Index des démonstrations rédigées

Chapitre 1 — Normes

[39.2] 03-01
[39.4] 03-11
[40.3] 03-02
[46.1] 03-06
[84] rms132-1154
[85] rms130-963
[88.1] 03-04
[108] 03-03
[110] rms130-686
[111] rms130-687
[118] 03-05
[129] rms132-1155
[135] rms132-522
[136] rms132-940
[138] rms130-685
[140] rms130-1070
[143] rms132-523
[144] rms130-1009
[145] rms132-800
[146] rms132-527
[147] rms132-801
[148] rms130-1148
[149] rms130-1147
[150] 03-08
[151] 03-09
[152] 03-10

Chapitre 2 — Topologie d'un espace vectoriel normé

[9] 18-07
[27] 18-08
[28.2] 18-09
[33.1] 18-10
[33.3] 18-11
[34.2] 18-42
[35] 18-01
[45] 18-40
[50] 18-05
[70] 18-02
[71] 18-03
[72.1] 18-15
[73] 18-16
[75] 18-17
[76] 18-18
[77] 18-19
[80] 18-20
[81] 18-22
[105] 18-28
[107] 18-24
[123] 18-21
[136] 18-06
[137.1] 130-1000
[139] 18-04
[141] 18-28
[146] 18-38
[149] 18-LimSup

Chapitre 3 — Topologie produit

[25] 18-12
[26] 18-13
[27] 18-14
[39] rms130-686
[53] 18-29
[84] 18-25
[93] 18-33
[94] 18-34
[101] 18-35
[102] 18-36
[133] 18-39
[135] 18-31
[136] 18-32

Exercice 1

1. La norme euclidienne canonique $\|\cdot\|_2$ est sous-multiplicative sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
2. La norme euclidienne canonique est-elle sous-multiplicative sur $\mathbb{R}^n$?

Exercice 2

L'espace $E = \mathscr{C}^1(I)$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $I = [a, b]$ peut être normé par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in I} N\big(f(x)\big) \quad \text{ou par} \quad \|f\|_{\mathscr{C}^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Exercice 3

Pour tout $k > 0$, l'ensemble $\mathcal{L}_k(\Omega, F)$ est convexe.

Exercice 4

Si $0 \leqslant k \leqslant k'$, alors toute application k-lipschitzienne est aussi k'-lipschitzienne.

Exercice 5

L'espace $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et l'espace $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est muni de la norme $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ subordonnée à $\|\cdot\|_\infty$.
1.

$$\forall\, A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad |\!|\!|A|\!|\!| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

2.

$$\forall\, \lambda \in \mathrm{Sp}(A), \quad |\lambda| \leqslant |\!|\!|A|\!|\!|.$$

Exercice 6

Les intervalles sont les parties convexes de $\mathbb{R}$.

Exercice 7

Soient E, l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et $\varphi \in E$, une application positive, non identiquement nulle.
1. Les applications N et N_φ définies par

$$\forall\, f \in E, \quad N(f) = \big|f(0)\big| + \int_0^1 \big|f'(t)\big|\,dt$$

et par

$$\forall\, f \in E, \quad N_\varphi(f) = \left|\int_0^1 f(t)\varphi(t)\,dt\right| + \int_0^1 \big|f'(t)\big|\,dt$$

sont des normes sur E.
2. Ces normes sont équivalentes. En particulier,

$$\forall\, f \in E, \quad N_\varphi(f) \leqslant \left(1 + \int_0^1 \varphi(t)\,dt\right) \cdot N(f).$$

Exercice 8

La norme définie sur l'espace E des suites réelles bornées par

$$\forall\, u \in E, \quad \|u\| = \sup_{x\in[0,1[} \left|(1-x)\sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k\right|$$

est dominée par la norme $\|\cdot\|_\infty$ au sens où :

$$\forall\, u \in E, \quad \|u\| \leqslant \|u\|_\infty.$$

Il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $\|u_n\|$ tende vers 0 alors que $\|u_n\|_\infty = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9

La norme définie sur l'espace F des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall\, f \in F, \quad \|f\| = \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)e^{-t}|\cos t|\,dt}$$

est dominée par la norme $\|\cdot\|_\infty$:

$$\exists\, K > 0,\ \forall\, f \in F, \quad \|f\| \leqslant K\|f\|_\infty.$$

Ces deux normes ne sont pas équivalentes car

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, f \in F, \quad \begin{cases} \|f\|_\infty = 1 \\ \|f\| \leqslant \varepsilon \end{cases}.$$

Exercice 10

L'espace $E = \mathbb{R}[X]$ est muni de la norme définie par

$$\forall\, P \in E, \quad \|P\| = \max_{k\in\mathbb{N}} \frac{\big|P^{(k)}(0)\big|}{k!}.$$

La forme linéaire

$$T = \left[P \mapsto \int_0^1 \frac{P(t)\,\ln t}{1+t}\,dt\right]$$

est continue.

Exercice 11

L'application définie sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ par

$$\|A\| = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \sum_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}|$$

est une norme sous-multiplicative sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 12

On considère une suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 1}$ telle que

$$\forall\, m, n \geqslant 1, \quad u_{m+n} \leqslant \frac{n}{m+n}u_n + \frac{m}{m+n}u_m \qquad (\star)$$

et on pose

$$\ell = \inf_{n\geqslant 1} u_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

Exercice 13

On considère l'espace vectoriel E des fonctions continues sur $[-1,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour toute fonction $f \in E$, on pose

$$T(f) = \int_0^1 f(t)\,dt - \int_{-1}^0 f(t)\,dt.$$

1. L'application T est-elle continue lorsque E est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$?
2. L'application T est-elle continue lorsque E est muni de la norme $\|\cdot\|_1$?

Exercice 14

On considère l'espace E des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, des nombres réels

$$0 \leqslant a_0 < a_1 < \cdots < a_n \leqslant 1$$

et la famille $(L_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ des polynômes interpolateurs de Lagrange associés à ces abscisses (considérés comme des vecteurs de E).

Pour toute fonction $f \in E$, on pose

$$T(f) = \sum_{k=0}^{n} f(a_k)L_k.$$

L'application T est-elle continue ?

Exercice 15

1. L'espace $E = \ell^\infty$ des suites numériques bornées est muni de la norme définie par

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |u_n|.$$

Pour toute suite $u = (u_n)_{n\geqslant 1} \in E$, on considère la suite

$$T(u) = \left(u_1, \frac{u_1+u_2}{2}, \frac{u_1+u_2+u_3}{3}, \ldots, \frac{u_1+\cdots+u_n}{n}, \cdots\right).$$

Étudier la continuité de l'application T.
2. On restreint l'application T au sous-espace F des familles sommables muni de la norme usuelle définie par

$$\|u\|_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|.$$

Alors T est une application continue de $(F, \|\cdot\|_1)$ dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$, mais F n'est pas stable par T.

Exercice 16

L'espace vectoriel E des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est muni de la norme définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} \big|f(t)\big|.$$

Pour toute fonction $f \in E$, on considère l'application $T(f)$ définie par

$$\forall\, x \in [0,1], \quad T(f)(x) = \int_0^1 (x+t)f(t)\,dt.$$

1. Démontrer que T est un endomorphisme de E. Cet endomorphisme est-il surjectif ? injectif ?
2. Démontrer que T est continu.

Exercice 17

Soient A et B, deux parties bornées de $\mathbb{R}$.
1. L'implication suivante est-elle vraie ?

$$A \subset B \implies \inf A \leqslant \inf B$$

2. Démontrer que

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B$$

où $A + B = \{x+y,\ (x,y) \in A \times B\}$.
3. Soient f et g, deux applications bornées d'un ensemble X (non vide) dans $\mathbb{R}$. L'egalité suivante est-elle vraie ?

$$\sup_{x\in X}\big[f(x)+g(x)\big] = \sup_{x\in X} f(x) + \sup_{x\in X} g(x).$$

Exercice 18

1. Déterminer la borne inférieure de l'ensemble

$$A = \left\{x + \frac{1}{x},\ x \in \mathbb{R}_+^*\right\}.$$

2. En déduire la borne inférieure de l'ensemble

$$B = \left\{2^x + 2^{1/x},\ x \in \mathbb{R}_+^*\right\}.$$

Exercice 19

Démontrer que la fonction $[x \mapsto \lfloor x \rfloor]$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 20

L'espace $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ est muni de la norme de convergence uniforme :

$$\|f\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} \big|f(t)\big|.$$

Pour toute fonction $f \in E$, on définit une fonction

$$\varphi(f) : [0,1] \to \mathbb{R}$$

en posant

$$\forall\, x \in [0,1], \quad \varphi(f)(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

1. Démontrer que φ est un endomorphisme continu de E.
2. Calculer la norme subordonnée $|\varphi|$. Cette borne est-elle atteinte ?
3. Démontrer que le sous-espace E_0 des fonctions $f \in E$ telles que $f(0) = 0$ est stable par φ.
4. On note φ_0, l'endomorphisme induit par restriction de φ au sous-espace E_0. Démontrer que cet endomorphisme est continu. Quelle est sa norme subordonnée ? Cette borne est-elle atteinte ?

Exercice 21

Soit E, un espace vectoriel normé par $\|\cdot\|$.

1. Un sous-espace vectoriel F qui contient une boule ouverte $B_o(x_0, r)$ contient aussi la boule ouverte $B_o(0_E, r)$.

2. L'intérieur d'un sous-espace vectoriel strict de E est vide.

Exercice 22

Soit f, une forme linéaire sur E.

1. Si f n'est pas continue, alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0_E telle que $f(x_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. La forme linéaire f est continue si, et seulement si, son noyau est fermé.

Exercice 23

Soient E, un espace préhilbertien et F, un sous-espace vectoriel de E.

1. L'orthogonal de F est un sous-espace fermé.

2. Si $E = F \oplus F^\perp$, alors la projection orthogonale sur F est continue et le sous-espace F est un fermé de E.

3. Tout sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace préhilbertien est fermé.

4. Si la dimension de F est infinie, il se peut que F ne soit pas fermé, mais $F^\perp = (\overline{F})^\perp$ et

$$F \oplus F^\perp = F \oplus (\overline{F})^\perp \subset \overline{F} \oplus (\overline{F})^\perp \subset E.$$

Exercice 24

1. Soit H, un hyperplan de E.

1. a. L'adhérence $\overline{H}$ de H est un sous-espace vectoriel de E tel que $H \subset \overline{H} \subset E$.

1. b. Si $a \in \overline{H} \setminus H$, alors $E = H \oplus \mathbb{K} \cdot a \subset \overline{H}$.

2. Un hyperplan de E est une partie fermée ou une partie dense dans E.

3. Soit f, une forme linéaire non nulle sur E. L'application f est continue si, et seulement si, son noyau est fermé.

4. On suppose maintenant que la forme linéaire $f \in L(E, \mathbb{R})$ est continue.

4. a. Les images réciproques $[f > 0]$ et $[f < 0]$ sont des ouverts connexes par arcs, mais leur réunion $[f \neq 0]$ est un ouvert qui n'est pas connexe par arcs.

4. b.

$$\forall\, x \in E, \quad d(x, \operatorname{Ker} f) = \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

Exercice 25

On munit l'espace $E = \mathscr{C}^0_{2\pi}$ des fonctions continues et de période 2π de la norme de convergence en moyenne quadratique sur $I = [0, 2\pi]$.

1. a. La suite de terme général $f_n = [t \mapsto \cos nt]$ est bornée.

1. b. Si n et p sont deux entiers non nuls et distincts, alors $\|f_n - f_p\| = 1$ et on ne peut extraire aucune suite convergente de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. La boule unité de E est une partie fermée et bornée qui n'est pas compacte.

Exercice 26

1. Soient $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

1. a. Le diamètre de la boule fermée $B_f(a, r)$, le diamètre de la boule ouverte $B_o(a, r)$ et le diamètre de la sphère $S(a, r)$ de centre a et de rayon r sont tous les trois égaux à $2r$.

1. b. La boule ouverte $B_o(a, r)$ et la boule fermée $B_f(a, r)$ sont des parties convexes de E.

2. Soit a et b, deux points de E et $0 < s \leqslant r$.

2. a. La boule ouverte $B_o(b, s)$ est contenue dans la boule ouverte $B_o(a, r)$ si, et seulement si,

$$\|b - a\| \leqslant r - s.$$

2. b. Les boules ouvertes $B_o(a, r)$ et $B_o(b, s)$ sont disjointes si, et seulement si, $\|b - a\| \geqslant r + s$.

Exercice 27

1. Représenter un cercle (resp. un carré) comme l'image directe d'un segment par une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$.

2. Représenter un disque comme l'image directe d'un carré $[a, b] \times [c, d]$ par une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

3. Représenter le groupe $SO_2(\mathbb{R})$ comme l'image directe d'un segment par une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 28

Par définition, un point $x \in E$ est adhérent à la partie A si, et seulement si,

$$\forall\, r > 0, \qquad A \cap B(x, r) \neq \varnothing.$$

Démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. Le point x est adhérent à la partie A de E.
2. Il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.
3. La distance de x à A est nulle : $d(x, A) = 0$.

Exercice 29

1. L'adhérence de A est un fermé qui contient A.

2. Tout fermé F qui contient A contient aussi l'adhérence de A :

$$A \subset F \implies \overline{A} \subset F.$$

Exercice 30

L'intérieur d'une partie A est un ouvert contenu dans A et tout ouvert G contenu dans A est aussi contenu dans l'intérieur de A :

$$G \subset A \implies G \subset A^\circ.$$

Exercice 31

Pour toute partie A,

$$\big(\overline{A}\big)^c = (A^c)^\circ \quad \text{et} \quad (A^\circ)^c = \overline{(A^c)}.$$

Exercice 32

Soit K, un compact non vide de E.

1. Pour tout $x \in E$,

$$d(x, K) = \min_{y \in K} d(x, y).$$

2. Si K' est un compact disjoint de K, alors $d(K, K') > 0$.

3. L'axe des abscisses et le graphe de exp sont des fermés disjoints de $\mathbb{R}^2$, mais la distance qui les sépare est nulle.

Exercice 33

Soient A, un compact et B, un fermé de E.

1. La partie

$$A + B = \{x + y,\ (x, y) \in A \times B\}$$

est un fermé de E.

2. Si B est compact, alors $A + B$ est compact.

Exercice 34

1. Si K est un compact de E qui ne contient pas le vecteur nul, alors le cône positif

$$F = \{\lambda x,\ (\lambda, x) \in \mathbb{R}_+ \times K\}$$

est un fermé de E.

2. La partie $K = [(x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leqslant 1]$ est bien compacte mais la partie $F = [x_1 > 0] \cup \{(0, 0)\}$ n'est pas fermée.

Exercice 35

Soit $f : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$, une application continue. Si $K \subset E$ est une partie compacte de E, alors son image $f_*(K)$ est une partie compacte de F.

Exercice 36

Si $f : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ est une application continue, alors sa restriction à une partie compacte de E est uniformément continue.

Exercice 37

Si $f : E \to F$ est une application continue et bornée, alors

$$\sup_{x \in A} \|f(x)\|_F = \sup_{x \in \overline{A}} \|f(x)\|_F$$

pour toute partie $A \subset E$.

Exercice 38

Soit f, une application linéaire de E dans F.

1. Si f est continue, alors

$$A = \{x \in E : \|f(x)\|_F = 1\}$$

est un fermé de E.

2. a. Si, pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de E qui tend vers 0_E, la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, alors l'application f est continue.

2. b. Si f n'est pas continue, alors A n'est pas fermée.

Exercice 39

Soient u et v, deux endomorphismes continus de E. S'il existe un scalaire α tel que

$$u \circ v - v \circ u = \alpha I_E,$$

alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u \circ v^{n+1} - v^{n+1} \circ u = (n + 1)\alpha v^n$$

et si v n'est pas nilpotent, alors $\alpha = 0$.

Exercice 40

Soit K, un compact contenu dans un ouvert U de E.

1.

$$\forall x \in K,\ \exists \alpha > 0, \quad B_o(x, \alpha) \subset U.$$

2. La fonction $x \mapsto d(x, U^c)$ est continue sur le compact K et ne s'annule pas, donc

$$\exists \alpha_0 > 0,\ \forall x \in K, \quad B_o(x, \alpha_0) \subset U.$$

Exercice 41

Soit E, un espace vectoriel normé de dimension supérieure à 2. On note S, la sphère unité de E.

1. Soit $a \in S$.

1. a. Si $b \in S$ est différent de $-a$, alors la fonction

$$t \mapsto \frac{(1 - t)a + tb}{\|(1 - t)a + tb\|}$$

est continue de $[0, 1]$ dans S.

2. La sphère unité S est connexe par arcs.

3. Le complémentaire de la boule unité fermée est connexe par arcs.

4. Dans un espace vectoriel normé de dimension supérieure à 2, le complémentaire d'un ensemble fini est connexe par arcs.

Exercice 42

Si $f : E \to F$ est une application uniformément continue, alors il existe deux réels a et b tels que

$$\forall x \in E, \qquad \|f(x)\|_F \leqslant a\|x\|_E + b.$$

En particulier, $\|f(x)\|_F = \mathcal{O}(\|x\|_E)$ au voisinage de l'infini.

Exercice 43

Soit $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$, une application continue.

1. Démontrer que

$$g(x) = \max_{0 \leqslant y \leqslant 1} f(x, y)$$

est bien défini pour tout $x \in [0, 1]$.

2. Démontrer que g est continue sur $[0, 1]$.

Exercice 44

Soit

$$V = \{A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) : A.A^\top.A = A\}.$$

1. Le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est contenu dans V.

2. Que dire des matrices inversibles $A \in V$?

3. Le groupe orthogonal est ouvert et fermé pour la topologie relative à V.

Exercice 45

Le plan $\mathbb{R}^2$ est ici muni de la norme euclidienne canonique.

1. Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tend vers ℓ au voisinage de (x_0, y_0) si, et seulement si, il existe $\alpha > 0$ et une fonction $\varphi :]0, \alpha[\to \mathbb{R}$ de limite nulle en 0 telle que

$$\forall\, (r, \theta) \in]0, \alpha[\times \mathbb{R}, \quad \big|f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) - \ell\big| \leqslant \varphi(r).$$

2. Les expressions suivantes :

$$\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, \qquad \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, \qquad \frac{2x^3+3y^3}{2x^2+y^2}, \qquad \frac{xy^3}{\sqrt{x^4+y^4}}$$

tendent vers 0 au voisinage de $(0, 0)$.

