B_f(a,r)$ et $B_o(a,r)$ sont les images réciproques respectives de $\{r\}$, $[0,r]$ et $]-\infty,r[$ par l'application $[x \mapsto d(x,a)]$.
14. Soient N_1 et N_2, deux normes sur E. On suppose qu'il existe $a_0 \in E$ et $r_0 > 0$ tels que les sphères de centre a_0 et de rayon r_0 soient les mêmes pour les normes N_1 et N_2. Comparer les normes N_1 et N_2.
15. Si K est convexe, alors, quels que soient les points A, B et C dans K, le triangle ABC est contenu dans K.
16. L'union de deux parties convexes de E est-elle une partie convexe de E ?
17. Tout sous-espace affine de E est convexe.
18. Une sphère de rayon $r > 0$ n'est pas convexe.
19. Les parties convexes du **[46.4]** ne sont pas des boules. Pourquoi ?

49. Soient $(F, \|\cdot\|)$, un espace vectoriel normé et $f \in \mathrm{L}(E,F)$. L'application $N_f : E \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\forall\, x \in E, \quad N_f(x) = \big\|f(x)\big\|$$

est une norme sur E si, et seulement si, f est injective.

50. On considère une norme $\|\cdot\|$ sur l'espace $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On suppose que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de scalaires qui tend vers le scalaire ℓ.
Quelle que soit la colonne $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, la suite $(u_n \cdot X)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \cdot X$.

51. *Suite de* **[39.4]** – L'application $[f \mapsto \|f\|_1]$ n'est pas une norme sur l'espace $\mathscr{C}^{0,m}([a,b],\mathbb{R})$ des applications continues par morceaux sur le segment $[a,b]$.

52. *Suite de* **[36]** – L'application $N_1 : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x \in E, \quad N_1(x) = \sum_{k=1}^{d} \big|e_k^*(x)\big|$$

est une norme sur E.

53. On suppose que $\|\cdot\|$ est la norme associée à un produit scalaire $\langle\, \cdot \,|\, \cdot \,\rangle$ sur E. Pour tout $x \in E$,

$$\|x\| = \max_{\|y\|=1} \big|\langle\, x \,|\, y \,\rangle\big| = \max_{\|y\|\leqslant 1} \big|\langle\, x \,|\, y \,\rangle\big| = \sup_{\|y\|<1} \big|\langle\, x \,|\, y \,\rangle\big|.$$

54. Soit F, un sous-espace vectoriel de E qui contient A_1, …, A_n. Tout barycentre de A_1, …, A_n appartient à F.

55. Quel que soit le scalaire $\lambda \neq 0$, les systèmes pondérés

$$[(A_k,\alpha_k)]_{1\leqslant k\leqslant n} \qquad \text{et} \qquad [(A_k,\lambda\alpha_k)]_{1\leqslant k\leqslant n}$$

ont même barycentre.

56. Soit G, le barycentre du système pondéré $[(A_k,\alpha_k)]_{1\leqslant k\leqslant n}$. Si $f : E \to F$ est une application linéaire, alors $f(G)$ est le barycentre du système pondéré $[(f(A_k),\alpha_k)]_{1\leqslant k\leqslant n}$.

Inégalités de Hölder et de Minkowski

57. ✍ *Deux réels p et q strictement supérieurs à 1 tels que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

sont dits **conjugués**.

58. Inégalité de Hölder
Soient p et q, deux réels conjugués.

58.1 ✍ *Pour tout réel $p > 1$ et tout $x = (x_1,\dots,x_d) \in \mathbb{K}^d$, on pose*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{d} |x_k|^p\right)^{1/p}.$$

1. Soient $x = (x_1,\dots,x_d)$ et $y = (y_1,\dots,y_d)$ dans $\mathbb{K}^d$ tels que $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$. Alors, par concavité de ℓn,

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant d, \quad |x_i y_i| \leqslant \frac{|x_i|^p}{p} + \frac{|y_i|^q}{q} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{d} |x_i y_i| \leqslant 1.$$

2. On en déduit l'***inégalité de Hölder*** :

$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{K}^d \times \mathbb{K}^d, \quad \sum_{i=1}^{d} |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q.$$

59. Normes sur $\mathbb{K}^d$ [58]
59.1
1. Que devient l'inégalité de Hölder pour $p = 2$?
2. Analogue de l'inégalité de Hölder pour la norme $\|\cdot\|_1$?

59.2
3. Quels que soient x et y dans $\mathbb{K}^d$, pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$,

$$|x_i + y_i|^p \leqslant |x_i|\,|x_i + y_i|^{p-1} + |y_i|\,|x_i + y_i|^{p-1}$$

4.

$$\sum_{i=1}^{d} |x_i + y_i|^p \leqslant \big(\|x\|_p + \|y\|_p\big)\,\|x + y\|_p^{p/q}$$

5. **Inégalité de Minkowski**
L'inégalité de Minkowski est un cas d'inégalité triangulaire :

$$\forall\, p > 1,\ \forall\, x,y \in \mathbb{K}^d, \quad \|x + y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p.$$

6. L'application $[x \mapsto \|x\|_p]$ est une norme sur $\mathbb{K}^d$.

59.3 Soit $x \in \mathbb{K}^d$.
7. Il existe un indice $1 \leqslant i \leqslant d$ tel que $|x_i|$ soit maximal. Cet indice est-il unique ?
8.

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to+\infty} \|x\|_p.$$

60. Normes naturelles sur des espaces de suites
60.1 Pour tout $p > 1$, l'ensemble $\ell^p(\mathbb{K})$ des suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telles que la série

$$\sum u_k^p$$

soit absolument convergente est un espace vectoriel qui contient l'espace $\ell^1(\mathbb{K})$ des suites sommables.
60.2 ✍ *On pose*

$$\forall\, u \in \ell^p(\mathbb{K}), \qquad \|u\|_p = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|^p\right)^{1/p}.$$

60.3 Si $u \in \ell^p(\mathbb{K})$ et $v \in \ell^q(\mathbb{K})$, alors la série $\sum u_k v_k$ est absolument convergente et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k v_k| \leqslant \|u\|_p \|v\|_q.$$

L'application $[u \mapsto \|u\|_p]$ est une norme sur $\ell^p(\mathbb{K})$.
60.4 Pour toute suite sommable $u \in \ell^1(\mathbb{K})$,

$$\|u\|_\infty = \lim_{p\to+\infty} \|u\|_p.$$

61. **Normes sur $\mathscr{C}^0(I)$**
Soit I, un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour tout réel $p > 1$, on note $\mathscr{L}^p_c(I)$, l'ensemble des fonctions continues sur I telles que f^p soit intégrables sur I et on pose

$$\forall\, f \in \mathscr{L}^p_c(I), \quad \|f\|_p = \left(\int_I |f(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{1/p}.$$

On considère deux réels conjugués p et q.

1. Si $f \in \mathscr{L}^p_c(I)$ et $g \in \mathscr{L}^q_c(I)$, alors le produit fg est continu et intégrable sur I et

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

2. Si f et g appartiennent à $\mathscr{L}^p_c(I)$, alors $f+g \in \mathscr{L}^p_c(I)$ et

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

3. Pour tout $p > 1$, l'ensemble $\mathscr{L}^p_c(I)$ est un espace vectoriel et $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathscr{L}^p_c(I)$.

4. On suppose que I est un intervalle borné.

4.a
$$\forall\, p > 1, \quad \mathscr{L}^\infty_c(I) \subset \mathscr{L}^p_c(I)$$

4.b Soient $f \in \mathscr{L}^\infty_c(I)$ et $\varepsilon > 0$. Il existe un intervalle ouvert non vide $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[\subset I$ tel que

$$\forall\, x \in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[, \quad \|f\|_\infty - \varepsilon \leqslant |f(x)| \leqslant \|f\|_\infty.$$

4.c
$$\forall\, f \in \mathscr{L}^\infty_c(I), \quad \|f\|_\infty = \lim_{p\to+\infty} \|f\|_p$$

III

Suites et séries de vecteurs

62. On se place dans un espace vectoriel E, normé par $\|\cdot\|$. Toutes les propriétés énoncées sont relatives à la norme $\|\cdot\|$ qui a été choisie.

63. **Suites convergentes**
63.1 ✍ *Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E* **converge vers** *$a \in E$ pour la norme $\|\cdot\|$ lorsque*

$$\lim_{n\to+\infty} \|a_n - a\| = 0.$$

63.2 **Unicité de la limite**
Si une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a et vers b pour la même norme $\|\cdot\|$, alors $a = b$.
63.3 ✍ *Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est* **convergente (pour la norme $\|\cdot\|$)** *lorsqu'il existe $a \in E$ tel que*

$$\lim_{n\to+\infty} \|a_n - a\| = 0.$$

Dans ce cas, a est **la limite (pour la norme $\|\cdot\|$)** *de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
63.4 **Méthode**
La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a si, et seulement si, il existe une suite réelle $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \|a_n - a\| \leqslant \varepsilon_n.$$

63.5 ✍ *Une suite est* **divergente (pour $\|\cdot\|$)** *lorsqu'elle n'est pas convergente pour $\|\cdot\|$.*

III.1 Séries de vecteurs

64. Les ***séries*** sont des suites d'un genre particulier : l'idée fondamentale est que *les séries sont aux suites ce que les primitives sont aux fonctions.*
64.1 ✍ *La* **série de terme général** *u_n est une suite notée $\sum u_n$.*

64.2 ✍ *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme*

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

est la n-ième **somme partielle** *de la série $\sum u_n$.*
64.3 Étudier la série $\sum u_n$, c'est étudier les propriétés de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles qui se déduisent du terme général u_n.

65. Pour que les sommes partielles soient définies, il suffit que les termes u_n de la série appartiennent à un espace vectoriel. On considérera dorénavant que le terme général u_n appartient à un espace vectoriel E, lequel est muni d'une norme $\|\cdot\|$, ce qui permet de définir les notions de *suite convergente* et de *suite divergente.*

Nature d'une série

66. Étudier la ***nature d'une série***, c'est chercher si elle est convergente ou divergente.
66.1 ✍ *Une série $\sum u_n$ est* **convergente** *lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles est convergente : la série $\sum u_n$ est convergente si, et seulement si, il existe un vecteur $S \in E$ tel que*

$$\lim_{n\to+\infty} \|S_n - S\|_E = 0.$$

66.2 ✍ *La* **somme** *d'une série convergente est la limite de la suite de ses sommes partielles. Elle est notée*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

66.3 ✍ *Une série est* **divergente** *quand elle n'est pas convergente.*

67. **Restes d'une série convergente**
Il faut considérer la n-ième somme partielle d'une série convergente comme une valeur approchée de sa somme. Le **reste d'ordre** n est alors l'erreur absolue commise en assimilant la somme à la n-ième somme partielle.
67.1 ✍ *Soit $\sum u_n$, une série convergente. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, le* **reste d'ordre** *N est le vecteur R_N défini par la relation suivante.*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{N} u_n + R_N$$

67.2 ✍ *Par analogie avec la relation de Chasles, le reste d'ordre N est aussi noté*

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n.$$

Le terme u_{N+1}, premier terme du reste d'ordre N, est appelé **premier terme négligé**.
67.3 ➙ *La suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des restes d'une série convergente est une suite de limite nulle.*

III.2 Propriétés des suites convergentes

68. ➙ *Toute suite convergente est bornée.*

69. ➙ *Si la suite (de vecteurs) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n\| = \|\ell\|$$

(convergence d'une suite réelle).

Linéarité

70. ➙ *Si les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $a \in E$, $b \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors*
70.1 *la suite $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(a+b)$;*
70.2 *la suite $(\lambda_n a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers (λa).*

71.1 ✍ *La* **somme** *des deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série de terme général $(u_n + v_n)$.*

71.2 ✍ *La* **combinaison linéaire** $\lambda\sum u_n + \sum v_n$ *est la série de terme général* $(\lambda u_n + v_n)$.
71.3 ➙ *Si* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont deux séries convergentes, alors toute combinaison linéaire* $\sum(\lambda u_n + v_n)$ *est une série convergente et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + v_n) = \lambda\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

71.4 Autrement dit : l'application qui, à une série convergente, associe sa somme est une forme linéaire.
71.5 La somme d'une série convergente et d'une série divergente est une série divergente.

72. Divergence grossière d'une série
72.1 ➙ *Le terme général d'une série convergente tend vers* 0_E.
72.2 ✍ *Une série* $\sum u_n$ *est* **grossièrement divergente** *lorsque son terme général ne tend pas vers* 0_E.
72.3 ➙ *Toute série grossièrement divergente est divergente.*
72.4 Il existe des séries divergentes dont le terme général tend vers 0_E.

73. ➙ Produit de suites convergentes
On suppose ici que E est une algèbre et que la norme $\|\cdot\|$ *est sous-multiplicative* **[33]**.
Si les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent vers a et b respectivement, alors la suite produit* $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers ab.*

III.3 Suites extraites et valeurs d'adhérence

74.1 ✍ *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *une suite de vecteurs de E. La suite* $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *est une* **suite extraite** *de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *si, et seulement si, il existe une application strictement croissante* $\varphi : \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ *telle que*

$$\forall\, k\in\mathbb{N},\qquad v_k = u_{\varphi(k)}.$$

74.2 Autrement dit, l'***extractrice*** φ sélectionne les termes de la suite u d'indice $n = \varphi(k)$.
74.3 On dit aussi que la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une ***sous-suite*** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
74.4 Double extraction
Si la suite $(w_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la sous-suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors il existe une extractrice ψ telle que

$$\forall\, m\in\mathbb{N},\qquad w_m = v_{\psi(m)} = u_{\varphi[\psi(m)]} = u_{(\varphi\circ\psi)(m)}.$$

On sélectionne cette fois les termes de la suite u ayant pour indice $n = \varphi(k)$ avec $k = \psi(m)$.

75. ➙ *Si la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\ell\in E$, *alors toute suite extraite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente et tend aussi vers* ℓ.

76. ➙ *Si les deux suites extraites* $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ *convergent vers le même vecteur* ℓ, *alors la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et sa limite est égale à* ℓ.