3. Les expressions suivantes :

$$\frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}, \qquad \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \qquad \frac{xy}{x^2+y^2}$$

n'ont pas de limite au voisinage de $(0, 0)$.

Exercice 46

Soient U, un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \times [a, b] \to \mathbb{R}$, une fonction continue. La fonction $F : U \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x, y) = \int_a^b f(x, y, t)\, dt$$

est continue sur U.

Exercice 47

Soient I et J, deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. On considère $U = I \times J \subset \mathbb{R}^2$, $\Omega = I \times I \times J$ et $f : U \to \mathbb{R}$, une fonction continue. Alors la fonction $F : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x, y, z) = \int_x^y f(t, z)\, dt$$

est continue.

Exercice 48

1. L'expression $(x+y)e^{-(x^2+y^2)}$ tend vers 0 au voisinage de l'infini dans $\mathbb{R}^2$.

2. L'expression $x^4 + y^2$ tend vers $+\infty$ et le quotient

$$\frac{x^2+y^2}{2x^4+y^4}$$

tend vers 0 au voisinage de l'infini dans $\mathbb{R}^2$.

3. L'expression $x^2\,\ell n(x^4 + y^2)$ n'est pas bornée, mais ne tend pas vers $+\infty$ au voisinage de l'infini.

4. L'expression $x^2y + y\,\ell n^2\, y$, définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, ne tend pas vers $+\infty$ au voisinage de l'infini.

5. Si q est une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^3$, alors $q(M)$ tend vers $+\infty$ lorsque M tend vers l'infini dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 49

L'expression

$$\frac{xy}{x^4+y^4}$$

n'est pas bornée, mais ne tend pas vers l'infini au voisinage de l'origine.

Exercice 50

On étudie au voisinage de $(0, 0)$ la fonction f définie par

$$\forall\, (x, y) \neq (0, 0), \quad f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}.$$

1. Pour h voisin de l'origine, $f(h) = \mathcal{O}(h)$.

2. Si φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ telle que $f(h) \sim \varphi(h)$ au voisinage de $(0, 0)$, alors

$$\forall\, h = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(h) = x - y.$$

La différence $f(h) - \varphi(h)$ est dominée par h, mais pas négligeable devant h.

Exercice 51

L'espace $E = \mathbb{R}_2[X]$ est muni de la norme définie par

$$\|aX^2 + bX + c\| = \max\{|a|, |b|, |c|\}.$$

1. L'ensemble U des polynômes de degré 2 est un ouvert de E, qui est dense dans E mais pas connexe par arcs.

2. a. Le discriminant $\Delta : U \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

2. b. La partie $F = \big[\Delta(P) = 0\big]$ est un fermé relatif à U qui n'est pas un fermé de E.

2. c. Si V est un voisinage relatif à U d'un polynôme $P_0 \in F$, alors $V \cap F^c \neq \varnothing$.

Exercice 52

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une application de classe $\mathscr{C}^1$. La fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = \left| \begin{array}{ll} f'(x) & \text{si } x = y, \\ \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y. \end{array} \right.$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$ car

$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = \int_0^1 f'\big(x + t(y - x)\big)\, dt.$$

Exercice 53

Le corps $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$ (et donc un corps infini).

Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de scalaires de limite nulle telle que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad A - \lambda_k I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}).$$

Exercice 54

1. Soit N, une norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Pour toute matrice triangulaire $T_0 \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une matrice diagonalisable T telle que $N(T - T_0) \leqslant \varepsilon$.

2. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. L'application $\big[M \mapsto PMP^{-1}\big]$ est continue de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

3. L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 55

Soit $f \in L(E,F)$, où E est un espace vectoriel de dimension finie. Alors il existe un réel $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall\, x \in E, \quad \big\|f(x)\big\|_F \geqslant \alpha \|x\|_E$$

et f est injective si, et seulement si, on peut choisir $\alpha > 0$. Dans ce cas,

$$\lim_{x\to\infty} \big\|f(x)\big\|_F = \infty.$$

Exercice 56

On note $P \wedge Q$, le plus grand commun diviseur (unitaire) des polynômes P et Q.

1. La dérivation $D = [P \mapsto P']$ est continue de $\mathbb{R}_d[X]$ dans $\mathbb{R}_d[X]$. Calculer la norme $|\!|D|\!|$, où $|\!|\cdot|\!|$ désigne la norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}_d[X]$ définie par

$$\Big\| \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \Big\|_\infty = \max_{0\leqslant k\leqslant d} |a_k|.$$

2. L'application $[P \mapsto (P, P')]$ est continue de $\mathbb{R}_d[X]$ dans $\mathbb{R}_d[X] \times \mathbb{R}_d[X]$

3. Comme la suite de terme général $P_n = X(X - 2^{-n})$ converge vers X^2, l'application $[P \mapsto P \wedge P']$ n'est pas continue de $\mathbb{R}_d[X]$ dans $\mathbb{R}_d[X]$. (On rappelle que $P \wedge Q$ désigne le pgcd des polynômes P et Q.)

Exercice 57

Soit $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, une fonction continue. Pour tout $x \in [0,1]$, on pose

$$g(x) = \max_{y\in[0,1]} f(x,y).$$

Démontrer que $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue.

Exercice 58 — Connexité d'un espace vectoriel

Soit $(E, \|\cdot\|)$, un espace vectoriel normé. Si une partie A de E est à la fois ouverte et fermée, alors A est vide ou égale à E.

Exercice 59

Soit $(E, \|\cdot\|)$, un espace vectoriel normé. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E qui converge vers $\ell \in E$ et l'ensemble

$$K = \big\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\big\} \cup \{\ell\} \subset E.$$

1. L'ensemble K est borné.

2. L'ensemble K est une partie compacte de E.

Exercice 60

1. Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite décroissante de parties compactes de l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad K_{n+1} \subset K_n.$$

1. a. L'intersection

$$K_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$$

est une partie compacte de E.

1. b. Si l'intersection K_∞ est vide, alors il n'existe qu'un nombre *fini* de compacts K_n non vides :

$$\exists\, N_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant N_0, \quad K_n = \varnothing.$$

2. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite décroissante de parties fermées non vides de $E = \mathbb{R}$. L'intersection

$$A_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

peut-elle être vide ?

Exercice 61

Soient $(E, \|\cdot\|)$, un espace vectoriel normé et A, une partie de E. Démontrer que l'adhérence $\overline{A}$ de A est fermé en vérifiant que son complémentaire est ouvert.

Exercice 62

Soit $(E, \|\cdot\|)$, un espace vectoriel normé.

1. L'adhérence de la boule ouverte $B_o(x_0, r)$ est la boule fermée $B_f(x_0, r)$.

2. L'intérieur de la boule fermée $B_f(x_0, r)$ est la boule ouverte $B_o(x_0, r)$.

Exercice 63

1. On considère une application continue $f : E \to E$. Démontrer que son graphe

$$\Gamma = \big\{(x, f(x)),\ x \in E\big\}$$

est une partie fermée de $E \times E$.

2. On suppose que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application bornée et que son graphe Γ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$. Démontrer que f est continue.

Exercice 64

1. Soit H, un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, distinct de $\{0\}$. On pose

$$a = \inf\{x \in H\ :\ x > 0\}.$$

1. a. Si $a = 0$, alors H est une partie dense dans $\mathbb{R}$. et on se donne $\varepsilon > 0$.

Il existe $x_0 \in H$ tel que $0 < x_0 < \varepsilon$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $|x - kx_0| \leqslant \varepsilon$. Donc le sous-groupe H est une partie dense de $\mathbb{R}$.

1. b. Si $a > 0$, alors $a \in H$, $H = a\mathbb{Z}$ et H est fermé.

2. Un sous-groupe H de $(\mathbb{R}, +)$, distinct de $\mathbb{R}$, est fermé si, et seulement si, il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $H = a\mathbb{Z}$.

3. Soient a et b, deux réels strictement positifs tels que le quotient b/a ne soit pas rationnel. L'ensemble

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \big\{pa + qb,\ (p,q) \in \mathbb{Z}^2\big\}$$

est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ qui est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 65 — **Limite supérieure, limite inférieure**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite réelle bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\Omega_n = \{u_k,\ k \geqslant n\}, \quad v_n = \inf \Omega_n, \quad w_n = \sup \Omega_n.$$

1. Démontrer que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies et qu'elles convergent.

On note V et W, les limites respectives des suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Soit $\ell \in \mathbb{R}$, une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Démontrer que $V \leqslant \ell \leqslant W$.

3. Démontrer que V et W sont des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, les deux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

✍ *Les réels V et W sont appelés respectivement limite inférieure et limite supérieure de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ces deux "limites" ont un sens même lorsque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas et coïncident avec la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque cette suite converge : ces deux notions sont donc très pratiques !*

Exercice 66 — **rms130-685**

Soit $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. On considère une application φ continue et positive sur $[0,1]$ et telle que

$$\int_0^1 \varphi(t)\,dt = 1$$

et on pose

$$\forall f \in E, \qquad N(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,dt,$$
$$N_\varphi(f) = \left|\int_0^1 f(t)\varphi(t)\,dt\right| + \int_0^1 |f'(t)|\,dt.$$

Démontrer que N et N_φ sont des normes équivalentes sur E.

Exercice 67 — **130-686**

Soit E, un espace vectoriel normé par $\|\cdot\|$. On considère l'application $f : E \to E$ définie par

$$\forall x \in E, \qquad f(x) = \frac{x}{1+\|x\|}.$$

1. L'application f est injective.
2. L'image de f est la boule unité ouverte de E.
3. L'application f est 2-lipschitzienne.

Exercice 68 — **rms130-687**

Soient $(E,\|\cdot\|)$, un espace vectoriel normé ; A, une partie non vide de E et k, un réel strictement positif. On considère une application $f : A \to \mathbb{R}$ qu'on suppose k-lipschitzienne et on pose

$$\forall x \in E, \quad g(x) = \inf_{y\in A}\{k\|x-y\| + f(y)\}.$$

1. Démontrer que g est bien définie et qu'on peut prolonger f par g sur E.
2. Démontrer que g est k-lipschitzienne.

Exercice 69 — **130-963 Méthode de Newton**

L'espace $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est muni de la norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire canonique sur E.

1. Cette norme est sous-multiplicative. (Appliquer l'inégalité de Schwarz.)
2. On suppose connue une matrice M_0 telle que

$$\|I_n - AM_0\| < 1$$

et on pose

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad M_{k+1} = 2M_k - M_kAM_k.$$

Si $\|I_n - AM_0\| < 1$, alors la matrice A est inversible et la suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers A^{-1}.

3. S'il existe une colonne X_0 non nulle telle que

$$AM_0X_0 = 0 \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}),$$

alors il existe une matrice $B \in E$ non nulle telle que

$$AM_0B = 0 \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}).$$

4. Comme il est impossible que

$$\left\|(I_n - AM_0)B\right\| < \|B\|,$$

la matrice AM_0 est inversible.
5. Exprimer $I_n - AM_{k+1}$ en fonction de $I_n - AM_k$. En déduire que AM_k converge vers I_n lorsque k tend vers $+\infty$.
6. La matrice A est inversible et les matrices M_k convergent vers la matrice inverse A^{-1} lorsque k tend vers l'infini.
7. Estimer la vitesse de convergence de cette méthode. Quelle difficulté cette méthode pose-t-elle ?

Exercice 70 — 130-1000

1. Soient M et N, deux matrices semblables. Alors les matrices $P(M)$ et $P(N)$ sont semblables, quel que soit le polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$.
2. Soient A, une matrice diagonalisable et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de matrices qui converge vers la matrice B. Si toutes les matrices B_n sont semblables à A, alors la limite B est aussi semblable à A.
3. Ce résultat subsiste-t-il si la matrice A n'est pas diagonalisable ?

Exercice 71 — 130 – 1147

Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, on pose

$$N(f) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \int_0^1 f(t)t^n \, dt \right|.$$

Démontrer que N est une norme sur $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

Exercice 72 — 130 – 1148

Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on définit l'application $e_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ en posant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e_\lambda(x) = \exp(\lambda x)$$

et on note F, le sous-espace de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ engendré par les e_λ.

Pour tout $f \in F$, on pose

$$N(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left|f^{(n)}(0)\right|}{n!}.$$

Démontrer que N est une norme sur F.

Exercice 73 — 132 – 522

Soient $E = \mathbb{C}[X]$ et $Q \in E$, un polynôme distinct du polynôme nul. Pour tout $P \in E$, on pose

$$N_Q(P) = \sup_{t\in[-1,1]} \left|P(t)Q(t)\right|.$$

1. Démontrer que N_Q est une norme sur E.
2. Les normes N_Q et N_1 sont-elles équivalentes ?
NB : La norme N_1 désigne ici la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $[-1,1]$ (ce qui revient à choisir $Q = 1$ dans la norme N_Q).

Exercice 74

Sur l'espace $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, il n'existe pas de norme N telle que

$$\forall A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \qquad N(A.B) = N(A).N(B).$$

Exercice 75

Soit E, l'espace vectoriel des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que $f(0) = f'(0) = 0$. Pour toute fonction $f \in E$, on pose

$$N(f) = \|f + 2f' + f''\|_\infty.$$

1. Démontrer que N est une norme sur E.
2. Soit $f \in E$. Exprimer f en fonction de $g = f + 2f' + f''$.
3. Démontrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty \leqslant aN(f).$$

4. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N sont-elles équivalentes ?

Exercice 76

Soient N_1 et N_2, deux normes sur un espace vectoriel réel E. On note B_k, la boule unité ouverte de E relative à la norme N_k (pour $k = 1$ ou 2). Les deux normes N_1 et N_2 sont égales si, et seulement si, les boules B_1 et B_2 sont égales.

Exercice 77

Pour quelles suites réelles $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'application N définie sur l'espace vectoriel E des suites réelles sommables par

$$\forall\, u \in E, \qquad N(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n |u_n|$$

est-elle une norme sur E ?

Exercice 78

Soit E, l'espace vectoriel des suites réelles bornées. Pour toute suite $u \in E$, on pose

$$\|u\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |u_k| \quad \text{et} \quad N(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|u_k|}{2^k}.$$

1. Les applications N et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur E. La norme N est dominée par la norme $\|\cdot\|_\infty$, mais ces deux normes ne sont pas équivalentes.

On suppose dorénavant que E *est muni de la norme* $\|\cdot\|_\infty$.

2. Démontrer que le sous-espace C des suites convergentes est une partie fermée de E. (NB : Cette question ne figure pas dans l'énoncé original.)

3. L'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang est une partie d'intérieur vide de E. Quelle est son adhérence ?

4. Déterminer l'intérieur et l'adhérence du sous-ensemble des suites strictement positives.

Exercice 79 — 132-1154

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose

$$\forall\, P \in \mathbb{R}[X], \qquad N_a(P) = \big|P(a)\big| + \int_0^1 \big|P'(t)\big|\,dt.$$

1. L'application N_a est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Si N est une norme sur un espace vectoriel E et si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de vecteurs de E qui converge vers $x \in E$, alors $N(x_n)$ tend vers $N(x)$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = (X/2)^n$. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 80 — 132 – 1155

On note E, l'espace vectoriel des applications de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ telles que $f(0) = 0$. Pour toute fonction $f \in E$, on pose

$$N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad N'(f) = \|f + f'\|_\infty.$$

1. Démontrer que N et N' sont des normes sur E.

2. Vérifier que

$$\forall\, x \in [0,1], \quad e^x f(x) = \int_0^x e^t \big(f(t) + f'(t)\big)\,dt.$$

3. Démontrer qu'il existe deux réels a et b strictement positifs tels que

$$\forall\, f \in E, \quad aN'(f) \leqslant N(f) \leqslant bN'(f).$$

TOPOLOGIE (SOLUTIONS)

Solution 1

1. Avec

$$A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \quad \text{et} \quad B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

on obtient

$$\|AB\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}\right)^2$$

(définition de la norme euclidienne canonique).

❧ Quels que soient les indices i et j, on déduit de l'inégalité de Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_{k,j}^2\right).$$

Les indices de sommation étant des variables muettes (ou locales, si on veut), on peut réécrire cette majoration sous la forme suivante (qui va tout simplifier : il s'agit donc d'une méthode à retenir).

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{\ell=1}^{n} b_{\ell,j}^2\right)$$

Toutes ces inégalités allant dans le même sens, on peut les sommer :

$$\|AB\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{\ell=1}^{n} b_{\ell,j}^2\right).$$

Comme les indices i et j ne se mélangent pas dans les facteurs du produit, la somme double au second membre peut être factorisée :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\right)}_{\text{indépendant de } j}\left(\sum_{\ell=1}^{n} b_{\ell,j}^2\right)\right] &= \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\right)\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} b_{\ell,j}^2\right)}_{\text{indépendant de } i}\right]\\ &= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} b_{\ell,j}^2\right).\end{aligned}$$

On en conclut finalement que

$$\|AB\|^2 \leqslant \|A\|^2\,\|B\|^2$$

et donc que

$$\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$$

(puisque les trois quantités de cette dernière expression sont toutes *positives*).

✍ ***Variante***

On peut alléger les notations en travaillant sur les lignes de A et les colonnes de B au lieu de calculer sur les coefficients de ces deux matrices.

On notera $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$, le produit scalaire canonique sur l'espace $\mathfrak{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ des matrices lignes et $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$, le produit scalaire canonique sur l'espace $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes.