77. On connaît le théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite réelle ou complexe bornée, on peut extraire une suite convergente.
77.1 ✍ *Un élément* ℓ *de E est une* **valeur d'adhérence** *de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *lorsqu'il existe une suite extraite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui converge vers* ℓ.
77.2 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet ℓ pour valeur d'adhérence si, et seulement si,

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \forall\, N\in\mathbb{N},\ \exists\, n\geqslant N,\quad \|u_n-\ell\|\leqslant\varepsilon.$$

77.3 Une suite convergente n'a qu'une seule valeur d'adhérence : sa limite.
77.4 ➙ *Une suite qui admet au moins deux valeurs d'adhérence est divergente.*

Entraînement

78. Questions pour réfléchir
1. Pourquoi les restes d'une série divergente ne sont-ils pas définis ?
2. Si $\sum u_n$ est une série convergente, alors les séries $\sum v_n$ et $\sum(u_n+v_n)$ sont de même nature.
3.a Que dire de la somme de deux séries divergentes ?
3.b Que dire de $\sum\mathfrak{Re}(u_n)$ lorsque $\sum u_n$ est divergente ?
4. Discuter la nature de la série $\sum(u_n+v_n+w_n)$ en fonction de la nature des séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$.
5. Une suite qui tend vers l'infini n'admet pas de valeur d'adhérence.
6. Une suite qui n'est pas bornée peut-elle admettre une valeur d'adhérence ?

79. Soit $\|\cdot\|$, une norme sur un espace vectoriel E. On suppose que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de scalaires qui tend vers le scalaire ℓ. Alors, pour tout vecteur $x\in E$, la suite de terme général $u_k\cdot x$ converge vers le vecteur $\ell\cdot x$.

80. ➙ *Soit* $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, *une application strictement croissante. Alors* $\varphi(n)\geqslant n$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$.

81. Soit E, un espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$.
81.1 Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de vecteurs de E, alors elle vérifie le ***critère de Cauchy*** :

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\, N\in\mathbb{N},\ \forall\, n,p\geqslant N,\quad \|u_n-u_p\|\leqslant\varepsilon.$$

81.2 Réciproquement, si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy, alors elle admet au plus valeur d'adhérence.

82. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite réelle bornée telle que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n + \frac{1}{2}u_{2n} = 0.$$

Si a est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $-2a$ est aussi une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

83. rms132-1154
Pour tout $a\in\mathbb{R}$, on pose

$$\forall\, P\in\mathbb{R}[X],\qquad N_a(P) = \big|P(a)\big| + \int_0^1 \big|P'(t)\big|\,\mathrm{d}t.$$

1. L'application N_a est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $P_n = (X/2)^n$. La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, $-2<a\leqslant 2$.

(Étudier $\|P_n\|$, cf **[69]**.)

84. Méthode de Newton (rms130-963)
L'espace $E=\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est muni de la norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire canonique sur E.
1. Cette norme est sous-multiplicative **[38.2]**.
2. On suppose connue une matrice M_0 telle que

$$\|I_n - AM_0\| < 1$$

et on pose

$$\forall\, k\in\mathbb{N},\quad M_{k+1} = 2M_k - M_kAM_k.$$

2.a S'il existe une colonne X_0 non nulle telle que

$$AM_0X_0 = 0\in\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}),$$

alors il existe une matrice $B\in E$ non nulle telle que

$$AM_0B = 0\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}).$$

Comme il est impossible que

$$\big\|(I_n - AM_0)B\big\| < \|B\|,$$

la matrice AM_0 est inversible.
2.b Exprimer $I_n - AM_{k+1}$ en fonction de $I_n - AM_k$. En déduire que AM_k converge vers I_n lorsque k tend vers $+\infty$.
2.c La matrice A est inversible et les matrices M_k convergent vers la matrice inverse A^{-1} lorsque k tend vers l'infini.
2.d Estimer la vitesse de convergence de cette méthode. Quelle difficulté cette méthode pose-t-elle ?

85. Diamètre d'une partie bornée
Le ***diamètre*** d'une partie non vide et bornée A de E est défini par

$$\phi(A) = \sup_{(x,y)\in A\times A} d(x,y).$$

1. Il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telles que
$$\phi(A) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{d}(x_n, y_n).$$
2. Que dire de A lorsque $\phi(A) = 0$?
3. Quelle que soit la norme N, le diamètre de la sphère unité et celui de la boule unité sont égaux à 2.

IV

Applications lipschitziennes

86. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, deux espaces vectoriels normés et $\Omega \subset E$.
86.1 ✍ *Une application $f : \Omega \to F$ est k-***lipschitzienne** *lorsque*

$$\forall\, (x,y) \in \Omega\times\Omega, \quad \big\|f(x) - f(y)\big\|_F \leqslant k\|x-y\|_E.$$

On note $\mathcal{L}_k(\Omega, F)$, l'ensemble des applications k-lipschitziennes de Ω dans F.
86.2 ✍ *L'ensemble des applications* **lipschitziennes** *de Ω dans F est noté $\mathcal{L}(\Omega, F)$ et défini par :*

$$\mathcal{L}(\Omega, F) = \bigcup_{k\in\mathbb{R}_+} \mathcal{L}_k(\Omega, F).$$

87. Propriétés des applications lipschitziennes
87.1 Si $0 \leqslant k \leqslant k'$, alors toute application k-lipschitzienne est aussi k'-lipschitzienne.
87.2 L'ensemble $\mathcal{L}(\Omega, F)$ est un espace vectoriel.
87.3 Si $f : \Omega \to F$ et $g : F \to G$ sont lipschitziennes, alors la composée $g \circ f : \Omega \to G$ est lipschitzienne.
87.4 Le produit d'une application lipschitzienne bornée par une application lipschitzienne bornée est une application lipschitzienne.
87.5 ➙ **Composition des limites**
Si l'application $f : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ est lipschitzienne et si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$, alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell) \in F$.

88. Exemples
88.1 Une fonction constante est 0-lipschitzienne.
88.2 L'application $[x \mapsto \|x\|_E]$ est 1-lipschitzienne de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
88.3 Pour tout $a \in E$, l'application $[x \mapsto \mathrm{d}(x,a)]$ est lipschitzienne de E dans $\mathbb{R}$.
88.4 Si $\mathbb{R}^3$ est muni de la norme produit **[37.2]**, alors les applications

$$[(x,y,z) \mapsto x], \quad [(x,y,z) \mapsto y], \quad [(x,y,z) \mapsto z]$$

sont lipschitziennes de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.

IV.1 Distance à une partie

89.1 ✍ *La* **distance d'un point $x \in E$ à une partie non vide** *A de E est définie par*

$$d(x, A) = \inf_{y\in A} d(x,y).$$

89.2 Il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que

$$d(x, A) = \lim_{n\to+\infty} d(x, u_n)$$

et une telle suite est bornée.