Si $L = (x_j)_{1\leqslant j\leqslant n} \in \mathfrak{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et $C = (y_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors

$$L.C = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = (\,L\,|\,C^\top\,) = \langle\,L^\top\,|\,C\,\rangle\,.$$

L'inégalité de Schwarz peut donc se formuler de deux manières :

$$\begin{aligned}(L.C)^2 &\leqslant (L\,|\,L)\,.\,(C^\top\,|\,C^\top)\\ &\leqslant \langle L^\top\,|\,L^\top\rangle\,.\,\langle C\,|\,C\rangle\end{aligned}$$

et on en déduit enfin que

$$\forall\, L\in\mathfrak{M}_{1,n}(\mathbb{R}),\ \forall\, C\in\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\quad (L.C)^2\leqslant (L\,|\,L)\,.\,\langle C\,|\,C\rangle\,. \tag{$\star$}$$

❧ *On note $A=(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, où A_i est la i-ème ligne de la matrice A, et $B=(B_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$, où B_j est la j-ème colonne de la matrice B.*

Par définition du produit scalaire canonique sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\|A\|^2=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{i,j}^2=\sum_{i=1}^n A_i.A_i^\top=\sum_{i=1}^n (A_i\,|\,A_i)\,,$$
$$\|B\|^2=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n b_{i,j}^2=\sum_{j=1}^n B_j^\top.B_j=\sum_{j=1}^n \langle B_j\,|\,B_j\rangle\,.$$

Par définition du produit matriciel,

$$AB=(A_i.B_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

et par conséquent,

$$\|AB\|^2=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n (A_iB_j)^2.$$

Or, d'après l'inégalité de Schwarz ($\star$),

$$\forall\, 1\leqslant i,j\leqslant n,\quad (A_iB_j)^2\leqslant (A_i\,|\,A_i)\,.\,\langle B_j\,|\,B_j\rangle\,.$$

Donc

$$\begin{aligned}\|AB\|^2&\leqslant\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n (A_i\,|\,A_i)\,.\,\langle B_j\,|\,B_j\rangle\\ &\leqslant\left[\sum_{i=1}^n (A_i\,|\,A_i)\right]\left[\sum_{j=1}^n \langle B_j\,|\,B_j\rangle\right]\\ &\leqslant \|A\|^2.\|B\|^2.\end{aligned}$$

Comme $\|A\|$, $\|B\|$ et $\|AB\|$ sont des réels positifs, on en déduit que la norme euclidienne canonique sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est une norme sous-multiplicative :

$$\forall\, A,B\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),\quad \|AB\|\leqslant\|A\|.\|B\|.$$

2. La question posée n'a pas de sens, car $\mathbb{R}^n$ n'est pas muni d'une multiplication interne.

Solution 2

Si $f\in E$, alors la fonction f ainsi que sa dérivée f' sont *continues* sur le *segment* $[a,b]$, donc elles y sont bornées. Ainsi, les expressions $\|f\|_\infty$ et $\|f'\|_\infty$ sont bien définies et comme ce sont deux réels positifs, on en déduit que

$$\|f\|_{\mathscr{C}^1}=\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty$$

est bien définie et appartient bien à $\mathbb{R}_+$.

❧ **Séparation des points.**
Comme $\|f'\|_\infty\geqslant 0$, alors

$$\forall\, f\in E,\quad 0\leqslant\|f\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty=\|f\|_{\mathscr{C}^1}.$$

En particulier, si $\|f\|_{\mathscr{C}^1}=0$, alors $\|f\|_\infty=0$ et donc $f=0_E$ (puisque $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E).

❧ **Homogénéité.**
Quels que soient $\lambda\in\mathbb{R}$ et $f\in E$,

$$\begin{aligned}\|\lambda f\|_{\mathscr{C}^1}&=\|\lambda f\|_\infty+\|(\lambda f)'\|_\infty\\ &=\|\lambda f\|_\infty+\|\lambda\cdot f'\|_\infty &(*)\\ &=|\lambda|\,\|f\|_\infty+|\lambda|\,\|f'\|_\infty &(**)\\ &=|\lambda|\,\|f\|_{\mathscr{C}^1}\end{aligned}$$

par linéarité de la dérivation $(*)$ et parce que $\|\cdot\|_\infty$ est absolument homogène $(**)$ comme toutes les normes.

❧ **Inégalité triangulaire.**
Quelles que soient les fonctions f et g dans E,

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{\mathscr{C}^1} &= \|f+g\|_\infty + \|(f+g)'\|_\infty \\ &= \|f+g\|_\infty + \|f'+g'\|_\infty \qquad (*)\\ &\leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty \qquad (**)\\ &\leqslant \|f\|_{\mathscr{C}^1} + \|g\|_{\mathscr{C}^1}\end{aligned}$$

par linéarité de la dérivation $(*)$ et parce que $\|\cdot\|_\infty$ vérifie l'inégalité triangulaire $(**)$ comme toutes les normes.

❧ Ainsi $\|\cdot\|_{\mathscr{C}^1}$ est bien une norme sur E.

Solution 3

Soient f et g, deux applications k-lipschitziennes de Ω dans F. Pour tout $t \in [0,1]$, on pose

$$h_t = (1-t)f + tg \ : \ \Omega \to F.$$

Quels que soient x et y dans Ω,

$$\begin{aligned}\big\|h_t(x) - h_t(y)\big\| &= \big\|(1-t)[f(x)-f(y)] + t[g(x)-g(y)]\big\| \\ &\leqslant |1-t|\big\|f(x)-f(y)\big\| + |t|\big\|g(x)-g(y)\big\|\end{aligned}$$

par inégalité triangulaire et absolue homogénéité de la norme $\|\cdot\|$.

Comme $t \in [0,1]$, les deux poids t et $(1-t)$ sont positifs et donc, par hypothèse de Lipschitz,

$$\begin{aligned}\big\|h_t(x) - h_t(y)\big\| &\leqslant (1-t)\big\|f(x)-f(y)\big\| + t\big\|g(x)-g(y)\big\| \\ &\leqslant (1-t)k\|x-y\| + tk\|x-y\| = k\|x-y\|.\end{aligned}$$

Cela démontre que l'ensemble $\mathscr{L}_k(\Omega, F)$ des applications k-lipschitziennes est convexe (= stable par combinaison convexe).

✍ *Il est plus délicat de prouver rigoureusement que cet ensemble* n'est pas *un espace vectoriel (en général). Nous allons procéder par l'absurde.*

Supposons que l'ensemble $\mathscr{L}_k(\Omega, F)$ possède la structure d'espace vectoriel et considérons f, un vecteur de cet espace. Alors $\lambda \cdot f \in \mathscr{L}_k(\Omega, F)$ pour tout scalaire $\lambda > 0$. Ainsi, quels que soient x et y dans Ω,

$$\forall\, \lambda > 0, \quad \big\|(\lambda\cdot f)(x) - (\lambda \cdot f)(y)\big\| \leqslant k\|x-y\|.$$

Par absolue homogénéité de la norme, on en déduit que

$$\forall\, x, y \in \Omega,\ \forall\, \lambda > 0, \quad \big\|f(x)-f(y)\big\| \leqslant \frac{k}{\lambda}\,\|x-y\|.$$

Le minorant ne dépend pas de λ, on passe donc à l'inf pour $\lambda > 0$ (ce qui revient à faire tendre λ vers $+\infty$) :

$$\forall\, x, y \in \Omega, \quad 0 \leqslant \big\|f(x)-f(y)\big\| \leqslant 0.$$

Autrement dit, la fonction f est constante !

Bref : si l'ensemble $\mathscr{L}_k(\Omega, F)$ ne contient pas que des fonctions constantes, alors ce n'est pas un espace vectoriel.

Solution 4

Soient $0 \leqslant k \leqslant k'$. Considérons une application k-lipschit-zienne f. Cela signifie que

$$\forall\, x, y \in \Omega, \quad \big\|f(x)-f(y)\big\| \leqslant k\|x-y\|.$$

Or $\|x-y\| \geqslant 0$, donc

$$k\|x-y\| \leqslant k'\|x-y\|$$

et par conséquent

$$\forall\, x, y \in \Omega, \quad \big\|f(x)-f(y)\big\| \leqslant k'\|x-y\|.$$

Cela signifie que l'application f est aussi k'-lipschitzienne.

On a donc démontré que toute application k-lipschitzienne est aussi k'-lipschitzienne, c'est-à-dire

$$\mathcal{L}_k(\Omega, F) \subset \mathcal{L}_{k'}(\Omega, F).$$

Solution 5

1. Quelle que soit la colonne X,

$$\|AX\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right|.$$

D'après l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}^n$,

$$\forall\, 1\leqslant i\leqslant n,\quad \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}x_j|$$

et comme le maximum est un majorant,

$$\forall\, 1\leqslant i\leqslant n,\ \forall\, 1\leqslant j\leqslant n,\quad |a_{i,j}x_j| \leqslant |a_{i,j}|\,\|X\|_\infty.$$

En sommant ces inégalités sur j, on obtient

$$\forall\, 1\leqslant i\leqslant n,\quad \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \leqslant \left[\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right]\|X\|_\infty.$$

Comme le facteur $\|X\|_\infty$ est positif et indépendant de i, on en déduit enfin que

$$\|AX\|_\infty \leqslant \left[\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right]\|X\|_\infty.$$

Cette majoration justifie l'existence de $|\!|\!|A|\!|\!|$ et prouve déjà que

$$|\!|\!|A|\!|\!| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|. \tag{1}$$

❧ Toute famille *finie* de nombres réels possède un plus grand élément, donc il existe un indice entier $1\leqslant i_0\leqslant n$ tel que

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}| = \sum_{j=1}^{n}|a_{i_0,j}|.$$

Pour tout $1\leqslant j\leqslant n$, on choisit un réel θ_j tel que

$$a_{i_0,j} = e^{i\theta_j}\cdot|a_{i_0,j}|$$

et on pose

$$X_0\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{-i\theta_1}\\ \vdots\\ e^{-i\theta_n}\end{pmatrix}.$$

Il est clair que $\|X_0\|_\infty = 1$ et

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}x_j = \sum_{j=1}^{n}|a_{i_0,j}|.$$

On en déduit alors que

$$\|AX_0\|_\infty \geqslant \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}x_j\right| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|. \tag{2}$$

Or $\|X_0\|_\infty = 1$, donc

$$\|AX_0\|_\infty \leqslant |\!|\!|A|\!|\!|\,\|X_0\|_\infty = |\!|\!|A|\!|\!|. \tag{3}$$

Les relations (2) et (3) établissent l'inégalité réciproque de (1). Par conséquent,

$$|\!|\!|A|\!|\!| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|.$$

2. Soit λ, une valeur propre de A. Il existe donc une colonne X_0, *non nulle*, telle que $AX_0 = \lambda X_0$.
Par conséquent,

$$|\lambda|\,\|X_0\|_\infty = \|\lambda X_0\|_\infty = \|AX_0\|_\infty \leqslant |\!|\!|A|\!|\!|\,\|X_0\|_\infty.$$

Comme $X_0\neq 0$, alors $\|X_0\|_\infty > 0$, donc on peut simplifier l'inégalité par $\|X_0\|_\infty$ et obtenir ainsi

$$|\lambda| \leqslant |\!|\!|A|\!|\!|.$$

Solution 6

Il faut comprendre l'énoncé d'une part comme une caractérisation des parties convexes de $\mathbb{R}$:

une partie de $\mathbb{R}$ est convexe si, et seulement si, c'est un intervalle,

et d'autre part comme l'égalité de deux ensembles :

l'ensemble des parties convexes de $\mathbb{R}$ est égal à l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$.

Cette seconde formulation va structurer notre démonstration : nous allons établir l'égalité de ces ensembles par double inclusion.

❧ Supposons que $I \subset \mathbb{R}$ soit un intervalle.

Considérons deux éléments quelconques x et y de I. Par symétrie, on peut supposer que $x \leqslant y$. Pour tout $t \in [0,1]$, les deux réels t et $(1-t)$ sont *positifs*, donc

$$(1-t) \leqslant (1-t)y \quad \text{et} \quad tx \leqslant ty.$$

On en déduit que

$$(1-t)x + tx \leqslant (1-t)x + ty \leqslant (1-t)y + ty$$

c'est-à-dire

$$x \leqslant (1-t)x + ty \leqslant y.$$

Comme I est un intervalle, cet encadrement montre que $(1-t)x + ty$ appartient à I.

On a ainsi prouvé que tout intervalle I de $\mathbb{R}$ était une partie convexe.

❧ Réciproquement, supposons que I soit une partie convexe (non vide) de $\mathbb{R}$.

✍ ***Rappel :*** *Pour prouver que I est un intervalle, nous choisissons arbitrairement deux éléments x et y de I tels que $x \leqslant y$ et nous devons prouver que tout réel z tel que $x \leqslant z \leqslant y$ appartient encore à I.*

Choisissons donc deux réels $x \leqslant y$ dans I et considérons un réel z tel que $x \leqslant z \leqslant y$.

❧ Premier cas (très particulier) : si $x = y$, alors $z = x \in I$.

❧ Deuxième cas (général) : si $x < y$, alors on pose

$$t = \frac{z-x}{y-x}.$$

Comme $x < y$ et que $x \leqslant z \leqslant y$, alors $y - x > 0$ (*on ne divise pas par 0, c'est mal*) et $0 \leqslant z - x \leqslant y - x$, donc $0 \leqslant t \leqslant 1$ et par ailleurs

$$(1-t)x + ty = \frac{[(y-x)-(z-x)]x + (z-x)y}{y-x} = z.$$

Comme I est convexe, cela prouve que $z \in I$.

Dans *tous* les cas, le réel z appartient bien à I, ce qui prouve que I est bien un intervalle.

✍ *Si vous connaissez bien les définitions de* partie convexe *et d'*intervalle*, cette démonstration est facile à comprendre. Si quelque chose vous échappe, relisez les définitions et dégagez le plan de la démonstration afin d'en saisir le sens général.*

Même si la démonstration vous paraît claire, l'apparition subite du paramètre t dans la dernière partie doit vous interroger : mais d'où sort donc ce paramètre t ?

*Cette (excellente !) question est l'occasion de distinguer clairement la phase de recherche (**analyse**) et la phase de rédaction (**synthèse**) : on vous demande une démonstration intelligemment rédigée, on ne vous demande pas d'exposer vos secrets de fabrication !*

✍ ***Secrets de fabrication***

Dans cette dernière partie, il faut démontrer que le réel z est bien une combinaison convexe de x et y, c'est-à-dire (définition !) qu'il existe un certain réel $t \in [0,1]$ tel que

$$z = (1-t)x + ty.$$

Soit ! Si jamais un tel réel t existait, que pourrions-nous en déduire ? (Veuillez noter l'emploi du conditionnel.) Eh bien, nous pourrions en déduire que

$$z = x + t(y-x)$$

c'est-à-dire que, nécessairement,

$$t = \frac{z-x}{y-x}.$$

Cela prouve qu'il existe au plus *un réel t convenable et nous venons de calculer* la seule valeur possible *de ce réel. Yapuka vérifier que cette seule valeur possible de t répond effectivement au problème posé : c'est ce qu'il suffit de rédiger pour produire une démonstration rigoureuse.*

Et c'est parce que cette seule valeur possible fait apparaître $(y-x)$ au dénominateur qu'on pense à discuter du cas $x = y$ (on ne divise pas par 0, c'est mal*).*

Solution 7

1. Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$, sa dérivée f' est continue sur le segment $[0,1]$, donc l'intégrale

$$\int_0^1 \big|f'(t)\big|\,dt$$

est bien définie (et positive).

Comme φ est continue, le produit $f\varphi$ est continu sur le segment $[0,1]$, donc l'intégrale

$$\int_0^1 f(t)\varphi(t)\,dt$$

est bien définie elle aussi.

Par conséquent, N et N_φ sont bien des applications définies sur l'espace $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et il est clair qu'elles prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

❧ Par linéarité de la dérivation et de l'intégrale, ainsi que par homogénéité de la valeur absolue, les deux applications N et N_φ sont (absolument) homogènes.

$$\begin{aligned}
N(\lambda f) &= \big|\lambda f(0)\big| + \int_0^1 \big|\lambda f'(t)\big|\,dt \\
&= |\lambda|\big|f(0)\big| + \int_0^1 |\lambda|\big|f'(t)\big|\,dt \\
&= |\lambda|\big|f(0)\big| + |\lambda|\int_0^1 \big|f'(t)\big|\,dt = |\lambda|\,N(f) \\
N_\varphi(\lambda f) &= \left|\int_0^1 \lambda f(t)\varphi(t)\,dt\right| + \int_0^1 \big|\lambda f'(t)\big|\,dt \\
&= \left|\lambda\int_0^1 f(t)\varphi(t)\,dt\right| + |\lambda|\int_0^1 \big|f'(t)\big|\,dt = |\lambda| N_\varphi(f)
\end{aligned}$$

✍ *Bien entendu, il faut savoir retrouver ligne de calcul après ligne de calcul quels sont les arguments qui permettent de passer d'une expression à la suivante — autant que possible, sans la moindre hésitation.*

❧ Une somme de réels positifs (= des valeurs absolues !) est nulle si, et seulement si, chaque terme est nul. Par conséquent, si $N(f) = 0$, alors

$$f(0) = \int_0^1 \big|f'(t)\big|\,dt = 0$$

et si $N_\varphi(f) = 0$, alors

$$\int_0^1 f(t)\varphi(t)\,dt = \int_0^1 \big|f'(t)\big|\,dt = 0.$$

► Dans les deux cas, on a donc

$$\int_0^1 \big|f'(t)\big|\,dt = 0.$$

La fonction $|f'|$ est positive (clair !) et continue (puisque f est de classe $\mathscr{C}^1$) sur l'intervalle $[0,1]$. Comme l'intégrale est nulle et que les bornes de l'intervalle d'intégration sont distinctes, on en déduit (Théorème de l'intégrale nulle) que

$$\forall\, t \in [0,1], \quad f'(t) = 0$$

et donc que la fonction f est constante sur $[0,1]$.

► Si f est constante sur $[0,1]$ et que $\big|f(0)\big| = 0$, alors la fonction f est identiquement nulle sur $[0,1]$.

► Si f est constante, égale à $K \in \mathbb{R}$ sur $[0,1]$, et si

$$\int_0^1 f(t)\varphi(t)\,dt = 0,$$

alors

$$\int_0^1 f(t)\varphi(t)\,dt = K\int_0^1 \varphi(t)\,dt = 0.$$

Or l'application φ est continue, positive et non identiquement nulle sur $[0,1]$, donc

$$\int_0^1 \varphi(t)\,dt > 0$$

et par conséquent $K = 0$.

Nous avons ainsi démontré que : si $N(f) = 0$ ou si $N_\varphi(f) = 0$, alors f est la fonction identiquement nulle sur $[0,1]$ (c'est-à-dire le vecteur nul de E).

❧ Les deux applications N et N_φ vérifient l'inégalité triangulaire (linéarité de la dérivation, de l'évaluation et de l'intégration ; inégalité triangulaire pour la valeur absolue et pour l'intégrale).

$$N(f+g) \leqslant N(f) + N(g)$$
$$N_\varphi(f+g) \leqslant N_\varphi(f) + N_\varphi(g)$$

✍ *Ici encore, il faut être capable de mener le calcul étape par étape, en sachant à chaque étape préciser quelle propriété justifie le calcul. À vous de vérifier !*

2. Pour démontrer que les deux normes sont équivalentes, nous procédons par double inégalité.

✍ *Puisque les deux normes mélangent les valeurs de $f(0)$, $f(t)$ et $f'(t)$, on doit penser à utiliser le Théorème fondamental !*

❧ Soit $f \in E$. Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, on déduit du Théorème fondamental que

$$\forall\, t \in [0,1], \quad f(t) = f(0) + \int_0^t f'(u)\,du.$$

D'après l'inégalité triangulaire (dans $\mathbb{R}$, puis la version intégrale en remarquant que les bornes de l'intégrale sont dans l'ordre croissante : $0 \leqslant t$),

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \big|f(t)\big| \leqslant \big|f(0)\big| + \int_0^t \big|f'(u)\big|\,du.$$

Comme $t \leqslant 1$ et qu'on intègre une fonction positive,

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \int_0^t \big|f'(u)\big|\,du \leqslant \int_0^1 \big|f'(u)\big|\,du$$

et donc

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \big|f(t)\big| \leqslant \big|f(0)\big| + \int_0^1 \big|f'(u)\big|\,du = N(f).$$

Comme la fonction φ est positive et que la borne supérieure est un majorant, on en déduit que

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \big|f(t)\varphi(t)\big| = \big|f(t)\big|\varphi(t) \leqslant N(f)\varphi(t).$$

Comme l'intégration conserve les inégalités,

$$\int_0^1 \big|f(t)\varphi(t)\big|\,dt \leqslant \int_0^1 N(f)\varphi(t)\,dt = N(f)\int_0^1 \varphi(t)\,dt$$

et on déduit de l'inégalité triangulaire pour les intégrales que

$$\left|\int_0^1 f(t)\varphi(t)\,dt\right| \leqslant N(f)\int_0^1 \varphi(t)\,dt.$$

Finalement, la norme N_φ est bien dominée par la norme N : pour toute fonction $f \in E$,

$$N_\varphi(f) \leqslant \left(1 + \int_0^1 \varphi(t)\,dt\right) N(f).$$

❧ L'encadrement réciproque est sensiblement plus compliqué... Commençons par rappeler que l'intégrale

$$\Phi = \int_0^1 \varphi(t)\,dt$$

est strictement positive (la fonction φ est positive, continue, non identiquement nulle et les bornes dans l'ordre croissant : $0 = a < b = 1$).

Il ne fait aucun doute que

$$\forall\, t \in [0,1], \quad f(0) = f(t) - \big[f(t) - f(0)\big].$$

Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que

$$\Phi.f(0) = \int_0^1 f(t)\varphi(t)\,dt - \int_0^1 \big[f(t) - f(0)\big]\varphi(t)\,dt.$$

Comme plus haut, on déduit du Théorème fondamental (et de quelques autres théorèmes sur les intégrales — à vous de deviner) que

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \big|f(t) - f(0)\big| \leqslant \int_0^1 \big|f'(t)\big|\,dt$$

et donc que, par positivité de l'intégrale,

$$\left|\int_0^1 \big[f(t) - f(0)\big]\varphi(t)\,dt\right| \leqslant \int_0^1 \big|f(t) - f(0)\big|\varphi(t)\,dt \leqslant \Phi.\int_0^1 \big|f'(u)\big|\,du.$$

Par conséquent,

$$\underbrace{\Phi}_{>0}\cdot\big|f(0)\big| \leqslant \left|\int_0^1 f(t)\varphi(t)\,dt\right| + \Phi\cdot\int_0^1 \big|f'(u)\big|\,du$$

et enfin, pour toute fonction $f \in E$,

$$N(f) \leqslant \frac{1}{\Phi}\cdot\left|\int_0^1 f(t)\varphi(t)\,dt\right| + 2\int_0^1 \big|f'(u)\big|\,du \leqslant \left(2 + \frac{1}{\Phi}\right) N_\varphi(f).$$

✍ *Cette dernière majoration est assez grossière, mais cela n'a pas d'importance ici !*

❧ Nous avons ainsi démontré que

$$\forall\, f \in E, \quad \frac{\Phi}{2\Phi + 1} N(f) \leqslant N_\varphi(f) \leqslant (1 + \Phi)N(f),$$

où Φ est une constante strictement positive, et donc que les deux normes N et N_φ étaient équivalentes.

Solution 8

Soit $u \in E$, une suite réelle bornée. Par définition,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad |u_k| \leqslant \|u\|_\infty.$$

On en déduit que

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [0,1[, \quad |u_k x^k| \leqslant \|u\|_\infty . x^k.$$

Comme $0 \leqslant x < 1$, la série géométrique $\sum x^k$ est une suite convergente de terme général positif, donc la série $\sum u_k x^k$ est bien absolument convergente.

Par inégalité triangulaire,

$$\forall\, x \in [0,1[, \quad \left|(1-x)\sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k\right| \leqslant (1-x)\sum_{k=0}^{+\infty} \|u\|_\infty x^k \leqslant \|u\|_\infty.$$

Le majorant trouvé étant indépendant de x, on en déduit que

$$\|u\| \leqslant \|u\|_\infty$$

par passage au sup (par rapport à $x \in [0,1[$).

✍ *Trouver un contre-exemple n'est pas une chose évidente. Il s'agit ici de trouver une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E et la difficulté vient du fait que chaque terme u_k est lui-même une suite réelle bornée.*

Il s'agit de faire en sorte que la somme de la série entière

$$\sum_n u_k(n)x^n$$

soit de plus en plus petite à mesure que l'indice k augmente.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n \text{ termes}}, 1, 0, 0, \dots).$$

Il est clair que $\|u_n\|_\infty = 1$ et que

$$\forall\, 0 \leqslant x < 1, \qquad (1-x)\sum_{k=0}^{+\infty} u_n(k)x^k = (1-x)x^n = x^n - x^{n+1}.$$

L'étude des variations de $\left[x \mapsto x^n - x^{n+1}\right]$ montre que cette fonction est positive sur $[0,1[$ et atteint son maximum en $x = {}^n\!/_{n+1}$. Ce maximum est égal à

$$\|u_n\| = \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n\| = 0 \quad \text{alors que} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \|u_n\|_\infty = 1.$$

❧ On a ainsi démontré que les deux normes n'étaient pas équivalentes.

Solution 9

Soit f, une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, la fonction

$$\varphi = \left[t \mapsto f^2(t)e^{-t}|\cos t|\right]$$

est une fonction continue sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$ et

$$\forall\, t \in I, \quad 0 \leqslant f^2(t)e^{-t}|\cos t| \leqslant \|f\|_\infty^2 . e^{-t}.$$

On en déduit d'une part que φ est bien intégrable sur I et d'autre part que

$$\|f\|^2 \leqslant \|f\|_\infty \left(\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt\right)^{1/2} = \|f\|_\infty.$$

❧ On vient de voir que $\|\cdot\|$ est bien une application de F dans $\mathbb{R}_+$.
Le plus simple ensuite est de remarquer que c'est la norme associée à un produit scalaire :

$$\langle f \,|\, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}|\cos t|\,dt.$$

La bilinéarité, la symétrie et la positivité sont évidentes. Enfin, si $\|f\| = 0$, alors l'application φ est une fonction continue et positive dont l'intégrale est nulle. Elle est donc nulle sur $\mathbb{R}_+$, ce qui prouve que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+ \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{N}\right\}, \quad f(t) = 0.$$

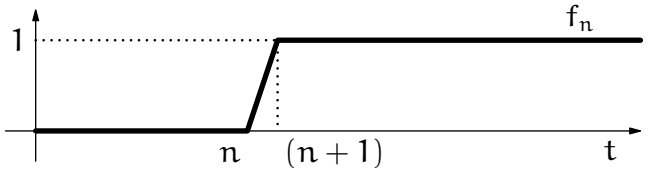
Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit par densité que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \qquad f(t) = 0.$$

. Donc $\|\cdot\|$ est bien une norme sur F.

❧ On cherche maintenant une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans F telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \|f_n\|_\infty = 1 \quad \text{et que} \quad \lim_{n\to+\infty} \|f_n\| = 0.$$



Avec les fonctions f_n représentées sur le graphe ci-dessus, il est clair que $\|f_n\|_\infty = 1$ pour tout n. D'autre part,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \|f_n\|^2 \leqslant \int_n^{+\infty} 1^2 \cdot e^{-t} \cdot 1\,dt = e^{-n}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n\| = 0.$$

On a ainsi démontré que les deux normes n'étaient pas équivalentes sur F.

Solution 10

Il s'agit d'abord de vérifier que $\|\cdot\|$ est bien une norme.

❧ D'après la Formule de Taylor pour les polynômes,

$$\forall\, P \in E, \qquad P = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}\, X^k$$

et les $P^{(k)}(0)$ sont tous nuls à partir d'un certain rang. Par conséquent, il n'y a qu'un nombre FINI d'indices $k \in \mathbb{N}$ tels que

$$|P^{(k)}(0)| > 0,$$

ce qui prouve que le maximum est bien défini. Donc $\|\cdot\|$ est bien une application de E dans $\mathbb{R}_+$.

❧ L'homogénéité (absolue)

$$\forall\, P \in E,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda P\| = |\lambda|\, \|P\|$$

est assez évidente et l'inégalité triangulaire ne pose aucune difficulté non plus : en effet,

$$\begin{aligned}\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \frac{\left|(P+Q)^{(k)}(0)\right|}{k!} &\leqslant \frac{\left|P^{(k)}(0)\right|}{k!} + \frac{\left|Q^{(k)}(0)\right|}{k!}\\ &\leqslant \|P\| + \|Q\|\end{aligned}$$

et il ne reste plus qu'à passer au maximum.

❧ Quant à la séparation des points, il suffit de remarquer que si $\|P\| = 0$, alors tous les coefficients de

$$P = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}\, X^k$$

sont nuls et que $P = 0$ par conséquent !

❧ Quel que soit $P \in E$, l'application

$$\varphi_P = \left[t \mapsto \frac{P(t)\,\ell n\, t}{1+t}\right]$$

est continue sur l'intervalle $I =]0,1]$. Le quotient $P(t)/(1+t)$ tend vers une limite finie (égale à $P(0)$) lorsque t tend vers 0 et la fonction ℓn est intégrable au voisinage de 0, donc la fonction φ_P est bien intégrable sur I.

Par conséquent, T est bien une forme linéaire sur E.

❧ Il s'agit maintenant de trouver une constante K telle que

$$\forall\, P \in E, \quad \left|\int_0^1 \frac{P(t)\,\ell n\, t}{1+t}\, dt\right| \leqslant K\|P\|.$$

L'idée consiste donc à majorer la fonction intégrande φ_P à l'aide de $\|P\|$.

Soit P, un polynôme de degré d. Pour tout $t \in]0,1[$,

$$\left|P(t)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{d} \left|\frac{P^{(k)}(0)}{k!}\right| t^k \leqslant \left(\sum_{k=0}^{d} t^k\right) \|P\| \leqslant \frac{\|P\|}{1-t}.$$

On en déduit que

$$\forall\, P \in E,\ \forall\, t \in]0,1[, \quad \left|\frac{P(t)\,\ell n\, t}{1+t}\right| \leqslant \|P\|\, \frac{|\ell n\, t|}{(1+t)(1-t)}.$$

La fonction g définie par

$$\forall\, 0 < t < 1, \qquad g(t) = \frac{1}{1+t} \cdot \frac{\ell n\, t}{1-t}$$

est continue sur l'intervalle $]0,1[$. De plus,

$$g(t) \underset{t\to 0}{\sim} \ell n\, t \quad \text{et} \quad g(t) \xrightarrow[t\to 1]{} \frac{1}{2}$$

donc la fonction g est intégrable sur $]0,1[$ et

$$\forall\, P \in E, \quad \left|T(P)\right| \leqslant \left(\int_0^1 \frac{|\ell n\, t|}{(1-t^2)}\, dt\right) \cdot \|P\|.$$

✍ *On peut démontrer que l'équation*

$$\left|T(P)\right| = |T|\, \|P\|$$

admet $P = 0$ pour seule solution et que $|T| = \pi^2/8$.

Solution 11

Chaque somme ne compte qu'un nombre *fini* de termes, donc est bien définie. Toute famille *finie* de réels positifs admet un plus grand élément, qui est un réel positif, donc

$$[A \mapsto \|A\|]$$

est bien une application de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{R}_+$.

❧ Cette application est absolument homogène : quel que soit le scalaire λ,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \sum_{\ell=1}^{n} |\lambda\, a_{k,\ell}| = |\lambda| \sum_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}|$$

donc

$$\|\lambda A\| = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\lambda| \sum_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}| = |\lambda|\, \|A\|.$$

❧ Cette application vérifie l'inégalité triangulaire :

$$\forall\, 1 \leqslant k, \ell \leqslant n, \qquad |a_{k,\ell} + b_{k,\ell}| \leqslant |a_{k,\ell}| + |b_{k,\ell}|$$

donc

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \qquad \sum_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell} + b_{k,\ell}| \leqslant \sum_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}| + |b_{k,\ell}|.$$

Comme le maximum est un majorant,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \qquad \sum_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell} + b_{k,\ell}| \leqslant \|A\| + \|B\|.$$

On a un majorant indépendant du paramètre k, on peut donc passer au maximum :

$$\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|.$$

❧ Cette application sépare les points. Si $\|A\| = 0$, alors

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \qquad \sum_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}| = 0.$$

✍ *Étant donnée une famille de réels positifs, si le plus grand élément est nul, alors tous les éléments sont nuls.*

On en déduit que

$$\forall\, 1 \leqslant k, \ell \leqslant n, \qquad a_{k,\ell} = 0$$

c'est-à-dire $A = 0_n$.

✍ *Si une somme de réels positifs est nulle, alors chaque terme est nul.*

❧ Nous avons démontré que l'application $[A \mapsto \|A\|]$ était bien une norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Il reste à vérifier que

$$\forall\, A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \qquad \|AB\| \leqslant \|A\|\, \|B\|.$$

❧ Notons

$$AB = (c_{k,\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} \qquad \text{où} \qquad c_{k,\ell} = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} b_{j,\ell}.$$

Par inégalité triangulaire,

$$\forall\, 1 \leqslant k, \ell \leqslant n, \qquad |c_{k,\ell}| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{k,j}|\, |b_{j,\ell}|.$$

Par conséquent,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \sum_{\ell=1}^{n} |c_{k,\ell}| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{k,j}| \sum_{\ell=1}^{n} |b_{j,\ell}|.$$

Comme le maximum est un majorant,

$$\forall\, 1 \leqslant j \leqslant n, \quad \sum_{\ell=1}^{n} |b_{j,\ell}| \leqslant \|B\|$$

donc

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \sum_{\ell=1}^{n} |c_{k,\ell}| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{k,j}| \|B\| \leqslant \|A\|\,\|B\|.$$

On a un majorant indépendant du paramètre k, donc on peut passer au maximum :

$$\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|.$$

✍ *On peut démontrer le résultat d'une autre manière si on est plus savant.*

❧ *Munissons l'espace $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ des matrices colonnes de la norme usuelle $\|\cdot\|_\infty$:*

$$\forall\, X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \qquad \|X\|_\infty = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|.$$

On peut alors considérer la norme $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ qui est subordonnée à la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$:

$$|\!|\!|A|\!|\!| = \sup_{\|X\|_\infty = 1} \|AX\|_\infty. \qquad (\star)$$

❧ *Par définition,*

$$\|AX\|_\infty = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |y_k| \quad \text{où} \quad \forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad y_k = \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} x_\ell.$$

Par inégalité triangulaire,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad |y_k| \leqslant \sum_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}|\,|x_\ell| \leqslant \left(\sum_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}|\right) \|X\|_\infty \leqslant \|A\|\,\|X\|_\infty.$$

Le majorant ne dépend pas du paramètre k, donc on peut passer au maximum et en déduire que

$$\forall\, X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \qquad \|AX\|_\infty \leqslant \|A\|\,\|X\|_\infty.$$

En particulier, $|\!|\!|A|\!|\!| \leqslant \|A\|$ d'après $(\star)$.

❧ *Par ailleurs, il existe un rang $1 \leqslant k_0 \leqslant n$ tel que*

$$\|A\| = \sum_{\ell=1}^{n} |a_{k_0,\ell}|.$$

Pour tout $1 \leqslant \ell \leqslant n$, il existe un réel θ_ℓ tel que

$$a_{k_0,\ell} = |a_{k_0,\ell}| e^{i\theta_\ell}.$$

On pose alors

$$X_0 = \begin{pmatrix} e^{-i\theta_1} & \cdots & e^{-i\theta_n} \end{pmatrix}^\top.$$

Il est clair que $\|X_0\|_\infty = 1$ et que

$$\sum_{\ell=1}^{n} a_{k_0,\ell} x_\ell = \sum_{\ell=1}^{n} |a_{k_0,\ell}| = \|A\|.$$

Par conséquent,

$$\|AX_0\|_\infty \overset{\text{déf.}}{=} \max\, 1 \leqslant k \leqslant n \left| \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} x_\ell \right| \geqslant \|A\|.$$

D'après $(\star)$, $|\!|\!|A|\!|\!| \geqslant \|A\|$.

❧ *On a ainsi démontré (par double inégalité) que $\|A\| = |\!|\!|A|\!|\!|$ et on sait que la norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ subordonnée à une norme quelconque sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est toujours une norme sous-multiplicative.*

Solution 12

Puisque la borne inférieure est un minorant,

$$\forall\, n \geqslant 1, \qquad \ell \leqslant u_n. \tag{4}$$

❧ Considérons maintenant un réel λ tel que $\ell < \lambda$. Il s'agit de démontrer qu'il existe un rang $n_0 \geqslant 1$ tel que

$$\forall\, n \geqslant n_0, \qquad u_n \leqslant \lambda$$

pour conclure.