89.3 La distance de x à une partie A est nulle si, et seulement si, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que

$$\lim_{n\to+\infty} d(x, u_n) = 0.$$

90. ➙ *Soit A, une partie non vide de E. L'application $[x \mapsto \mathrm{d}(x, A)]$ est lipschitzienne de (E, N) dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$:*

$$\forall\, (x,y) \in E\times E, \quad \big|d(x,A) - d(y,A)\big| \leqslant d(x,y).$$

IV.2 Applications linéaires continues

91. ✍ *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, deux espaces vectoriels normés. On note $\mathrm{L}_c(E,F)$, l'ensemble des applications linéaires lipschitziennes de E dans F.*

92. L'ensemble $\mathrm{L}_c(E,F)$ est un espace vectoriel.

93. ➙ **Caractérisation de $\mathrm{L}_c(E,F)$**
Soit f, une application linéaire de E dans F. Les propriétés suivantes sont équivalentes.
1. *L'application f est lipschitzienne sur E.*
2. *Il existe $k > 0$ tel que*
$$\forall\, x \in E, \quad \|f(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E.$$
3. *L'application f est bornée sur la sphère unité de E.*
4. *L'application f est bornée sur la boule unité fermée de E.*
5. *L'application f est bornée sur la boule unité ouverte de E.*
6. *L'application f est bornée au voisinage de l'origine.*

94. Méthodes
On démontrera plus loin [**2.64**] qu'une application linéaire est continue si, et seulement si, elle est lipschitzienne.
94.1 On démontre donc qu'une application linéaire T est continue sur E en prouvant l'existence d'une constante $k > 0$ telle que

$$\forall\, x \in E, \quad \big\|T(x)\big\| \leqslant k\|x\|.$$

94.2 Réciproquement, on démontre qu'une application linéaire T n'est pas continue sur E en exhibant une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E tels que

$$\frac{\big\|T(x_n)\big\|}{\|x_n\|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

95. Exemples
95.1 Que $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ soit muni de la norme $\|\cdot\|_1$, de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ ou de la norme produit $\|\cdot\|_\infty$, la transposition est continue :

$$\forall\, M \in E, \qquad \|M^\top\| \leqslant \|M\|.$$

95.2 Soient E, un espace préhilbertien réel et $x_0 \in E$. L'application $f = [x \mapsto \langle\, x_0 \,|\, x\,\rangle]$ est continue :

$$\forall\, x \in E, \qquad \big|f(x)\big| \leqslant \|x_0\|\,\|x\|.$$

95.3 Continuité des formes coordonnées [36]
Pour tout $1 \leqslant k \leqslant d$, la forme coordonnée e_k^* est une application linéaire continue de $(E, N_{\mathscr{B}})$ dans $\mathbb{K}$:

$$\forall\, x \in E, \qquad \big|e_k^*(x)\big| \leqslant N_{\mathscr{B}}(x).$$

Toute forme linéaire sur E est donc continue pour la norme $N_{\mathscr{B}}$.
95.4 Si l'espace E des suites complexes convergentes est muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$, l'application L qui, à toute suite u de E, associe sa limite $L(u)$ est continue :

$$\forall\, u \in E, \qquad \big|L(u)\big| \leqslant \|u\|_\infty.$$

95.5 Si $E = \ell^\infty(\mathbb{K})$ est muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$, alors les endomorphismes T et D de E définis par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad T(u)_n = u_{n+1} \quad \text{et} \quad D(u)_n = u_{n+1} - u_n$$

sont continus :

$$\forall\, u \in E, \quad \big\|T(u)\big\|_\infty \leqslant \|u\|_\infty, \quad \big\|D(u)\big\|_\infty \leqslant 2\|u\|_\infty.$$

95.6 Exemples de formes linéaires sur $E = \mathscr{C}^0([0,1])$
On considère les formes linéaires définies par

$$V(f) = f(1) - f(0) \quad \text{et} \quad T_\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

où φ est une fonction continue et positive sur $[0,1]$.

1. Si E est muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$, alors les formes linéaires V et T_φ sont continues :

$$\forall\, f \in E, \quad \big|V(f)\big| \leqslant 2\|f\|_\infty \quad \text{et} \quad \big|T_\varphi(f)\big| \leqslant \left[\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right]\|f\|_\infty.$$

2. On suppose que E est muni de la norme $\|\cdot\|_1$ de convergence en moyenne.
   2.a La forme linéaire V n'est pas continue.
   2.b La forme linéaire T_φ est continue :

$$\forall\, f \in E, \quad \big|T_\varphi(f)\big| \leqslant \|\varphi\|_\infty\, \|f\|_1.$$

3. On suppose que E est muni de la norme $\|\cdot\|_2$ de convergence en moyenne quadratique.
   3.a La forme linéaire V n'est pas continue.
   3.b La forme linéaire T_φ est continue.

Séries et applications linéaires continues

96. ➙ *Si $\sum u_n$ est une série convergente de vecteurs de E et si*

$$T : E \to F$$

est une application linéaire continue, alors la série $\sum T(u_n)$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} T(u_n) = T\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right).$$

97. Caractérisation des séries complexes convergentes
97.1 Une série complexe $\sum u_n$ est convergente si, et seulement si, la série conjuguée $\sum \overline{u_n}$ est convergente.
97.2 ➙ *Une série complexe $\sum u_n$ est convergente si, et seulement si, les deux séries réelles $\sum \mathfrak{Re}(u_n)$ et $\sum \mathfrak{Im}(u_n)$ sont convergentes et dans ce cas,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{Re}(u_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{Im}(u_n).$$

97.3 Autrement dit, si la série complexe $\sum u_n$ est convergente, alors

$$\mathfrak{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{Re}(u_n) \quad \text{et} \quad \mathfrak{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{Im}(u_n).$$

IV.3 Norme subordonnée

98. ✍ *Soit $f \in \mathrm{L}_c(E,F)$, une application linéaire continue* [**93**]. *La* **norme d'application linéaire** *de f, dite* **norme subordonnée** *aux normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$, est définie par*

$$|||f||| = \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F.$$

99. ➙ *L'application $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathrm{L}_c(E,F)$.*

100.1 Si $f \in \mathrm{L}_c(E,F)$, alors

$$\forall\, x \in E, \quad \|f(x)\|_F \leqslant |||f|||\, \|x\|_E.$$

100.2 Si $f \in \mathrm{L}_c(E)$, alors

$$\forall\, \lambda \in \mathrm{Sp}(f), \quad |\lambda| \leqslant |||f|||.$$

101. ➙ *Si $f \in \mathrm{L}_c(E,F)$ et $g \in \mathrm{L}_c(F,G)$, alors $g \circ f \in \mathrm{L}_c(E,G)$ et*

$$|||g \circ f|||_{E,G} \leqslant |||g|||_{F,G}\, |||f|||_{E,F}.$$

En particulier, l'application $|||\cdot|||$ est une norme sous-multiplicative [**33**] *sur $\mathrm{L}_c(E)$.*

102. Méthodes pratiques de calcul
La plupart du temps, on se contente de prouver qu'une application linéaire est continue et il suffit pour cela de trouver un majorant de la norme subordonnée [**102.1**].
Pour calculer exactement la norme subordonnée, il faut ensuite minorer cette norme [**102.2**], [**102.3**].
102.1➙ *Soit $f \in \mathrm{L}(E,F)$. Si K est une constante réelle telle que*

$$\forall\, x \in E, \quad \|f(x)\|_F \leqslant K\, \|x\|_E$$

alors l'application linéaire f est continue et $|||f||| \leqslant K$.
102.2➙ *Si l'application linéaire $f : E \to F$ est continue et s'il existe un vecteur $x_0 \neq 0_E$ tel que*

$$\big\|f(x_0)\big\|_F = k\|x_0\|_E,$$

alors $|||f||| \geqslant k$.
102.3➙ *Si l'application linéaire $f : E \to F$ est continue et s'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs* non nuls *telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\big\|f(x_n)\big\|_F}{\|x_n\|_E} = k,$$

alors $|||f||| \geqslant k$.

Extension aux matrices

103. On *admet* que, pour toute norme N sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une constante $K > 0$ (qui dépend de N et de A) telle que

$$\forall\, X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad N(AX) \leqslant K\, N(X).$$

103.1✍ *Soit N, une norme sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. La* **norme subordonnée** *à N de la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est définie par*

$$|||A||| = \sup_{N(X)=1} N(AX).$$

103.2 Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\forall\, X \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K}), \quad N(AX) \leqslant |||A|||\, N(X).$$

103.3➙ *Pour toute norme N sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, la norme subordonnée à N est une norme sous-multiplicative sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.*

Entraînement

104. Questions pour réfléchir
1. L'ensemble $\mathcal{L}_k(\Omega, F)$ est-il un espace vectoriel ?
2. Soient E et F, deux espaces vectoriels isomorphes et φ, un isomorphisme de F sur E.
Pour toute norme N sur E, l'application $\|\cdot\| = N \circ \varphi$ est une norme sur F.
3. Si f et g sont lipschitziennes de Ω dans $\mathbb{R}$, alors $\max\{f,g\}$ et $\min\{f,g\}$ sont lipschitziennes de Ω dans $\mathbb{R}$.
4. Donner une condition sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ pour que

$$d(0,I) = \min_{y\in I} d(0,y).$$

5. Si $f \in \mathrm{L}_c(E,F)$, alors $|||f|||$ est la constante de Lipschitz optimale [**111**] de f.

105. On suppose que l'espace $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est muni de la norme $|||\cdot|||$ subordonnée à une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et on suppose que $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de matrices qui tend vers la matrice L.
Quelle que soit la colonne $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, la suite $(M_kX)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la colonne LX.

106. L'espace vectoriel E est muni d'une norme $\|\cdot\|$ et l'espace $\mathrm{L}_c(E)$ des endomorphismes continus de E est muni de la norme $|||\cdot|||$ subordonnée à la norme choisie sur E.
Si $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente d'endomorphismes continus qui converge vers l'endomorphisme $\Phi \in \mathrm{L}_c(E)$, alors

$$\forall\, x \in E, \quad \lim_{k\to+\infty} \varphi_k(x) = \Phi(x).$$

Applications lipschitziennes

107. Pour tout $k > 0$, l'ensemble $\mathcal{L}_k(\Omega, F)$ est convexe.

108. La fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x \in [0,1], \quad f(x) = x - x^2$$

vérifie

$$\forall\, 0 \leqslant x < y \leqslant 1, \quad \big|f(x) - f(y)\big| < |x - y|$$

et appartient à $\mathcal{L}_1([0,1],\mathbb{R})$. Mais quel que soit $0 \leqslant k < 1$, la fonction f n'appartient pas à $\mathcal{L}_k([0,1],\mathbb{R})$. →**[111]**

109. Soit E, un espace vectoriel normé par $\|\cdot\|$. On considère l'application $f : E \to E$ définie par

$$\forall\, x \in E, \qquad f(x) = \frac{x}{1 + \|x\|}.$$

1. L'application f est injective.
2. L'image de f est la boule unité ouverte de E.
3. L'application f est 2-lipschitzienne.

110. Soient $(E, \|\cdot\|)$, un espace vectoriel normé et A, une partie non vide de E. On considère une application $f : A \to \mathbb{R}$ qu'on suppose k-lipschitzienne et on pose

$$\forall\, x \in E, \quad g(x) = \inf\big\{k\,\|x - y\| + f(y),\ y \in A\big\}.$$

1. Soit $x \in A$. Pour tout $y \in A$,

$$k\,\|x - y\| + f(y) \geqslant f(x)$$

donc le réel $g(x)$ est bien défini et égal à $f(x)$.

2. Soit $x \in A^c$. Il existe $x_0 \in A$ tel que

$$\forall\, y \in A, \quad k\,\|x - y\| + f(y) \geqslant f(x_0) - k\,\|x - x_0\|.$$

Le réel $g(x)$ est bien défini, donc g est une application de E dans $\mathbb{R}$ qui prolonge f.

3. L'application g est k-lipschitzienne (imiter **[90]**).

111. Constante de Lipschitz optimale
Soit $f : \Omega \to F$, une fonction lipschitzienne.
111.1 Il existe $k_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\big\{k \in \mathbb{R}_+ \,:\, f \in \mathcal{L}_k(\Omega, F)\big\} = [k_0, +\infty[\,.$$

111.2 ✍ *Si $f \in \mathcal{L}(\Omega, F)$, la* **constante de Lipschitz optimale** *de f est*

$$\min\big\{k \in \mathbb{R}_+ \,:\, f \in \mathcal{L}_k(\Omega, F)\big\}.$$

111.3 Une fonction lipschitzienne est constante si, et seulement si, sa constante de Lipschitz optimale est nulle.
111.4 La constante de Lipschitz optimale des exemples **[88.2]** et **[88.3]** est égale à 1.
111.5 On peut voir la constante de Lipschitz optimale comme une borne supérieure.
Soit $\Omega \subset E$. Pour tout $(x,y) \in \Delta = \Omega \times \Omega \setminus \big\{(x,x),\ x \in \Omega\big\}$, on pose

$$T(x,y) = \frac{\big\|f(x) - f(y)\big\|_F}{\|x - y\|_E}.$$

1. Une fonction $f : \Omega \to F$ est lipschitzienne si, et seulement si, la fonction T est bornée sur Δ. Dans ce cas, la constante de Lipschitz optimale de f est la borne supérieure de T sur Δ.
2. La fonction T atteint-elle un maximum ? →**[108]**
3. L'application qui, à toute application $f \in \mathcal{L}(\Omega, F)$, associe la constante de Lipschitz optimale de f est-elle une norme sur $\mathcal{L}(\Omega, F)$?

Applications linéaires continues

112. Soit $f \in \mathrm{L}_c(E, F)$.

$$|||f||| = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|f(x)\|_F = \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E < 1} \|f(x)\|_F.$$

113. Soit $f \in \mathrm{L}_c(E, F)$, telle que $|||f||| = \max_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F$. Alors

$$|||f||| = \max_{\|x\|_E \leqslant 1} \|f(x)\|_F = \max_{x \neq 0_E} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

mais l'expression $\|f(x)\|_F$ n'atteint pas nécessairement un maximum sur la boule unité ouverte $[\|x\|_E < 1]$.

114. Soient E et F, deux espaces vectoriels normés. L'espace $\mathrm{L}_c(E, F)$ est muni de la norme $|||\cdot|||$ subordonnée aux normes sur E et F. Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications linéaires continues converge vers $f \in \mathrm{L}_c(E, F)$:

$$\lim_{n\to+\infty} |||f - f_n||| = 0$$

et si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs converge vers $x \in E$:

$$\lim_{n\to+\infty} \|x - x_n\|_E = 0$$

alors la suite $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x) \in F$.

$$\lim_{n\to+\infty} \|f(x) - f_n(x_n)\|_F = 0$$

115. Norme d'un projecteur
Soit $p \in \mathrm{L}(E)$, un projecteur non identiquement nul.
115.1 Si le projecteur p est lipschitzien, alors $|||p||| \geqslant 1$.
115.2 Si E est un espace euclidien et si p est un projecteur orthogonal, alors il est lipschitzien et $|||p||| = 1$.

116. Soient u et v dans $\mathrm{L}_c(E)$. Si

$$|||u \circ v||| = |||u|||^2 \quad \text{et} \quad |||v \circ u||| = |||v|||^2,$$

alors $|||v||| = |||u|||$.

117. L'espace $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et l'espace $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est muni de la norme $|||\cdot|||$ subordonnée à $\|\cdot\|_\infty$.