✍ *On présente le problème de cette manière pour ne pas avoir à discuter sur ℓ : la démonstration qui suit s'applique aussi bien au cas $\ell \in \mathbb{R}$ qu'au cas $\ell = -\infty$.*
Ce n'est que dans le cas $\ell \in \mathbb{R}$ qu'on peut remplacer λ par $\ell + \varepsilon$ avec un $\varepsilon > 0$ choisi une fois pour toutes.

Comme $\ell < \lambda$ et que ℓ est la borne inférieure, le réel ℓ n'est pas un minorant. Il existe donc un entier $m \geqslant 1$ tel que

$$\ell \leqslant u_m < \lambda. \tag{5}$$

✍ *Cet indice m est définitivement fixé.*

❧ Pour comprendre ce qui suit, il faut remarquer que le second membre de l'inégalité $(\star)$ est une **combinaison convexe** de u_m et de u_n, c'est-à-dire un réel appartenant au segment $[u_m \leftrightarrow u_n]$.
En prenant $n = m$ dans $(\star)$, on obtient

$$u_{2m} \leqslant \frac{1}{2}u_m + \frac{1}{2}u_m = u_m.$$

On recommence alors avec $n = 2m$:

$$u_{3m} \leqslant \frac{2}{3}u_{2m} + \frac{1}{3}u_m \leqslant \frac{2}{3}u_m + \frac{1}{3}u_m = u_m$$

et on devine alors qu'on peut démontrer par récurrence (sur k) que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad u_{km} \leqslant u_m. \tag{6}$$

✍ *Pour le moment, on a démontré que*

$$\forall\, \lambda > \ell,\ \exists\, m(\lambda) \geqslant 1,\ \forall\, k \geqslant 1, \quad \ell \leqslant u_{km} \leqslant u_m < \lambda.$$

On peut en déduire pour le moment qu'il existe une suite extraite *de $(u_n)_{n\geqslant 1}$ qui tend vers ℓ (exercice : le rédiger !).*
*Il y a mieux à faire : passer des seuls entiers multiples de m à **tous** les entiers en pensant* division euclidienne par m.

❧ La famille $\{u_1, \dots, u_{m-1}\}$ est finie, donc elle est bornée : il existe un réel M tel que

$$\forall\, 1 \leqslant r < m, \qquad |u_r| \leqslant M. \tag{7}$$

En appliquant $(\star)$ avec $m \leftarrow km$ et $n \leftarrow r$,

$$u_{km+r} \leqslant \frac{km}{km+r}u_{km} + \frac{r}{km+r}u_r.$$

En imposant $1 \leqslant r < m$, on déduit de (6) et de (7) que

$$\forall\, k \geqslant 1,\ \forall\, 1 \leqslant r < m, \quad u_{km+r} \leqslant 1 \cdot u_m + \frac{m}{km+0} \cdot M = u_m + \frac{M}{k}.$$

Pour chaque valeur $1 \leqslant r < m$, le majorant tend vers u_m lorsque k tend vers $+\infty$ et comme $u_m < \lambda$ par hypothèse, il existe un rang $K_{0,r}$ tel que

$$\forall\, k \geqslant K_{0,r}, \qquad u_{km+r} < \lambda.$$

Il n'y a qu'un nombre fini de valeurs de r à considérer, donc on peut poser

$$K_0 = \max\{K_{0,r},\ 1 \leqslant r < m\} \in \mathbb{N}$$

pour obtenir

$$\forall\, 1 \leqslant r < m,\ \forall\, k \geqslant K_0, \qquad u_{km+r} < \lambda.$$

On a ainsi démontré que

$$\forall\, n \geqslant K_0 m, \qquad u_n < \lambda.$$

❧ On a finalement démontré que, pour tout réel $\lambda > \ell$, il existe un rang $N_\lambda \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n \geqslant N_\lambda, \qquad \ell \leqslant u_n < \lambda.$$

Autrement dit :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

Solution 13

1. Soit $f \in E$. Comme f est continue sur les deux segments $[-1,0]$ et $[0,1]$, les deux intégrales sont bien définies et par conséquent T est une application de E dans $\mathbb{R}$.

La linéarité de l'intégrale prouve alors que T est une forme linéaire et il nous reste à étudier s'il existe une constante $K \geqslant 0$ telle que

$$\forall f \in E, \qquad \big|T(f)\big| \leqslant K\|f\|.$$

❧ Toute fonction continue sur un segment est bornée et, par définition,

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[-1,1]} \big|f(t)\big|.$$

La borne supérieure est un majorant, donc

$$\forall t \in [-1,1], \quad \big|f(t)\big| \leqslant \|f\|_\infty.$$

L'intégration conservant les inégalités, on en déduit que

$$\int_0^1 \big|f(t)\big|\,dt \leqslant (1-0)\cdot\|f\|_\infty \quad \text{et} \quad \int_{-1}^0 \big|f(t)\big|\,dt \leqslant [0-(-1)]\cdot\|f\|_\infty.$$

D'après l'inégalité triangulaire intégrale, pour toute fonction $f \in E$,

$$\begin{aligned}\big|T(f)\big| &\leqslant \left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| + \left|\int_{-1}^0 f(t)\,dt\right| \\ &\leqslant \int_0^1 \big|f(t)\big|\,dt + \int_{-1}^0 \big|f(t)\big|\,dt \\ &\leqslant 2\|f\|_\infty.\end{aligned}$$

Cela prouve que la forme linéaire T est continue pour $\|\cdot\|_\infty$ et que, dans ce cas, $|T| \leqslant 2$.

✍ *Nous allons maintenant prouver que $|T| = 2$.*
Pour cela, la théorie nous indique deux possibilités :
— Ou bien il existe une fonction $f_0 \in E$, distincte de 0_E, telle que

$$\big|T(f_0)\big| = 2\|f_0\|_\infty$$

ce qui prouve que

$$|T| \overset{\text{déf.}}{=} \sup_{f\neq 0_E} \frac{\big|T(f)\big|}{\|f\|_\infty} \geqslant 2$$

et permet de conclure (par double inégalité).

— Ou bien une telle fonction f_0 n'existe pas et il faut trouver une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de E, évidemment distinctes de 0_E, telles que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\big|T(f_n)\big|}{\|f_n\|_\infty} = 2,$$

ce qui prouve également que $|T| \geqslant 2$ et permet de conclure de la même manière.

❧ Commençons donc par chercher une fonction f_0 continue sur $[-1,1]$, telle que

$$\|f_0\|_\infty = 1 \quad \text{et} \quad \big|T(f_0)\big| = 2.$$

D'après les calculs qui précèdent, cela revient à supposer que

$$\|f_0\|_\infty = 1 \quad \text{et} \quad \int_{-1}^0 \big|f_0(t)\big|\,dt = \int_0^1 \big|f_0(t)\big|\,dt = 1.$$

La continuité de f_0 permet d'invoquer le Théorème de nullité de l'intégrale qui nous dit que

$$\forall t \in [-1,1], \qquad \big|f_0(t)\big| = 1.$$

Mais la toute première majoration impose que

$$\forall t \in [-1,0], \quad f_0(t) = -1 \quad \text{et} \quad \forall t \in [0,1], \quad f_0(t) = +1$$

(cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire) : c'est impossible !

❧ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n, la fonction continue et affine par morceaux qui vaut

— -1 sur le segment $[-1, -1/2^n]$;
— $+1$ sur le segment $[1/2^n, 1]$
— et $2^{n+1}t$ sur le segment $[-1/2^n, 1/2^n]$.

✍ *Il faut faire une figure pour comprendre qu'on choisit des fonctions continues qui s'approchent autant que possible de la fonction f_0 qu'on cherchait précédemment.*

Il est clair que les f_n appartiennent à E et que $\|f_n\|_\infty = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par ailleurs, on vérifie sans peine que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad T(f_n) = 2\Big(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\Big).$$

✍ *"Sans peine"... à condition d'avoir tracé le graphe de f_n !*

Il existe donc une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs non nuls de E tels que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|T(f_n)|}{\|f_n\|_\infty} = 2,$$

ce qui prouve que $|T| = 2$.

2. Nous considérons maintenant la norme définie par

$$\forall\, f \in E, \quad \|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(t)|\,dt.$$

Par inégalité triangulaire (dans $\mathbb{R}$, puis pour les intégrales),

$$\begin{aligned} |T(f)| &\leqslant \left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| + \left|\int_{-1}^0 f(t)\,dt\right| \\ &\leqslant \int_{-1}^1 |f(t)|\,dt = \|f\|_1 \end{aligned}$$

ce qui prouve que la forme linéaire T est continue aussi pour la norme $\|\cdot\|_1$, mais cette fois $|T| \leqslant 1$.

❧ La connaissance des cas d'égalité nous disent la même chose que plus haut :
— les intégrales sur $[-1, 0]$ et sur $[0, 1]$ doivent être de signes opposés (cas d'égalité pour l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$) ;
— la fonction f_0 doit être de signe constant sur $[-1, 0]$ et de signe constant sur $[0, 1]$ (cas d'égalité pour l'inégalité triangulaire des intégrales).

Il suffit de considérer la fonction $f_0 = [t \mapsto t]$ pour que ces contraintes soient vérifiées !

On constate alors que

$$T(f_0) = \frac{1}{2} - \frac{-1}{2} = 1 \quad \text{et que} \quad \|f_0\|_1 = \int_{-1}^{1} |t|\,dt = 1,$$

ce qui prouve que

$$|T| \overset{\text{déf.}}{=} \sup_{f\neq 0_E} \frac{|T(f)|}{\|f\|_1} \geqslant \frac{|T(f_0)|}{\|f_0\|_1} = 1$$

et donc que $|T| = 1$ par double inégalité.

Solution 14

Tout d'abord, il est clair que T est une application linéaire de E dans E.

La borne supérieure étant un majorant,

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n,\ \forall\, t \in [0, 1], \quad |L_k(t)| \leqslant \|L_k\|_\infty$$

et

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad |f(a_k)| \leqslant \|f\|_\infty.$$

Par inégalité triangulaire,

$$\forall\, t \in [0, 1], \quad |T(f)(t)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |f(a_k)|\,|L_k(t)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \|f\|_\infty\,\|L_k\|_\infty.$$

On a un majorant indépendant de t, ce qui nous permet de passer à la borne supérieure par rapport à $t \in [0,1]$:

$$\forall\, f \in E, \qquad \big\|T(f)\big\|_\infty \leqslant \Big(\sum_{k=0}^{n} \|L_k\|_\infty\Big)\, \|f\|_\infty.$$

Cet encadrement prouve que l'application linéaire T est continue et que

$$|T| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \|L_k\|_\infty.$$

✍ *On ne calculera la valeur exacte de $|T|$ (je n'ai aucune idée de la manière de faire !), mais on peut deviner sur cet encadrement que, plus le nombre de points d'interpolation est élevé, plus la valeur de $|T|$ est grande.*

Autrement dit, l'interpolation au sens de Lagrange est une très mauvaise méthode d'approximation — cf. l'article sur le "phénomène de RUNGE" sur Wikipédia.

Solution 15

1. Soit $u \in E$. Comme la borne supérieure est un majorant,

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad |u_n| \leqslant \|u\|_\infty$$

et, par inégalité triangulaire,

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \Big|\frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}\Big| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |u_k| \leqslant \|u\|_\infty.$$

❧ Cet encadrement prouve pour commencer que $T(u) \in E$ pour toute suite $u \in E$, donc T est bien une application de E dans E.

❧ Il est clair que T est une application linéaire.

❧ Dans l'encadrement qu'on vient de trouver, le majorant est indépendant de l'indice n. On peut donc passer à la borne supérieure par rapport à $n \in \mathbb{N}^*$ et obtenir

$$\forall\, u \in E, \quad \big\|T(u)\big\|_\infty \leqslant \|u\|_\infty.$$

Cet encadrement prouve que l'application linéaire T est continue sur E et aussi que $|T| \leqslant 1$.

❧ Si v est la suite constante égale à 1, alors $T(v) = v$ et

$$\big\|T(v)\big\|_\infty = \|v\|_\infty = 1,$$

ce qui prouve que $|T| \geqslant 1$.

On a prouvé par double inégalité que $|T| = 1$.

2. Si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une famille sommable, alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente, donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée (elle est nécessairement convergente, de limite nulle). Cela pour justifier que l'espace F est bien un sous-espace de E.

❧ En reprenant les calculs précédents, pour toute famille $u \in F$,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \Big|\frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}\Big| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |u_k| \leqslant \frac{\|u\|_1}{n}.$$

On en déduit que

$$\forall\, u \in F, \quad \big\|T(u)\big\|_\infty \leqslant \|u\|_1$$

et donc que T est continue en tant qu'application linéaire de $(F, \|\cdot\|_1)$ dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

❧ Plus précisément, il est clair que la famille

$$v = (v_1, v_2, \dots) = (1, 0, \dots)$$

est sommable (le terme général est nul à partir d'un certain rang), que

$$\|v\|_1 = 1$$

et que

$$T(v) = (1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots).$$

On a donc trouvé un vecteur $v \in F$ tel que

$$\|v\|_1 = 1 \quad \text{et} \quad \left\|T(v)\right\|_\infty = 1,$$

ce qui prouve que $\|T\| = 1$ à nouveau.

❧ Il reste à vérifier que le sous-espace F n'est pas stable par T.

Pour cela, on considère une famille sommable V non nulle de terme général positif, de telle sorte que la série $\sum v_n$ soit convergente et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \|v\|_1 > 0.$$

On en déduit que

$$\frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\|v\|_1}{n}.$$

Comme $\|v\|_1 > 0$, la série $\sum \|v\|_1/n$ est divergente, ce qui prouve que $T(v) \notin F$.

Solution 16

1. Pour toute fonction $f \in E$ et tout réel $x \in [0,1]$, l'application

$$[t \mapsto (x+t)f(t)]$$

est continue sur le segment $[0,1]$, donc l'intégrale $T(f)(x)$ est bien définie.

Par linéarité de l'intégrale,

$$T(f)(x) = \int_0^1 tf(t)\,dt + x\int_0^1 f(t)\,dt,$$

ce qui prouve que $T(f)$ est une fonction affine et en particulier une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$:

$$\forall f \in E, \qquad T(f) \in E.$$

Il est clair que T est linéaire (linéarité de l'intégrale), donc T est bien un endomorphisme de E.

❧ Comme $T(f)$ est une fonction affine et que toute fonction continue sur $[0,1]$ n'est pas une fonction affine, il est clair que T n'est pas surjectif.

❧ Comme E est un espace vectoriel de dimension infinie et que Im T est un espace de dimension finie (l'espace des fonctions affines est un plan vectoriel et Im T est contenue dans ce plan), l'endomorphisme T ne peut pas être injectif.

✍ *On peut vérifier qu'il existe une fonction polynomiale de degré 2 :*

$$\forall\, t \in [0,1], \quad f(t) = t^2 + at + b$$

telle que

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 tf(t)\,dt = 0$$

et donc telle que $T(f) = 0_E$.

Deux manières possibles :

— *on détermine a et b en posant, puis en résolvant un système de deux équations linéaires ;*

— *on considère le produit scalaire défini par*

$$\langle h \,|\, g \rangle = \int_0^1 g(t)h(t)\,dt$$

et on applique l'algorithme de Gram-Schmidt à la famille libre

$$\left([t \mapsto t^d]\right)_{0\leqslant d\leqslant 2}.$$

2. Soit $f \in E$. Pour tout $x \in [0,1]$, par inégalité triangulaire (pour les réels, puis pour les intégrales),

$$\begin{aligned}\left|T(f)(x)\right| &\leqslant \left|\int_0^1 tf(t)\,dt\right| + |x|\left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| \\ &\leqslant \int_0^1 \left|tf(t)\right|dt + \int_0^1 \left|f(t)\right|dt.\end{aligned}$$

Or la borne supérieure est un majorant, donc

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \big|f(t)\big| \leqslant \|f\|_\infty \quad \text{et} \quad \big|tf(t)\big| \leqslant t\cdot\|f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty.$$

Ainsi

$$\forall\, x \in [0,1], \quad \big|T(f)(x)\big| \leqslant 2\|f\|_\infty.$$

On a un majorant indépendant du paramètre $x \in [0,1]$, on peut donc passer au sup :

$$\forall\, f \in E, \qquad \big\|T(f)\big\|_\infty \leqslant 2\|f\|_\infty$$

ce qui prouve que l'application linéaire T est continue et que $|T| \leqslant 2$.

✍ *La norme subordonnée de T est strictement inférieure à 2 ! On peut en effet reprendre le calcul précédent en majorant plus finement : comme*

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \big|tf(t)\big| \leqslant t\cdot\|f\|_\infty,$$

on obtient

$$\big|T(f)(x)\big| \leqslant \left(\int_0^1 t\,dt + |x|\right)\|f\|_\infty \leqslant \frac{3}{2}\|f\|_\infty,$$

ce qui prouve que $|T| \leqslant 3/2$.

En considérant la fonction constante $f_0 = [t \mapsto 1]$, on a bien sûr $\|f_0\|_\infty = 1$ et

$$\forall\, x \in [0,1], \quad T(f_0)(x) = x + \frac{1}{2} \geqslant 0$$

donc

$$\big\|T(f_0)\big\|_\infty = T(f_0)(1) = \frac{3}{2}.$$

Et c'est ainsi que $|T| = 3/2$.

Solution 17

1. L'intervalle $A = [0,1]$ est contenu dans l'intervalle $B = [-1,1]$ mais

$$\inf A = 0 > -1 = \inf B.$$

L'implication est donc fausse.

✍ *En revanche, l'implication*

$$A \subset B \implies \inf B \leqslant \inf A$$

est vraie. En effet, comme $A \subset B$, tout élément x de A appartient aussi à B et comme la borne inférieure de B est un minorant de B,

$$\forall\, x \in A, \qquad \inf B \leqslant x.$$

Le minorant est indépendant de $x \in A$, donc on peut passer à la borne inférieure :

$$\inf B \leqslant \inf A.$$

(C'est du cours !)