1.

$$\forall\, A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad |||A||| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

2.

$$\forall\, \lambda \in \mathrm{Sp}(A), \quad |\lambda| \leqslant |||A|||.$$

118. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0)\right| \quad \text{et} \quad \|P\|_2 = \sup_{t\in[-1,1]} \left|P(t)\right|$$

ainsi que

$$\|P\|_3 = \max_{k\in\mathbb{N}} |a_k| \quad \text{si} \quad P = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k.$$

1. Si $\mathbb{R}[X]$ est muni de la norme $\|\cdot\|_1$, alors la dérivation

$$D = \left[P \mapsto P'\right]$$

est un endomorphisme continu et $|||D||| = 1$.

2. Si $\mathbb{R}[X]$ est muni de la norme $\|\cdot\|_2$ ou de la norme $\|\cdot\|_3$, alors l'endomorphisme D n'est pas continu.

119. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite réelle sommable **[40.2]**. Pour tout polynôme

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X],$$

on pose

$$\|P\|_\infty = \max_{k\in\mathbb{N}} |a_k| \quad \text{et} \quad \varphi(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k u_k.$$

L'application $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$ et l'application φ est une forme linéaire continue sur $\mathbb{R}[X]$ telle que

$$|||\varphi||| = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|.$$

V

Comparaison des normes

120. Un même espace vectoriel E peut être muni de différentes normes et deux normes distinctes sur un même espace vectoriel définissent *a priori* deux topologies différentes.

121. ✍ *La norme N_2 est* **équivalente** *à la norme N_1 lorsqu'il existe deux réels a et b strictement positifs tels que*

$$\forall\, x \in E, \quad aN_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant bN_1(x).$$

122. ✍ *On dit que la norme N_1 est* **dominée*** *par la norme N_2 si, et seulement si, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\forall\, x \in E, \qquad N_1(x) \leqslant C.N_2(x).$$

123. ➙ *Les normes N_1 et N_2 sont équivalentes si, et seulement si, l'application Id_E est lipschitzienne de (E, N_1) dans (E, N_2) et de (E, N_2) dans (E, N_1).*

124. ➙ *On suppose que les normes N_1 et N_2 sont équivalentes.*

124.1 *Une partie $A \subset E$ est bornée pour N_1 si, et seulement si, elle est bornée pour N_2.*

124.2 *Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour N_1 si, et seulement si, elle converge pour N_2 et, dans ce cas, sa limite est la même pour les deux normes.*

125. Si deux normes ne sont pas équivalentes, une même suite peut converger vers deux limites différentes. →**[139]**

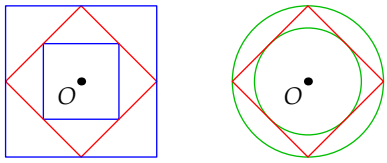
126. Comparaison des normes usuelles sur $\mathbb{K}^d$

Les trois normes usuelles $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.

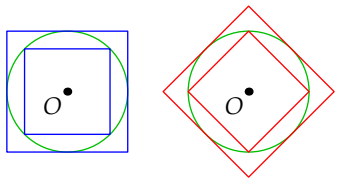
$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathbb{K}^d, \quad \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 &\leqslant d\|x\|_\infty \\ \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 &\leqslant \sqrt{d}\|x\|_\infty \\ \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 &\leqslant \sqrt{d}\|x\|_2 \end{aligned}$$

126.1 On peut traduire géométriquement l'équivalence des normes usuelles sur $\mathbb{R}^2$ en comparant les cercles unité de ces différentes normes.

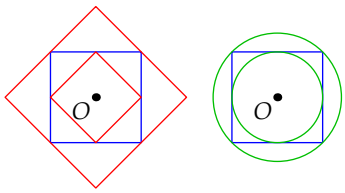
126.2 Si $\|x\|_1 = 1$, alors $1/2 \leqslant \|x\|_\infty \leqslant 1$ et $1/\sqrt{2} \leqslant \|x\|_2 \leqslant 1$.



126.3 Si $\|x\|_2 = 1$, alors $1/\sqrt{2} \leqslant \|x\|_\infty \leqslant 1$ et $1 \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{2}$.



126.4 Si $\|x\|_\infty = 1$, alors $1 \leqslant \|x\|_1 \leqslant 2$ et $1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{2}$.



127. Méthodes

On démontrera que, *sur un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes*. Dans ce cas, les calculs ne servent qu'à expliciter des constantes strictement positives a et b qui vérifient l'encadrement **[121]**.

127.1 Pour démontrer que les normes N_1 et N_2 sont équivalentes, on démontre successivement que N_1 est dominée **[122]** par N_2, puis que N_2 est dominée par N_1.

127.2 Pour démontrer que deux normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes sur E, il suffit de démontrer que N_1 n'est pas dominée par N_2 *ou* que N_2 n'est pas dominée par N_1.

127.3 Pour démontrer que N_1 n'est pas dominée par N_2, il s'agit de démontrer que le rapport $N_1(x)/N_2(x)$ n'est pas borné lorsque x parcourt $E \setminus \{0_E\}$.

Il suffit pour cela de trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est bornée pour une norme sans être bornée pour l'autre norme :

$$(1) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad N_2(x_n) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} N_1(x_n) = \infty$$

ou une suite qui tend vers 0_E pour une norme sans tendre vers 0_E pour l'autre norme :

$$(2) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad N_1(x_n) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} N_2(x_n) = 0$$

ou une suite telle que

$$(3) \qquad N_2(x_n) = o\big(N_1(x_n)\big)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Exemples et contre-exemples

128. Trois normes équivalentes

On considère l'espace vectoriel E des fonctions $f \in \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ telles que $f(0) = 0$.

1. Les applications N_1, N_2 et N_3 définies par

$$\forall\, f \in E, \qquad \begin{cases} N_0(f) &= \|f'\|_\infty \\ N_1(f) &= \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \\ N_2(f) &= \|f + f'\|_\infty \end{cases}$$

sont des normes sur E.

2. Soit $f \in E$. Comme

$$\forall\, t \in [0,1], \quad f(t) = \int_0^t f'(s)\,\mathrm{d}s$$

alors $N_0(f) \leqslant N_1(f) \leqslant 2N_0(f)$

3. Soient $f \in E$ et $g = f + f'$. Comme

$$\forall\, t \in [0,1], \quad f(t) = e^{-t}\int_0^t e^s g(s)\,\mathrm{d}s$$

alors $\|f\|_\infty \leqslant \|g\|_\infty$ et $N_2(f) \leqslant N_1(f) \leqslant 3N_2(f)$.

129. Les normes usuelles sur l'espace $\ell^1(\mathbb{R})$ des suites réelles sommables **[40]** ne sont pas équivalentes :

1.
$$\forall\, x \in \ell^1(\mathbb{R}), \quad \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$x_n = \Big(\underbrace{1/n, \cdots, 1/n}_{n \text{ fois}}, 0, 0, \ldots\Big).$$

Alors

$$\|x_n\|_\infty = \frac{1}{n}, \quad \|x_n\|_1 = 1, \quad \|x_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

130. Sur l'espace $E = \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ des applications continues sur le segment $[a,b]$, la norme de convergence en moyenne est dominée par la norme uniforme :

$$\forall\, f \in E, \qquad \|f\|_1 \leqslant (b-a)\|f\|_\infty.$$

Les fonctions $f_n = [t \mapsto t^n]$ montrent que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

131. *Suite de* **[118]** –

1.a La norme $\|\cdot\|_1$ domine $\|\cdot\|_3$ et comme

$$\forall\, P \in \mathbb{R}[X],\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \big|P(t)\big| \leqslant \|P\|_1 \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|t|^k}{k!}$$

elle domine aussi $\|\cdot\|_2$.

1.b La norme $\|\cdot\|_1$ n'est dominée ni par $\|\cdot\|_2$, ni par $\|\cdot\|_3$ (considérer la base canonique de $\mathbb{R}[X]$).

2. La norme $\|\cdot\|_2$ ne domine pas $\|\cdot\|_3$ (considérer les polynômes $P_n = (1-X^2)^{2n}$) et la norme $\|\cdot\|_3$ ne domine pas $\|\cdot\|_2$ (considérer les polynômes $Q_n = 1 + X + \cdots + X^n$).

Entraînement

132. Questions pour réfléchir

1. *Suite de* **[121]** – Quelles sont les constantes a et b optimales ?

2. L'équivalence **[121]** entre les normes sur E est une relation d'équivalence.

133. Soient $N_1, \ldots, N_p$, des normes sur l'espace E. On pose

$$\forall\, x \in E, \quad \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{p} N_k(x) \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leqslant k\leqslant p} N_k(x).$$

Les applications $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ainsi définies sont des normes équivalentes sur E.

134. rms132-522

Soit E, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes. Pour tout polynôme $Q \in E$ distinct du polynôme nul, on pose

$$\forall\, P \in E, \qquad N_Q(P) = \sup_{t\in[-1,1]} \big|P(t)Q(t)\big|.$$

1. L'application N_Q est une norme sur E.

2. Si le polynôme Q ne s'annule pas sur le segment $[-1,1]$, alors la norme N_Q est équivalente à la norme N_1 (associée au polynôme $Q_0 = 1$).

135. rms132-940

Soit E, l'espace vectoriel des suites réelles bornées. Pour toute suite $u \in E$, on pose

$$\|u\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |u_k| \quad \text{et} \quad N(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|u_k|}{2^k}.$$

Les applications N et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur E. La norme N est dominée par la norme $\|\cdot\|_\infty$, mais ces deux normes ne sont pas équivalentes.

136. L'espace vectoriel $E = \mathscr{C}^1([-1,1],\mathbb{R})$ est muni des normes usuelles :

$$\|f\|_\infty = \max_{t\in[-1,1]} \big|f(t)\big| \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \int_{-1}^{1} \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t,$$

de la norme hilbertienne définie par

$$\|f\|_2 = \sqrt{\big[f(0)\big]^2 + \int_0^1 \big[f'(s)\big]^2\,\mathrm{d}s}$$

et des normes N_1 et N_2 définies par

$$N_1(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad N_2(f) = \big|f(0)\big| + \|f'\|_\infty.$$

1. Les normes N_1 et N_2 sont équivalentes :

$$\forall\, f \in E, \quad N_2(f) \leqslant N_1(f) \leqslant 2N_2(f).$$

2.a Les normes N_1 et N_2 dominent la norme $\|\cdot\|_\infty$.

2.b Il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E qui est bornée pour $\|\cdot\|_\infty$, sans être bornée pour N_1, ni pour N_2.

3. La norme $\|\cdot\|_1$ est dominée par $\|\cdot\|_\infty$, mais il existe une suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E qui est bornée pour $\|\cdot\|_1$ sans être bornée pour $\|\cdot\|_\infty$.

4. La norme $\|\cdot\|_\infty$ est dominée par la norme $\|\cdot\|_2$:

$$\forall\, f \in E, \quad \|f\|_\infty \leqslant \sqrt{2}\|f\|_2.$$

La suite de fonctions de terme général $f_n = [t \mapsto \sin nt]$ est bornée pour $\|\cdot\|_\infty$ alors que $\|f_n\|_2 \sim {}^n\!/\!\sqrt{2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

137. Soient E, l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et $\varphi \in E$, une application positive, non identiquement nulle.

1. Les applications N et N_φ définies par

$$\forall\, f \in E, \quad N(f) = \big|f(0)\big| + \int_0^1 \big|f'(t)\big|\,\mathrm{d}t$$

et par

$$\forall\, f \in E, \quad N_\varphi(f) = \left|\int_0^1 f(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| + \int_0^1 \big|f'(t)\big|\,\mathrm{d}t$$

sont des normes sur E.

2. Ces normes sont équivalentes. En particulier,

$$\forall\, f \in E, \quad N_\varphi(f) \leqslant \left(1 + \int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)\cdot N(f).$$

138. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, fixé. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$\|P\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} \big|P(t)\big| \quad \text{et} \quad \|P\| = \big|P(0)\big| + \sum_{k=1}^{n} \big|P(1/k)\big|.$$

Il existe deux réels a et b strictement positifs tels que

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad a\|P\|_\infty \leqslant \|P\| \leqslant b\|P\|_\infty.$$

La valeur optimale de b est égale à $(n+1)$. La valeur optimale de a est inférieure à

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^n}.$$

139. On considère l'espace E des fonctions rationnelles de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ dont tous les pôles appartiennent à $\mathbb{U}$, sur lequel on définit deux normes en posant

$$N_1(f) = \sup_{|z|=\frac{1}{2}} \big|f(z)\big| \quad \text{et} \quad N_2(f) = \sup_{|z|=2} \big|f(z)\big|.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n définie par

$$f_n(z) = \frac{z^n}{1+z^n}$$

appartient à E.

2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction constante, égale à 0, pour la norme N_1 et converge vers la fonction constante, égale à 1, pour la norme N_2.

Questions, exercices & problèmes

Approfondissement

140. Deux espaces vectoriels E et F sont munis chacun de deux normes équivalentes : il existe quatre réels strictement positifs a, b, α et β tels que

$$\forall\, x \in E, \quad a\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant b\|x\|_2$$
$$\forall\, y \in F, \quad \alpha N_2(y) \leqslant N_1(y) \leqslant \beta N_2(y).$$

On note $|||\cdot|||_1$ (resp. $|||\cdot|||_2$), la norme sur $\mathrm{L}_c(E,F)$ subordonnée aux normes $\|\cdot\|_1$ et N_1 (resp. aux normes $\|\cdot\|_2$ et N_2).
Comparer $|||\cdot|||_1$ et $|||\cdot|||_2$.

141. **rms132-523**
Sur l'espace $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, il existe des normes sous-multiplicatives **[38.4]**, mais il n'existe pas de norme N telle que

$$\forall\, A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \qquad N(A.B) = N(A).N(B).$$

142. Pour $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$N(u) = \int_0^1 |x - ty|\,\mathrm{d}t.$$

1. L'application N est une norme sur $E = \mathbb{R}^2$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$N(x,1) = \begin{cases} 1/2 - x & \text{pour } x \leqslant 0, \\ x^2 - x + 1/2 & \text{pour } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x - 1/2 & \text{pour } x \geqslant 1. \end{cases}$$

2. Il existe deux réels a et b strictement positifs tels que

$$\forall\, u \in \mathbb{R}^2, \qquad a\,\|u\|_2 \leqslant N(u) \leqslant b\,\|u\|_2$$

(où $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne canonique). Le couple optimal est

$$(a,b) = \Big(\frac{1}{2\sqrt{2}},\, 1\Big).$$

143. **rms132-800**
Soient N_1 et N_2, deux normes sur un espace vectoriel réel E. On note B_k, la boule unité ouverte de E relative à la norme N_k (pour $k = 1$ ou 2). Les deux normes N_1 et N_2 sont égales si, et seulement si, les boules B_1 et B_2 sont égales.