2. Par construction, pour tout $x \in A + B$, il existe $y \in A$ et $z \in B$ tels que

$$x = y + z \leqslant \sup A + \sup B$$

(puisqu'une borne supérieure est un majorant). Ce majorant est indépendant de $x \in A + B$, donc on peut passer à la borne supérieure :

$$\sup(A + B) \leqslant \sup A + \sup B.$$

Réciproquement, quels que soient $y \in Z$ et $z \in B$, le réel $x = y + z$ appartient à $A + B$ et comme une borne supérieure est un majorant,

$$\forall\, (y,z) \in A \times B, \qquad y + z \leqslant \sup(A + B).$$

Pour $y \in A$ (fixé), on a donc

$$\forall\, z \in B, \qquad z \leqslant \sup(A + B) - y.$$

Ce majorant est indépendant de $z \in B$, donc on peut passer à la borne supérieure :

$$\forall y \in A, \qquad \sup B \leqslant \sup(A+B) - y$$

c'est-à-dire

$$\forall y \in A, \qquad y \leqslant \sup(A+B) - \sup B.$$

À nouveau, on a trouvé un majorant indépendant du paramètre (cette fois, le paramètre est $y \in A$), donc on peut passer à la borne supérieure :

$$\sup A \leqslant \sup(A+B) - \sup B.$$

On a ainsi démontré que

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B$$

par double inégalité.

3. On pose

$$A = \{f(x),\ x \in X\} \quad \text{et} \quad B = \{g(x),\ x \in X\}.$$

Comme les applications f et g sont bornées, les parties A et B sont bornées et comme $X \neq \varnothing$, elles ne sont pas vides.

On s'intéresse ici à la borne supérieure de la partie

$$C = \{f(x) + g(x),\ x \in X\}$$

qui est évidemment contenue dans la partie

$$D = \{f(x) + g(y),\ (x,y) \in X \times X\} = A + B.$$

Par conséquent, $\sup C \leqslant \sup(A+B) = \sup A + \sup B$, c'est-à-dire

$$\sup_{x\in X} f(x) + g(x) \leqslant \sup_{x\in X} f(x) + \sup_{x\in X} g(x).$$

Comme $C \subsetneq D$, on peut se douter que cette inégalité peut être stricte...

✍ *Nous allons chercher des fonctions f et g qui atteignent leurs maximums respectifs pour des valeurs* différentes *de la variable, de manière à obtenir :*

$$\max_{x\in X} f(x) + g(x) = f(x_0) + g(x_0) < f(x_1) + g(x_2) = \max_{x\in X} f(x) + \max_{x\in X} g(x).$$

Considérons les fonctions f et g définies sur $X = [0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = 1 + x \quad \text{et} \quad g(x) = 1 - x.$$

Il est clair (monotonie des deux fonctions !) que

$$\sup_{x\in[0,1]} f(x) = f(1) = 2 \quad \text{et que} \quad \sup_{x\in[0,1]} g(x) = g(0) = 1.$$

Cependant,

$$\forall x \in [0,1], \qquad f(x) + g(x) = 2$$

et donc

$$\sup_{x\in[0,1]} f(x) + g(x) = f(1) + g(1) = 2 < 3 = \sup_{x\in[0,1]} f(x) + \sup_{x\in[0,1]} g(x).$$

Solution 18

1.

✍ *Dans les deux cas, on considère une partie non vide de $\mathbb{R}$ qui est minorée (par 0), donc les bornes inférieures existent bien. Il reste à savoir les calculer...*

Il s'agit simplement d'étudier les variations de la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x > 0, \qquad f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

Il est clair que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\forall\, x > 0, \qquad f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}.$$

Par conséquent, la fonction f est d'abord décroissante sur $]0,1]$, puis croissante sur $[1,+\infty[$. Cette fonction atteint donc son minimum pour $x = 1$ et finalement

$$\inf A = \min A = f(1) = 2.$$

2.

✍ *L'énoncé nous suggère de relier la seconde étude à la première...*

Pour $x > 0$, on a démontré que

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{1}{x} - 1\right) \geqslant -(x-1).$$

Par croissance de $\left[t \mapsto 2^t = e^{t\,\ell n\, 2}\right]$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\forall\, x > 0, \quad 2^x + 2^{1/x} &= 2\cdot\left(2^{(x-1)} + 2^{(1/x-1)}\right)\\ &\geqslant 2\cdot\left(2^{(x-1)} + 2^{-(x-1)}\right)\\ &\geqslant 2\cdot\left[2^{(x-1)} + \frac{1}{2^{(x-1)}}\right].\end{aligned}$$

L'étude précédente montre que

$$\forall\, y > 0, \quad 2^y + \frac{1}{2^y} \geqslant 2$$

avec égalité pour $y = 1$. On prend ici $y = 2^{(x-1)} > 0$, qui est égal à 1 pour $x = 1$.
On a ainsi déduit de la question précédente que

$$\forall\, x > 0, \quad 2^x + 2^{1/x} \geqslant 4$$

avec égalité pour $x = 1$. Par conséquent,

$$\inf B = \min B = 4.$$

✍ *On aurait pu étudier la fonction g définie par*

$$\forall\, x > 0, \quad g(x) = 2^x + 2^{1/x}$$

dont la dérivée est

$$\forall\, x > 0, \quad g'(x) = \ell n\, 2 \cdot \left(2^x - \frac{2^{1/x}}{x^2}\right).$$

Bon courage pour l'étude des variations !

Solution 19

✍ *Ça se voit, non ?*
Pardon ? C'est pas la bonne réponse ? OK, on s'y colle.
Inutile de penser à la dérivée : la fonction étudiée n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soient $x \leqslant y$, deux réels.
Deux cas sont possibles :
— Ou bien il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n \leqslant x \leqslant y < n+1.$$

Dans ce cas, par définition de la partie entière, on a

$$\lfloor x \rfloor = n = \lfloor y \rfloor$$

et en particulier $\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$.

— Ou bien il existe deux entiers $n, p \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n \leqslant x < n+1 \leqslant p \leqslant y < p+1.$$

Dans ce cas, on a $\lfloor x \rfloor = n$ et $\lfloor y \rfloor = p$ avec cette fois

$$\lfloor x \rfloor < \lfloor y \rfloor .$$

Dans les deux cas, on a démontré que

$$\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor ,$$

donc la fonction *partie entière* est croissante sur $\mathbb{R}$.

✍ *Toute la difficulté réside ici dans le fait de justifier clairement qu'on a distingué tous les cas possibles. (On n'oserait pas remplacer un argument du genre "ça se voit clairement" par un argument du genre "il est bien évident que", noooon...)*
La première clause se formule logiquement sous la forme :

$$\exists\, n \in \mathbb{Z}, \qquad (n \leqslant x) \quad et \quad (y < n+1).$$

La négation de cette clause s'obtient par la méthode habituelle :

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}, \qquad (n > x) \quad ou \quad (y \geqslant n+1). \tag{$\star$}$$

Par définition de la partie entière, il existe deux entiers $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}$ tels que

$$n \leqslant x < n+1 \quad et \quad p \leqslant y < p+1.$$

En combinant l'encadrement de x avec la négation $(\star)$, on obtient que

$$y \geqslant n+1.$$

On a donc $n+1 \leqslant y < p+1$ et par conséquent $n < p$.
Comme d'habitude, les choses qui se voient le mieux ne sont pas les plus simples à dire.

Solution 20

1.

✍ *Même si la question n'est pas posée, il est de bon goût d'y répondre : il y a un* max *dans la définition de la norme $\|\cdot\|_\infty$ car on considère ici des fonctions* continues *sur le* segment $[0,1]$ *et on sait que de telles fonctions sont bornées et* atteignent leurs bornes.

Comme f est continue sur $[0,1]$, elle est continue sur le segment $[0,x]$ pour tout $x \in [0,1]$, donc l'intégrale $\varphi(f)(x)$ est bien définie pour tout $x \in [0,1]$.
D'après le Théorème fondamental, l'application $\varphi(f)$ est une primitive de f, donc c'est en particulier une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
Par linéarité de l'intégrale, l'application φ est linéaire.

✍ *Je vous laisse le soin de **poser** le calcul qui justifie la linéarité de φ.*

On a ainsi démontré que φ était un endomorphisme de E.
❧ Pour tout $t \in [0,1]$,

$$\left|f(t)\right| \leqslant \|f\|_\infty$$

puisque la borne supérieure est un majorant.
Par inégalité triangulaire et positivité de l'intégrale,

$$\forall\, x \in [0,1], \quad \left|\varphi(f)(x)\right| \leqslant \int_0^x \left|f(t)\right| dt \leqslant x\|f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty.$$

On a trouvé un majorant indépendant du paramètre $x \in [0,1]$, nous pouvons passer à la borne supérieure :

$$\forall\, f \in E, \quad \|\varphi(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty.$$

Cette inégalité prouve que l'endomorphisme φ est continu et que $|\varphi| \leqslant 1$.

2. Considérons la fonction $f_0 = [t \mapsto 1]$. Il est clair que $f_0 \in E$, que $\|f_0\|_\infty = 1$ et que

$$\forall\, x \in [0,1], \quad \varphi(f_0)(x) = \int_0^x dt = x.$$

Par conséquent, $\|\varphi(f_0)\|_\infty = 1$.

D'après le cours,

$$\forall\, f \in E, \qquad \|\varphi(f)\|_\infty \leqslant |\varphi| \cdot \|f\|_\infty.$$

Avec $f = f_0$, on vient de trouver que $1 \leqslant |\varphi|$.

❧ On a ainsi démontré par double inégalité que $|\varphi| = 1$ et aussi que la borne supérieure

$$|\varphi| \overset{\text{déf}}{=} \sup_{\|f\|_\infty = 1} \|\varphi(f)\|_\infty$$

est atteinte :

$$|\varphi| = \|\varphi(f_0)\|_\infty = \max_{\|f\|_\infty = 1} \|\varphi(f)\|_\infty$$

puisque $\|f_0\|_\infty = 1$.

3. L'ensemble E_0 est le noyau de l'application

$$[f \mapsto f(0)]$$

qui est une forme linéaire sur E. Par conséquent, E_0 est bien un sous-espace de E.

Quelle que soit $f \in E$ (et pas seulement dans E_0 !), l'application $\varphi(f)$ est nulle en 0, donc $\varphi(f) \in E_0$. Le sous-espace E_0 est donc stable par φ.

4. En tant que restriction d'une application linéaire continue (lipschitzienne), l'application φ_0 est linéaire et continue (lipschitzienne) et comme $E_0 \subset E$,

$$|\varphi_0| = \sup_{\substack{f \in E_0 \\ \|f\|_\infty = 1}} \|\varphi_0(f)\|_\infty \leqslant \sup_{\substack{f \in E \\ \|f\|_\infty = 1}} \|\varphi(f)\|_\infty = |\varphi| = 1.$$

❧ Pour calculer $|\varphi_0|$, on ne peut pas utiliser la fonction f_0, car elle n'appartient pas au sous-espace E_0. Mais comme cette fonction était bien pratique, on va s'en inspirer...

❧ Pour tout $n \geqslant 2$, on considère la fonction f_n définie par

$$\forall\, t \in [0, 1/n], \quad f_n(t) = nt \quad \text{et} \quad \forall\, t \in [1/n, 1], \quad f_n(t) = 1.$$

(Faites une figure ! Tout de suite !)

Ces fonctions f_n appartiennent bien sûr au sous-espace E_0, ce sont des vecteurs unitaires :

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad \|f_n\|_\infty = f_n(1) = 1$$

et

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad \|\varphi_0(f_n)\|_\infty = \varphi_0(f_n)(1) = \int_0^1 f_n(t)\, dt = \frac{1}{2n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n}$$

(somme de l'aire d'un triangle et de l'aire d'un rectangle, *ça se voit* sur la figure que vous avez faite).

D'après le cours,

$$\forall\, f \in E_0, \qquad \|\varphi_0(f)\|_\infty \leqslant |\varphi_0| \cdot \|f\|_\infty$$

et en particulier pour les fonctions f_n :

$$\forall\, n \geqslant 2, \qquad 1 - \frac{1}{2n} \leqslant |\varphi_0|.$$

En passant à la borne supérieure, on en déduit que $1 \leqslant |\varphi_0|$ et donc, par double inégalité, que

$$|\varphi_0| = 1.$$

❧ Si $|\varphi_0|$ était un maximum, alors il existerait une fonction $g \in E_0$ telle que

$$\|g\|_\infty = 1 \quad \text{et} \quad \|\varphi_0(g)\|_\infty = 1.$$

Par conséquent, la différence

$$[t \mapsto 1 - g(t)]$$

est une fonction continue, positive et non identiquement nulle sur $[0,1]$ (puisque cette fonction prend la valeur 1 en $t=0$). On en déduit que

$$\int_0^1 1-g(t)\,dt>0$$

c'est-à-dire

$$\varphi_0(g)(1)=\int_0^1 g(t)\,dt<1.$$

Comme g est positive, une majoration précédente nous a démontré que

$$\|\varphi_0(g)\|_\infty=\varphi_0(g)(1),$$

ce qui contredit notre hypothèse.

Conclusion : la norme $|\varphi_0|$ est une borne supérieure sur la sphère unité du sous-espace E_0 qui n'est pas un maximum (cette borne supérieure "n'est pas atteinte").

Solution 21

1. Supposons que la boule ouverte $B_o(x_0,r)$ soit contenue dans F :

$$\forall\, x\in E,\quad \|x-x_0\|<r \implies x\in F.$$

Considérons maintenant un vecteur y de la boule ouverte centrée à l'origine $B_o(0_E,r)$: comme $\|y\|<r$, alors

$$\big\|(x_0+y)-x_0\big\|=\|y\|<r$$

donc $x_0+y\in B_o(x_0,r)\subset F$. Comme F est un sous-espace vectoriel, il est stable par combinaison linéaire et donc

$$y=\underbrace{(x_0+y)}_{\in F}-\underbrace{x_0}_{\in F}\in F.$$

Par conséquent, la boule ouverte $B_o(0_E,r)$ est contenue dans F.

2. Soit F, un sous-espace vectoriel strict de E : on a donc $F\subsetneq E$.

Supposons que l'intérieur de F ne soit pas vide. Il existe alors un vecteur x_0 dans l'intérieur de F et, par définition de l'intérieur, il existe un réel $r>0$ tel que la boule ouverte $B_o(x_0,r)$ soit contenue dans F.

D'après la question précédente, la boule ouverte $B_o(0_E,r)$ est contenue dans F.

Le vecteur nul 0_E appartient à F (puisque F est un sous-espace vectoriel de E).

Si $x\in E$ n'est pas le vecteur nul, alors

$$x=\frac{2\|x\|}{r}\cdot\Big(\frac{r}{2\|x\|}\cdot x\Big).$$

La norme du vecteur $(r/2\|x\|)\cdot x$ est égale à $r/2<r$, donc ce vecteur appartient à F et comme F est un sous-espace vectoriel, $x\in F$.

✍ *Un sous-espace vectoriel est stable par combinaison linéaire. En particulier, si $u\in F$, alors $\lambda\cdot u\in F$ pour tout scalaire λ.*

On a ainsi démontré que tout vecteur $x\in E$, nul ou non nul, appartenait à F, donc $F=E$.

Solution 22

1.

✍ *On sait qu'une application linéaire est continue si, et seulement si, elle est bornée sur la sphère unité.*

Si f n'est pas continue, alors il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs unitaires telle que la suite (réelle) $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit pas bornée.

On peut donc extraire une sous-suite $(u_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{k\to+\infty}\big|f(u_{\varphi(k)})\big|=+\infty.$$

Une suite réelle qui tend vers $+\infty$ est strictement positive à partir d'un certain rang. On peut donc poser

$$x_k=\frac{1}{f(u_{\varphi(k)})}\cdot u_{\varphi(k)}.$$

Par absolue homogénéité de la norme,

$$\|x_k\| = \frac{u_{\varphi(k)}}{\left|f(u_{\varphi(k)})\right|} = \frac{1}{\left|f(u_{\varphi(k)})\right|} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

et par linéarité de f,

$$f(x_k) = \frac{f(u_{\varphi(k)})}{f(u_{\varphi(k)})} = 1.$$

2. Si la forme linéaire f est continue, alors son noyau est fermé en tant qu'image réciproque du singleton $\{0\}$ par une application continue.

✍ *Dans tout espace vectoriel normé, les singletons sont des parties fermées.*

❧ Réciproquement, si f n'est pas continue, on peut considérer une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 alors que $f(x_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par linéarité de f,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f(x_n - x_0) = 0$$

donc $y_n = x_n - x_0$ appartient au noyau de f pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $-x_0$:

$$\|y_n - (-x_0)\| = \|(x_n - x_0) + x_0\| = \|x_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

mais $-x_0$ n'appartient pas au noyau de f :

$$f(-x_0) = -f(x_0) = -1 \neq 0.$$

Le noyau de f n'est donc pas stable par passage à la limite, ce qui signifie qu'il n'est pas fermé.

✍ *Le noyau d'une forme linéaire non identiquement nulle est un hyperplan de E. Comme l'adhérence d'un sous-espace vectoriel est encore un sous-espace vectoriel, on a donc ici :*

$$\operatorname{Ker} f \subset \overline{\operatorname{Ker} f} \subset E.$$

Comme $\operatorname{Ker} f$ est un hyperplan, il n'y a donc que deux possibilités, mutuellement exclusives :

— *ou bien $\operatorname{Ker} f = \overline{\operatorname{Ker} f} \subsetneq E$ et, dans ce cas, $\operatorname{Ker} f$ est fermé, c'est le cas où f est continue ;*

— *ou bien $\operatorname{Ker} f \subsetneq \overline{\operatorname{Ker} f} = E$ et, dans ce cas, $\operatorname{Ker} f$ est dense dans E, c'est le cas où f n'est pas continue.*

Il est difficile de se représenter géométriquement cette alternative, car en dimension finie, seul le premier cas a lieu.

Solution 23

1. D'après la définition,

$$y \in F^\perp \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, x \in F, \quad y \perp x$$

ce qui nous donne l'égalité

$$F^\perp = \bigcap_{x\in F} (\mathbb{R}\cdot x)^\perp.$$

❧ Or l'orthogonal d'un vecteur

$$(\mathbb{R}\cdot x)^\perp = \big[\, \langle x \,|\, y \rangle = 0 \big]$$

est l'image réciproque du fermé $\{0\} \subset \mathbb{R}$ par l'application

$$\big[\, y \mapsto \langle x \,|\, y \rangle \,\big] : E \to \mathbb{R}$$

et cette application linéaire est une fonction continue de y puisque

$$\forall\, y \in E, \quad \big|\langle x \,|\, y \rangle\big| \leqslant \underbrace{\|x\|}_{\text{Cte}}\, \|y\|.$$

✍ *Oui ! C'est bel et bien l'inégalité de Schwarz !*

❧ Donc $(\mathbb{R}\cdot x)^\perp$ est une partie fermée de E pour tout $x \in F$ et $F^\perp$ est donc un fermé de E, en tant qu'intersection de fermés.

2. Si $E = F \oplus F^\perp$, alors la projection orthogonale p sur F est bien définie, de même que la projection orthogonale q sur $F^\perp$ et $p + q = I_E$.

D'après le Théorème de Pythagore,

$$\forall\, x \in E, \quad \big\|p(x)\big\| + \big\|x - p(x)\big\| = \big\|p(x)\big\| + \big\|q(x)\big\| = \|x\|,$$

ce qui prouve que

$$\forall\, x \in E, \quad \big\|p(x)\big\| \leqslant \|x\| \qquad \text{et que} \qquad \forall\, x \in E, \quad \big\|q(x)\big\| \leqslant \|x\|.$$

Comme p et q sont des applications linéaires, cela prouve que ce sont des applications continues.

✍ *Cela prouve aussi que $|p| \leqslant 1$ et que $|q| \leqslant 1$.*
Si F et $F^\perp$ ne sont pas réduits au vecteur nul (ce qui est le cas la plupart du temps), alors $|p| = 1$ (puisque $p(x) = x$ pour tout $x \in F$) et $|q| = 1$ (puisque $q(x) = x$ pour tout $x \in F^\perp$).

❧ La projection orthogonale q est la projection sur $F^\perp$ parallèlement à F, donc $F = \operatorname{Ker} q$. En tant qu'image réciproque d'une partie fermée (le singleton $\{0_E\}$) par une application continue (la projection q), le sous-espace F est donc fermé.

✍ *La projection orthogonale p est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$, donc $F^\perp = \operatorname{Ker} p$ est également une partie fermée de E.*

3. Dans un espace préhilbertien, tout sous-espace de dimension finie possède une base orthonormée et, de ce fait, la projection orthogonale p sur F est bien définie. Par conséquent, $E = F \oplus F^\perp$ et on déduit de la question précédente que le sous-espace F est fermé.

4. Pour toute partie F de E, on sait que $F \subset \overline{F}$ et donc que $(\overline{F})^\perp \subset F^\perp$.
Réciproquement, soit $x \in F^\perp$. Par définition,

$$\forall\, y \in F, \qquad \langle x \,|\, y \rangle = 0.$$

Considérons maintenant un vecteur $z \in \overline{F}$. Il existe, par définition de l'adhérence, une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de F qui converge vers z. D'après l'inégalité de Schwarz,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \big|\langle x \,|\, z\rangle - \langle x \,|\, y_n\rangle\big| = \big|\langle x \,|\, z - y_n\rangle\big| \leqslant \|x\|\,\|z - y_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par conséquent,

$$\langle x \,|\, z\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle x \,|\, y_n\rangle = 0$$

puisque les y_n sont, par hypothèse, orthogonaux à x. On vient de prouver que x était orthogonal à $\overline{F}$.
Par double inclusion,

$$F^\perp = (\overline{F})^\perp$$

et donc $F \oplus F^\perp = F \oplus (\overline{F})^\perp$.

❧ Comme F est un sous-espace de $\overline{F}$, on en déduit que

$$F \oplus (\overline{F})^\perp \subset \overline{F} \oplus (\overline{F})^\perp \subset E.$$

✍ *Si E est un espace préhilbertien complet (c'est-à-dire un **espace de Hilbert**), on peut démontrer que $F \oplus F^\perp = E$ pour tout sous-espace fermé F.*

Solution 24

✍ *Commençons par rappeler les propriétés qu'il faut absolument connaître sur les hyperplans.*

Soit H, une partie d'un espace vectoriel E (de dimension quelconque).

❧ ***Première caractérisation** — La partie H est un hyperplan si, et seulement si, il existe une forme linéaire $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ non identiquement nulle telle que $H = \operatorname{Ker} f$.*
En dimension finie, l'hyperplan H est alors représenté par une équation cartésienne :

$$H = \big[f(x_1, \dots, x_n) = 0\big]$$

dans le cas $\dim E = n$.
Une telle forme linéaire n'est pas unique mais presque : si $H = \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$, alors il existe un scalaire α non nul tel que

$$\forall\, x \in E, \quad f(x) = \alpha g(x).$$

❧ ***Deuxième caractérisation** — La partie H est un hyperplan si, et seulement si, il existe un vecteur $a \neq 0_E$ tel que $E = H \oplus \mathbb{K} \cdot a$.*

❧ ***Choix d'un supplémentaire** — Si H est un hyperplan, alors $E = H \oplus \mathbb{K} \cdot a$ quel que soit le vecteur $a \in E \setminus H$.*

❧ ***Lien entre supplémentaire et forme linéaire*** — *Si l'hyperplan $H \subset E$ est le noyau de la forme linéaire f, alors il existe un vecteur $a \in E$ tel que $f(a) = 1$ et, quel que soit $x \in E$, il existe un vecteur $x_H \in H$ et un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $x = x_H + \lambda \cdot a$. Par linéarité de f, on en déduit que*

$$x = x_H + f(x) \cdot a.$$

1. a. Quelle que soit la partie H de E, on a toujours : $H \subset \overline{H} \subset E$.

❧ L'adhérence $\overline{H}$ est, par définition, contenue dans l'espace vectoriel E. Le vecteur nul 0_E appartient au sous-espace H et par conséquent à $\overline{H}$. Enfin, $\overline{H}$ est stable par combinaison linéaire (propriété dite "linéarité de la limite"). Par conséquent, l'adhérence $\overline{H}$ est encore un sous-espace de E.

✍ *L'adhérence de tout sous-espace de E est encore un sous-espace de E.*

1. b. Soit $a \in \overline{H} \setminus H$ (en admettant qu'un tel vecteur existe). Comme $a \notin H$ et que H est un hyperplan, alors $E = H \oplus \mathbb{K} \cdot a$.

❧ D'autre part, $H \subset \overline{H}$ (quelle que soit la partie H de E, sous-espace vectoriel ou non) et comme $a \in \overline{H}$, alors $\mathbb{K} \cdot a \subset \overline{H}$.

✍ *Un sous-espace vectoriel est stable par combinaison linéaire !*

Comme $\overline{H}$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient H et $\mathbb{K} \cdot a$, il contient la somme $H \oplus \mathbb{K} \cdot a$.

✍ *Un sous-espace vectoriel qui contient à la fois H et $\mathbb{K} \cdot a$ contient nécessairement la somme $H + \mathbb{K} \cdot a$.*

2. On distingue alors deux cas.

❧ Si $H = \overline{H}$, alors H est fermé.

✍ *L'adhérence d'une partie est toujours fermée !*

❧ Sinon $H \subsetneq \overline{H}$, donc il existe un vecteur $a \in \overline{H} \setminus H$ et $E \subset \overline{H}$ d'après la question précédente.
Dans ce cas, $\overline{H} = E$ — autrement dit : H est dense dans E.

✍ *Il n'y a donc que deux possibilités :*
— ou bien un hyperplan est fermé (ce qui est toujours le cas si la dimension de E est finie) ;
— ou bien il est dense dans E.

3. Si la forme linéaire f est continue, alors son noyau est fermé.

✍ *L'image réciproque $\operatorname{Ker} f = [f(x) = 0]$ du fermé $\{0\}$ par une application continue $f : E \to \mathbb{K}$ est fermée.*

❧ Réciproquement, si la forme linéaire f n'est pas continue, alors elle n'est pas bornée au voisinage de 0_E (Théorème de caractérisation des applications linéaires continues). Il existe donc une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers le vecteur nul et telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \left|f(u_n)\right| = +\infty.$$

Par conséquent, pour tout entier n assez grand, le scalaire $f(u_n)$ n'est pas nul :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant n_0, \qquad f(u_n) \neq 0.$$

Pour tout $n \geqslant n_0$, on pose alors

$$v_n = \frac{u_n}{f(u_n)} \quad \text{et on remarque que} \quad f(v_n) = \frac{f(u_n)}{f(u_n)} = 1.$$

Par absolue homogénéité de la norme,

$$\forall\, n \geqslant n_0, \qquad \|v_n\| = \frac{\|u_n\|}{|f(u_n)|}.$$

Par hypothèse, le numérateur tend vers 0 et le dénominateur vers $+\infty$, donc la suite $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers le vecteur nul 0_E.

Cela dit, par linéarité de f,

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad v_n - v_{n_0} \in \operatorname{Ker} f$$

puisque $f(v_n - v_{n_0}) = f(v_n) - f(v_{n_0}) = 1 - 1 = 0$ et comme v_n converge vers 0_E, alors

$$\lim_{n\to+\infty} v_n - v_{n_0} = -v_{n_0} \notin \operatorname{Ker} f$$

puisque $f(-v_{n_0}) = -f(v_{n_0}) = -1$.

On a ainsi démontré que Ker f n'était pas fermé (ce sous-espace n'est pas stable par passage à la limite).

✍ *Cette alternative démontre que le noyau d'une forme linéaire est fermé si, et seulement si, la forme linéaire est continue.*

4. a. Si la forme linéaire f est continue, alors les trois parties

$$[f(x) > 0] = \big[f(x) \in]0, +\infty[\big], \quad [f(x) < 0] = \big[f(x) \in]-\infty, 0[\big], \quad [f(x) \neq 0] = \big[f(x) \in \{0\}\big]^c$$

sont des ouverts de E.

✍ *L'image réciproque d'un intervalle ouvert par une application continue est ouverte.*
L'image réciproque d'un intervalle fermé par une application continue est fermée.
Le complémentaire d'un fermé est un ouvert.

❧ La partie $P_+ = [f(x) > 0]$ est convexe : si deux vecteurs x_1 et x_2 appartiennent à P_+, alors $f(x_1) > 0$ et $f(x_2) > 0$; quel que soit $t \in [0,1]$, on a donc

$$f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) = (1-t)f(x_1) + tf(x_2) > 0$$

ce qui prouve que $(1-t)x_1 + tx_2 \in P_+$.

✍ *Pour $0 < t < 1$, l'expression $(1-t)f(x_1) + tf(x_2)$ est la somme de deux termes strictement positifs.*
Pour $t = 0$, il reste $f(x_1) > 0$ (par hypothèse) ; pour $t = 1$, il reste $f(x_2) > 0$ (par hypothèse aussi).

Toute partie convexe est connexe par arcs, donc P_+ est connexe par arcs.
Il est clair que la même démonstration prouve que $P_- = [f(x) < 0]$ est convexe et donc connexe par arcs.

✍ *On n'a pas eu besoin de la continuité de f pour conclure.*

❧ Comme f n'est pas identiquement nulle, il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq 0$ et comme f est linéaire, $f(-x_0) = -f(x_0)$.
Si f est continue sur E et s'il existe une fonction continue

$$\gamma : [0,1] \to E \quad \text{telle que} \quad \begin{cases} & \gamma(0) = x_0 \\ & \gamma(1) = -x_0 \\ \forall\, t \in [0,1], & \gamma(t) \in P_+ \sqcup P_= H^c \end{cases}$$

alors $f \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, définie sur un intervalle et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On peut donc appliquer le Théorème des valeurs intermédiaires. Comme

$$(f \circ \gamma)(0) = f(x_0) \qquad \text{et} \qquad (f \circ \gamma)(1) = -f(x_0),$$

la fonction $f \circ \gamma$ change de signe et il existe donc un réel $t_1 \in [0,1]$ tel que $(f \circ \gamma)(t_1) = 0$, ce qui signifie que $\gamma(t_1) \in H$: c'est impossible par hypothèse.
Par conséquent, si la forme linéaire $f \in L(E, \mathbb{R})$ est continue sans être identiquement nulle, alors $[f(x) \neq 0]$ est ouvert mais pas connexe par arcs.

4. b.

✍ *Dans la suite, l'hyperplan $H = \operatorname{Ker} f$ est supposé fermé.*
D'après le cours,

$$\begin{aligned} d(x,H) = 0 &\iff x \in \overline{H} && \text{(cours !)} \\ &\iff x \in H && \text{(H est fermé)} \\ &\iff f(x) = 0. \end{aligned}$$

La propriété a établir est évidente dans ce cas (très) particulier.
Nous supposerons par la suite que $x \notin \operatorname{Ker} f$ et (donc !) que $d(x,H) > 0$.

❧ **Version euclidienne**
On suppose ici que E est un espace euclidien. Par conséquent, il existe un vecteur unitaire a tel que

$$E = H \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{R} \cdot a.$$

Comme $x \notin H$, le vecteur x n'est pas le vecteur nul et il existe un vecteur $x_H \in H$ et un scalaire $t \neq 0$ tels que $x = x_H + t \cdot a$. Comme a est orthogonal à H, on déduit du théorème de Pythagore que

$$\|x\| = |t| \sqrt{1 + \frac{\|x_H\|^2}{t^2}}.$$

Par linéarité de f, on a $f(x) = t \cdot f(a)$ (puisque $H = \operatorname{Ker} f$) et par conséquent, comme $x \neq 0_E$,

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} = \frac{|f(a)|}{\sqrt{1 + \frac{\|x_H\|^2}{t^2}}} \leqslant |f(a)|.$$

On a ainsi démontré que

$$\forall\, x \in E \setminus H, \quad |f(x)| \leqslant |f(a)| \cdot \|x\|.$$

Il est clair que cette propriété est encore vraie pour $x \in H = \operatorname{Ker} f$. Nous avons ainsi démontré que $f \in L(E, \mathbb{R})$ était une application continue (ce qui n'est pas une surprise) et que

$$|||f||| \leqslant |f(a)|.$$

Par ailleurs, comme a est un vecteur unitaire,

$$|f(a)| \leqslant |f(a)| \cdot \|a\|$$

et ce cas d'égalité prouve que

$$|||f||| = |f(a)|.$$

D'autre part, comme $x = x_H + t \cdot a$ où $x_H \in H$ et $a \in H^\perp$, on déduit du cours que $d(x, \operatorname{Ker} f) = \|t \cdot a\| = |t|$ (puisque le vecteur a est unitaire). D'après les calculs précédents,

$$d(x, \operatorname{Ker} f) = |t| = \frac{|f(x)|}{|f(a)|} = \frac{|f(x)|}{|||f|||}.$$

✍ *La propriété que nous venons de démontrer est vraie en dehors du cadre des espaces euclidiens.*

❧ **Version générale**
Nous supposons toujours que $x \notin H = \overline{H}$ et donc que $f(x) \neq 0$ et que $d(x, H) > 0$.
❧ Comme $x \notin H$ et que H est un hyperplan, on a $E = H \oplus \mathbb{K} \cdot x$. Pour tout vecteur $y \notin H$ non nul, il existe donc un vecteur $y_H \in H$ et un scalaire $t \in \mathbb{K}$ tel que $y = y_H + t \cdot x$.

✍ *On a choisi y en dehors du sous-espace vectoriel H. Comme $0_E \in H$, on en déduit que $y \neq 0_E$.*

Comme $y \neq 0_E$, le scalaire t n'est pas nul ! On en déduit comme plus haut que

$$|f(y)| = |t| \cdot |f(x)| \quad \text{et que} \quad \|y\| = \|y_H + t \cdot x\| = |t| \cdot \left\| x + \frac{1}{t} \cdot y_H \right\|$$

Comme $1/t \cdot y_H \in H$, on en déduit que

$$\|y\| \geqslant |t| \inf_{u \in H} \|x + u\| = d(x, H).$$

✍ *Un espace vectoriel est stable par changement de signe, donc*

$$\inf_{u \in H} \|x + u\| = \inf_{u \in H} \|x - u\| = d(x, H).$$

Ayant majoré le numérateur et minoré le dénominateur, on en déduit que

$$\forall\, y \in E \setminus H, \quad \frac{|f(y)|}{\|y\|} \leqslant \frac{|f(x)|}{d(x, \operatorname{Ker} f)}.$$

Le membre de gauche est nul pour tout $y \in H \setminus \{0_E\}$, donc

$$\forall\, y \neq 0_E, \quad \frac{|f(y)|}{\|y\|} \leqslant \frac{|f(x)|}{d(x, \operatorname{Ker} f)}.$$

En passant à la borne supérieure par rapport au paramètre y, on en déduit que

$$\|f\| \leqslant \frac{|f(x)|}{d(x, \operatorname{Ker} f)}.$$

❧ Réciproquement, on rappelle que

$$d(x, \operatorname{Ker} f) = \inf_{y \in H} \|x - y\|.$$

Pour tout $y \in H = \operatorname{Ker} f$,

$$|f(x)| = |f(x-y)| \leqslant \|f\| \, \|x - y\|$$

puisque l'application linéaire f est supposée continue. On a donc

$$\forall\, y \in H, \quad \|x - y\| \geqslant \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

On peut donc passer à la borne inférieure par rapport au paramètre y et obtenir enfin :

$$d(x, \operatorname{Ker} f) \geqslant \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

❧ On a ainsi démontré par double inégalité que

$$d(x, \operatorname{Ker} f) = \frac{|f(x)|}{\|f\|}$$

pour toute forme linéaire f continue sur E.

Solution 25

1. a. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 nt \, dt = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 0, \\ 1/2 & \text{pour } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Il est donc clair que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée pour la norme $\|\cdot\|$ de convergence en moyenne quadratique.

✍ *Si on ne connaît pas le résultat par cœur, on le retrouve en* linéarisant.

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \qquad \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}.$$

1. b. On suppose que $1 \leqslant n < p$. On déduit de la question précédente que

$$\|f_n - f_p\|^2 = \|f_n\|^2 + \|f_p\|^2 - 2 \langle f_n \,|\, f_p \rangle = 1 - 2 \langle f_n \,|\, f_p \rangle.$$

On linéarise à nouveau :

$$\begin{aligned} \langle f_n \,|\, f_p \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos nt \cos pt \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(n+p)t + \cos(n-p)t}{2} \, dt = 0 \end{aligned}$$

et donc

$$\forall\, 1 \leqslant n < p, \qquad \|f_n - f_p\| = 1.$$

❧ S'il existe une suite extraite $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ qui convergeait, alors il existerait une limite $\ell \in E$ telle que

$$\lim_{k \to +\infty} \|f_{n_k} - \ell\| = 0.$$

Par inégalité triangulaire, on aurait en particulier

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| \leqslant \|f_{n_{k+1}} - \ell\| + \|\ell - f_{n_k}\|$$

et par encadrement

$$\lim_{k \to +\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| = 0.$$

Or $1 \leqslant n_1 \leqslant n_k < n_{k+1}$ pour tout $k \geqslant 1$ (par définition des *suites extraites* !), donc

$$\forall\, k \geqslant 1, \qquad \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| = 1$$

ce qui contredit la limite précédente.