144. **rms132-527**
Soit E, l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$f(0) = f'(0) = 0.$$

Pour toute fonction $f \in E$, on pose

$$N(f) = \|f + 2f' + f''\|_\infty.$$

1. L'application N est une norme sur E.
2. Pour $f \in E$, on pose $g = f + 2f' + f''$. Alors

$$\forall\, t \in [0,1], \quad f(t) = e^{-t}\int_0^t (t-s)e^s g(s)\,\mathrm{d}s.$$

3. Il existe un réel $a > 0$ tel que

$$\forall\, f \in E, \qquad \|f\|_\infty \leqslant a.N(f).$$

4. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in [0,1], \quad f_n(t) = t\sin nt$$

prouve que les deux normes N et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur E.

145. **rms132-801**
L'application N définie sur l'espace vectoriel E des suites réelles sommables **[40.2]** par

$$\forall\, u \in E, \qquad N(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n |u_n|$$

est une norme sur E si, et seulement si, la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et si tous ses termes sont strictement positifs.

Pour aller plus loin

146. On note E, le sous-espace de $\mathscr{A}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ engendré par les applications

$$e_\lambda = \big[x \mapsto e^{\lambda x}\big]$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. L'application N définie par

$$\forall\, f \in E, \qquad N(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!}$$

est une norme sur E.

147. Pour toute fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, on pose

$$N(f) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\int_0^1 f(t)t^n\,\mathrm{d}t\right|.$$

L'application N est une norme sur $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

148. La norme définie sur l'espace E des suites réelles bornées par

$$\forall\, u \in E, \quad \|u\| = \sup_{x\in[0,1[} \left|(1-x)\sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k\right|$$

est dominée par la norme $\|\cdot\|_\infty$ au sens où :

$$\forall\, u \in E, \quad \|u\| \leqslant \|u\|_\infty.$$

Il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $\|u_n\|$ tende vers 0 alors que $\|u_n\|_\infty = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

149. La norme définie sur l'espace F des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall\, f \in F, \quad \|f\| = \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)e^{-t}|\cos t|\,\mathrm{d}t}$$

est dominée par la norme $\|\cdot\|_\infty$:

$$\exists\, K > 0,\ \forall\, f \in F, \quad \|f\| \leqslant K\|f\|_\infty.$$

Ces deux normes ne sont pas équivalentes car

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, f \in F, \quad \begin{cases} \|f\|_\infty = 1 \\ \|f\| \leqslant \varepsilon \end{cases}.$$

150. L'espace $E = \mathbb{R}[X]$ est muni de la norme définie par

$$\forall\, P \in E, \quad \|P\| = \max_{k\in\mathbb{N}} \frac{\left|P^{(k)}(0)\right|}{k!}.$$

La forme linéaire

$$T = \left[P \mapsto \int_0^1 \frac{P(t)\,\ell\mathrm{n}\,t}{1+t}\,\mathrm{d}t\right]$$

est continue.

151. Distance de Hamming

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E, l'ensemble des mots composés de n lettres appartenant à un alphabet fini $\mathscr{A}$.

$$E = \{a_0a_1\dots a_{n-1},\ (a_k)_{0\leqslant k<n} \in \mathscr{A}^n\}.$$

Étant donnés deux mots $a = a_0a_1\dots a_{n-1}$ et $b = b_0b_1\dots b_{n-1}$ dans E, la ***distance de Hamming*** $\mathrm{d}(a,b)$ est définie par

$$\mathrm{d}(a,b) = \#\{0 \leqslant i < n \,:\, a_i \neq b_i\}.$$

151.1 Quel est le cardinal de E ?

151.2 La distance de Hamming est une distance sur E (au sens de **[24]**).

151.3 Lorsque $\mathscr{A} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, cette distance est associée à une norme.

152. Distances ultramétriques

Soit E, un ensemble (non vide). Une application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ qui est symétrique :

$$\forall\, x,y \in E, \quad \mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(y,x)$$

qui sépare les points :

$$\forall\, x,y \in E, \quad \mathrm{d}(x,y) = 0 \iff x = y$$

et qui vérifie l'***inégalité ultratriangulaire*** :

$$\forall\, x,y,z \in E, \quad \mathrm{d}(x,z) \leqslant \max\{\mathrm{d}(x,y),\ \mathrm{d}(y,z)\}$$

est une ***distance ultramétrique*** sur E.

152.1 Toute distance ultramétrique est une distance au sens **[24]**.

152.2 On considère une distance ultramétrique d sur un ensemble E.

1. Si deux boules ouvertes (ou deux boules fermées) ont un point commun, alors l'une contient l'autre : si $r \leqslant r'$ et s'il existe un point x appartenant à $B(a,r) \cap B(a',r')$, alors

$$B(a,r) \subset B(a',r').$$

2. Tout point d'une boule est un centre de cette boule :

$$\forall\, x \in B(a,r), \quad B(x,r) = B(a,r).$$

3. Tout triangle est isocèle.

4. Toute boule fermée de rayon strictement positif est une partie ouverte. Toute boule ouverte est une partie fermée.

152.3 Distance p-adique

Soient p, un nombre premier et $v_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$, la valuation p-adique.

Étant donnés deux rationnels x et y, on pose $\mathrm{d}(x,y) = 0$ si $x = y$ et

$$\mathrm{d}_p(x,y) = p^{-v_p(x-y)}$$

si $x \neq y$.

L'application d_p est une distance ultramétrique sur $\mathbb{Q}$.

152.4 Autre exemple

Soient X, un ensemble (non vide) quelconque et $E = X^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites d'éléments de X. Quelles que soient les suites x et y dans E, on pose $\mathrm{d}(x,y) = 0$ si $x = y$ et

$$\mathrm{d}(x,y) = \frac{1}{1+k(x,y)} \quad \text{où} \quad k(x,y) = \min\{n \in \mathbb{N} \,:\, x_n \neq y_n\}$$

si $x \neq y$.

L'application d est une distance ultramétrique sur E.

153. Normes sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

1.a Le ***rayon spectral*** défini par

$$\forall\, A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \quad \rho(A) = \max_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$$

est une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1.b Étendu à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ ou à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, le rayon spectral n'est plus une norme.

2. L'application définie par

$$\forall\, A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \quad \|A\| = \sqrt{\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} m_\lambda \lambda^2}$$

(où m_λ désigne la multiplicité de la valeur propre λ) est une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: la norme induite par restriction de la norme euclidienne canonique sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Pour tout entier $p \geqslant 1$, on pose

$$M_p = I_n + \mathrm{Diag}(1/p, \dots, n/p) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

La suite $(M_p)_{p\geqslant 1}$ converge vers I_n pour toute norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

L'application N définie par

$$\forall\, A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \quad N(A) = \sqrt{\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} \lambda^2}$$

n'est donc pas une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

154. Distance SNCF

Soit E, un espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$.

154.1 ✍ *Si deux vecteurs x et y sont proportionnels, alors on pose*

$$d(x,y) = \|x-y\|.$$

Dans le cas contraire, on pose

$$d(x,y) = \|x\| + \|y\|.$$

154.2 L'application d est une distance sur E **[24]**.

154.3 Cette distance n'est pas invariante par translation, elle n'est donc pas associée à une norme.