Par conséquent, de la suite bornée $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on ne peut extraire aucune suite convergente.

2. La boule unité fermée B de E est fermée (comme son nom l'indique) et bornée (par définition).
La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de B qui n'a aucune valeur d'adhérence, donc la partie B *n'est pas compacte*.

Solution 26

1. a.

✍ *Ces résultats sont "physiquement" évidents lorsque le plan ou l'espace est muni de la norme euclidienne canonique. Il est intéressant de constater qu'ils restent vrais indépendamment de la norme choisie !*

Soit A, une sphère/une boule ouverte/une boule fermée de centre a et de rayon r.

❧ Quels que soient x et y dans A,

$$\|x-y\| \leqslant \|x-a\| + \|a-y\| \leqslant 2r$$

donc A est bien une partie bornée et son diamètre est inférieur à $2r$.

❧ Soit u, un vecteur unitaire de E. On pose alors $x = a + r\cdot u$ et $y = a - r\cdot u$. On a donc

$$\|x-a\| = \|r\cdot u\| = r\cdot\|u\| = r$$

et de même $\|y-a\| = r$, donc x et y sont des points de la sphère/de la boule fermée de centre a et de rayon r. Or

$$\|x-y\| = \|2r\cdot u\| = 2r\cdot\|u\| = 2r.$$

Donc le diamètre de la sphère/de la boule fermée est égal à $2r$.

❧ Si A est la boule *ouverte* de centre a et de rayon r, alors on pose

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad x_n = a + \frac{(n-1)r}{n}\cdot u \quad \text{et} \quad y_n = a - \frac{(n-1)r}{n}\cdot u$$

de telle sorte que

$$\|x_n - a\| = \frac{(n-1)r}{n} < r$$

et donc que $x_n \in A$. De même, $y_n \in A$.

Or $\|x_n - y_n\| = \frac{2(n-1)r}{n}$, ce qui tend vers $2r$ lorsque n tend vers l'infini. Par conséquent,

$$\sup_{(x,y)\in A\times A} \|x-y\| \geqslant \lim_{n\to+\infty} \|x_n - y_n\| = 2r$$

et par double inégalité, on a démontré que le diamètre de la boule *ouverte* A était égal à $2r$.

1. b. Soit A, la boule ouverte de centre a et de rayon $r > 0$.

❧ Quels que soient les points x et y dans A, on a donc

$$\|x-a\| < r \quad \text{et} \quad \|y-a\| < r.$$

Pour tout $t \in [0,1]$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\|(1-t)\cdot x + t\cdot y - a\| &= \|(1-t)\cdot(x-a) + t\cdot(y-a)\| \\ &\leqslant \underbrace{(1-t)}_{\geqslant 0}\cdot\|x-a\| + \underbrace{t}_{\geqslant 0}\cdot\|y-a\| \\ &< (1-t)r + tr = r\end{aligned}$$

cette dernière inégalité étant stricte comme somme de deux inégalités dont l'une au moins est stricte (pour $t = 0$ et pour $t = 1$, une seule est stricte ; pour $0 < t < 1$, les deux sont strictes).

Cela prouve que $[x,y] \subset A$ et donc que A est convexe.

❧ Si A est une boule fermée, il suffit de remplacer les inégalités strictes par des inégalités larges.

2. a. On suppose que $\|b-a\| \leqslant r-s$.

Considérons un point x de la boule ouverte de centre b et de rayon s. On a donc

$$\|x-b\| < r$$

et par inégalité triangulaire

$$\|x-a\| \leqslant \|x-b\| + \|b-a\| < s + (r-s) = r$$

donc $x \in B_o(a,r)$.

❧ Réciproquement, on suppose que $a \neq b$ et que $B_o(b,s) \subset B_o(a,r)$. Pour tout $0 < t < s$, le vecteur

$$x_t = b - t\cdot\frac{a-b}{\|a-b\|}$$

appartient à la boule ouverte $B_o(b,s)$:

$$\|x_t - b\| = t \cdot \left\| \frac{a-b}{\|a-b\|} \right\| = t < s.$$

On a alors

$$x_t = a + (b-a) + t \cdot \frac{b-a}{\|a-b\|} \in B_o(a,r)$$

et donc

$$\forall\, 0 < t < s, \quad \|x_t - a\| = \|b-a\| + t < r.$$

Par passage au sup (par rapport à t), on en déduit que $\|b-a\| + s \leqslant r$.

2. b. Supposons qu'il existe un point $x \in B_o(b,s) \cap B_o(a,r)$. On a alors

$$\|b-a\| \leqslant \|b-x\| + \|x-a\| < r+s.$$

Par contraposée, si $\|b-a\| \geqslant r+s$, alors les boules ouvertes $B_o(a,r)$ et $B_o(b,s)$ sont disjointes.

❧ Réciproquement, on suppose que $\|b-a\| < r+s$.

▹ Si $\|b-a\| < r$, alors b appartient à $B_o(a,r)$, donc l'intersection des deux boules ouvertes contient au moins b !

▹ On suppose donc que que $\|b-a\| \geqslant r$. On peut donc choisir un réel λ tel que

$$0 \leqslant \|b-a\| - r < \lambda < s.$$

On pose alors

$$x = b + \lambda \cdot \frac{a-b}{\|a-b\|}.$$

On a donc $\|x-b\| = \lambda < s$, donc $x \in B_o(b,s)$. Mais on a aussi

$$x - a = \|b-a\| \cdot \frac{b-a}{\|b-a\|} + \lambda \cdot \frac{a-b}{\|b-a\|} = \big(\lambda - \|b-a\|\big) \cdot \frac{a-b}{\|b-a\|}$$

et donc

$$\|x-a\| = \big|\lambda - \|b-a\|\big|.$$

D'après nos hypothèses,

$$-r < \lambda - \|b-a\| \leqslant s - \|b-a\| \leqslant s - r \leqslant 0$$

donc $\|x-a\| < r$, donc $x \in B_o(a,r)$. On a ainsi trouvé un vecteur x appartenant aux deux boules ouvertes : l'intersection de ces boules n'est donc pas vide.

Solution 28

On suppose que $x \in E$ est un point adhérent à A. Par définition, pour tout $r > 0$, l'intersection $A \cap B_f(x,r)$ n'est pas vide, donc il existe au moins un élément $y(r)$ qui appartienne à la fois à A et à la boule $B_f(x,r)$, c'est-à-dire un élément $y(r) \in A$ tel que

$$\|x - y(r)\| \leqslant r.$$

❧ On suppose que

$$\forall\, r > 0,\ \exists\, y(r) \in A, \qquad \big\|x - y(r)\big\| \leqslant r.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit $r = 2^{-n} > 0$. Il existe donc $y_n \in A$ tel que

$$\|x - y_n\| \leqslant 2^{-n}.$$

Par encadrement, une telle suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A converge vers x.

❧ On suppose qu'il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x. Par définition,

$$d(x,A) = \inf_{z\in A} \|x-z\|.$$

Comme la borne inférieure est un minorant, on en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant\ d(x,A) \leqslant \|x - y_n\|$$

et, par encadrement, $d(x,A) = 0$.

❧ On suppose enfin que $d(x,A) = 0$.

Si $r > 0$, alors

$$r > \inf_{y \in A} \|x - y\|$$

donc il existe $y(r) \in A$ tel que

$$r > \|x - y(r)\|$$

c'est-à-dire $y \in A \cap B_o(x, r) \subset A \cap B_f(x, r)$. Par conséquent,

$$\forall\, r > 0, \quad A \cap B_f(x, r) \neq \varnothing.$$

✍ *En particulier, le point x appartient à l'adhérence de A si, et seulement si, il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x.*

Solution 29

1.

✍ *Une partie est fermée si, et seulement si, elle est stable par passage à la limite.*

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite d'éléments de $\overline{A}$ qui converge vers un point $\ell \in E$.

✍ *Il s'agit maintenant de prouver que $\ell \in \overline{A}$ et donc qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers ℓ.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le point x_n est adhérent à A. Or $2^{-n} > 0$, donc il existe un point $u_n \in A$ tel que

$$\|x_n - u_n\| \leqslant 2^{-n}.$$

Par inégalité triangulaire,

$$\|\ell - u_n\| = \|\ell - x_n + x_n - u_n\| \leqslant \|\ell - x_n\| + \|x_n - u_n\| \leqslant \|\ell - x_n\| + 2^{-n}.$$

Le majorant est la somme de deux quantités de limite nulle, donc $\|\ell - u_n\|$ tend vers 0 par encadrement.

On a ainsi démontré qu'il existait une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui convergeait vers ℓ. Donc $\ell \in \overline{A}$.

2. On vient de démontrer que l'adhérence de A est un fermé et on sait que l'adhérence de A contient A :

$$A \subset \overline{A}.$$

Considérons maintenant une partie fermée F qui contienne A : $A \subset F$.

Pour tout $y \in \overline{A}$, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers y.

Comme $A \subset F$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de F qui converge vers y. Or F est fermé, donc la limite y est un élément de F.

Ainsi $\overline{A} \subset F$.

✍ *On vient donc de démontrer que l'adhérence de A était un fermé qui contenait A et que, de tous les fermés qui contiennent A, l'adhérence de A est le plus petit.*

On a donc caractérisé l'adhérence $\overline{A}$ comme un "fermé extrémal".

Solution 30

Soit x, un point intérieur à A. Par définition, A est un voisinage de x et en particulier $x \in A$. Donc $A^\circ \subset A$.

✍ *Une partie est ouverte si, et seulement si, c'est un voisinage de chacun de ses points. Il s'agit donc maintenant de vérifier que A° est un voisinage de x.*

❧ Plus précisément, il existe un rayon $r > 0$ tel que la boule ouverte $B_o(x, r)$ soit contenue dans A. Or cette boule ouverte est une partie ouverte, donc $B_o(x, r)$ est un voisinage de chacun de ses points et comme $B_o(x, r) \subset A$, la partie A est un voisinage de chaque point de $B_o(x, r)$. De la sorte, la boule $B_o(x, r)$ est tout entière contenue dans A°, ce qui prouve que A° est un voisinage de x.

On a donc démontré que A° était un voisinage de chacun de ses points, c'est-à-dire une partie ouverte de A.

❧ Considérons maintenant une partie ouverte G contenue dans A : $G \subset A$.

Par définition, pour tout $x \in G$, la partie G est un voisinage de x, donc A est un voisinage de x.

✍ *Toute partie qui contient un voisinage de x_0 est elle-même un voisinage de x_0 (propriétés filtrantes des voisinages).*

Cela signifie que A est un voisinage de chaque point de G, c'est-à-dire (définition de l'intérieur d'une partie) que chaque point de G est à l'intérieur de A :

$$G \subset A^\circ \subset A.$$

❧ On vient donc de démontrer que l'intérieur de A est une partie ouverte contenue dans A et que, de tous les ouverts contenus dans A, l'intérieur de A est le plus grand de tous.

✍ *On a ainsi caractérisé l'intérieur d'une partie A comme un "ouvert extrémal".*

Solution 31

On sait que $\overline{A}$ est une partie fermée qui contient A :

$$A \subset \overline{A}.$$

On en déduit que

$$(\overline{A})^c \subset A^c.$$

En tant que complémentaire d'une partie fermée, $(\overline{A})^c$ est une partie ouverte et elle est contenue dans A^c.

✍ *L'intérieur d'une partie B est le plus grand ouvert contenu dans B.*

Donc

$$(\overline{A})^c \subset (A^c)^\circ.$$

▷ Réciproquement, l'intérieur $(A^c)^\circ$ est un ouvert contenu dans A^c. Par passage au complémentaire,

$$A = (A^c)^c \subset [(A^c)^\circ]^c.$$

Ainsi $[(A^c)^\circ]^c$ est une partie fermée qui contient A.

✍ *L'adhérence d'une partie B est le plus petit fermé qui contienne B.*

Donc

$$\overline{A} \subset [(A^c)^\circ]^c$$

et donc

$$(A^c)^\circ \subset (\overline{A})^c.$$

▷ Par double inclusion, on a démontré que

$$(A^c)^\circ = (\overline{A})^c.$$

❧ La propriété précédente est vraie pour toute partie $A \subset E$, en particulier pour A^c. On a donc démontré que

$$[(A^c)^c]^\circ = A^\circ = (\overline{A^c})^c$$

et donc, par passage au complémentaire, que

$$(A^\circ)^c = \overline{A^c}.$$

Solution 32

1. Soit $x \in E$ (fixé). L'application

$$[y \mapsto d(x,y)]$$

est lipschitzienne et donc continue.

✍ *En effet,*

$$\big|\, d(x,y) - d(x,z)\big| = \big|\|y-x\| - \|x-z\|\big| \leqslant \big\|(y-x)-(x-z)\big\| = \|y-z\|$$

(inégalité triangulaire).

Sur une partie compacte, une fonction continue est bornée et atteint ses bornes. En particulier, elle atteint son minimum, donc il existe un élément $y_0 \in K$ tel que

$$d(x,y_0) = \min_{y\in K} d(x,y)$$

et, par définition $d(x,K) = d(x,y_0)$.

2.

✍ *Commençons par rappeler la définition :*

$$d(K,K') = \inf_{(x,y)\in K\times K'} d(x,y).$$

Cette définition a un sens car

$$\{\, d(x,y),\ (x,y)\in K\times K'\}$$

est une partie non vide [car ni K, ni K' n'est vide] et minorée [par 0] de $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, pour toute partie non vide A, l'application $[x\mapsto d(x,A)]$ est lipschitzienne et admet 1 pour constante de Lipschitz. (Résultat du cours, peut-être méconnu ?)

L'application

$$[x\mapsto d(x,K')]$$

est continue et sur le compact K, elle atteint son minimum. Il existe donc $x_0\in K$ tel que

$$d(x_0,K') = \min_{x\in K} d(x,K') = d(K,K').$$

D'après la première question, il existe alors un élément $y_0\in K'$ tel que

$$d(x_0,K') = d(x_0,y_0)$$

et $d(x_0,y_0)>0$ car $x_0\neq y_0$ (puisque $x_0\in K$, $y_0\in K'$ et $K\cap K'=\varnothing$).

► La distance qui sépare deux compacts disjoints est strictement positive.

✍ *Si les compacts ne sont pas disjoints, alors la distance qui les sépare est nulle, car il existe $x_0\in K\cap K'$ et*

$$0\leqslant d(K,K')\leqslant d(\underbrace{x_0}_{\in K},\underbrace{x_0}_{\in K'}) = 0.$$

3. On suppose que $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme produit.

✍ *Comme $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sur $\mathbb{R}^2$ sont équivalentes. Par conséquent, la distance entre deux parties A et B est nulle pour une norme quelconque N si, et seulement si, elle est nulle pour la norme produit.*

❧ L'axe des abscisses $A=[y=0]$ est fermé en tant qu'image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue

$$[(x,y)\mapsto y]\,.$$

Le graphe de la fonction exp :

$$G=[y-\exp(x)=0]$$

est fermé en tant qu'image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue

$$[(x,y)\mapsto y-\exp(x)]\,.$$

❧ Ces deux parties fermées sont disjointes, car si $M=(x,y)\in G$, alors $y=\exp(x)>0$ et si $M\in A$, alors $y=0$.

❧ Et pourtant la distance entre ces deux fermés est nulle (à cause de l'asymptote horizontale) :

$$0\leqslant d(A,G)\leqslant \lim_{x\to-\infty}\left\|\underbrace{(x,e^x)}_{\in G}-\underbrace{(x,0)}_{\in A}\right\|_\infty = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

✍ *L'hypothèse de compacité était donc essentielle pour conclure à la question précédente.*

Solution 33

1. On considère une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $A+B$ et on suppose que cette suite converge vers un point $\ell \in E$.

✍ *Une partie est fermée si, et seulement si, elle est stable par passage à la limite.*

Par définition de $A+B$, pour tout indice $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in A$ et $y_n \in B$ tels que $z_n = x_n + y_n$.
Comme la partie A est compacte, il existe une suite extraite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un élément $u \in A$.
En tant que suite extraite d'une suite convergente de limite ℓ, la suite $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
En tant que différence de deux suites convergentes, la suite de terme général

$$y_{n_k} = z_{n_k} - x_{n_k}$$

est convergente, de limite $\ell - u$.
Or tous les y_{n_k} appartiennent à B et B est une partie fermée, donc la limite $(\ell - u)$ appartient encore à B.
Ainsi

$$\ell = \underbrace{u}_{\in A} + \underbrace{(\ell - u)}_{\in B} \in A + B.$$

On a démontré que $(A+B)$ était stable par passage à la limite et donc fermée.

2.

✍ *Si B est compact, alors B est fermé, donc on étudie ici un cas particulier du résultat précédente, mais le plan de la démonstration n'a plus rien à voir : on considère ici une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $(A+B)$ et on cherche à démontrer que cette suite possède une valeur d'adhérence qui appartient bien à $(A+B)$.*

On considère une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $A+B$. Pour tout indice $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in A$ et $y_n \in B$ tels que $z_n = x_n + y_n$.
Puisque tous les x_n appartiennent au compact A, il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $u \in A$.
Puisque tous les $y_{\varphi(n)}$ appartiennent au compact B, il existe une sous-suite extraite $(y_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $v \in B$.
En tant que suite extraite d'une suite qui converge vers u, la sous-suite extraite $(x_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers u.
Par conséquent, la suite extraite de terme général

$$z_{\varphi\circ\psi(n)} = x_{\varphi\circ\psi(n)} + y_{\varphi\circ\psi(n)}$$

converge vers $u+v \in A+B$, ce qui nous prouve bien que $(A+B)$ est compacte.

✍ ***Variante.*** *Comme A et B sont des parties compactes de E, alors le produit cartésien $A\times B$ est une partie compacte de $E\times E$ et $A+B$ est une partie compacte de E en tant qu'image (directe) du compact $A\times B$ par l'application*

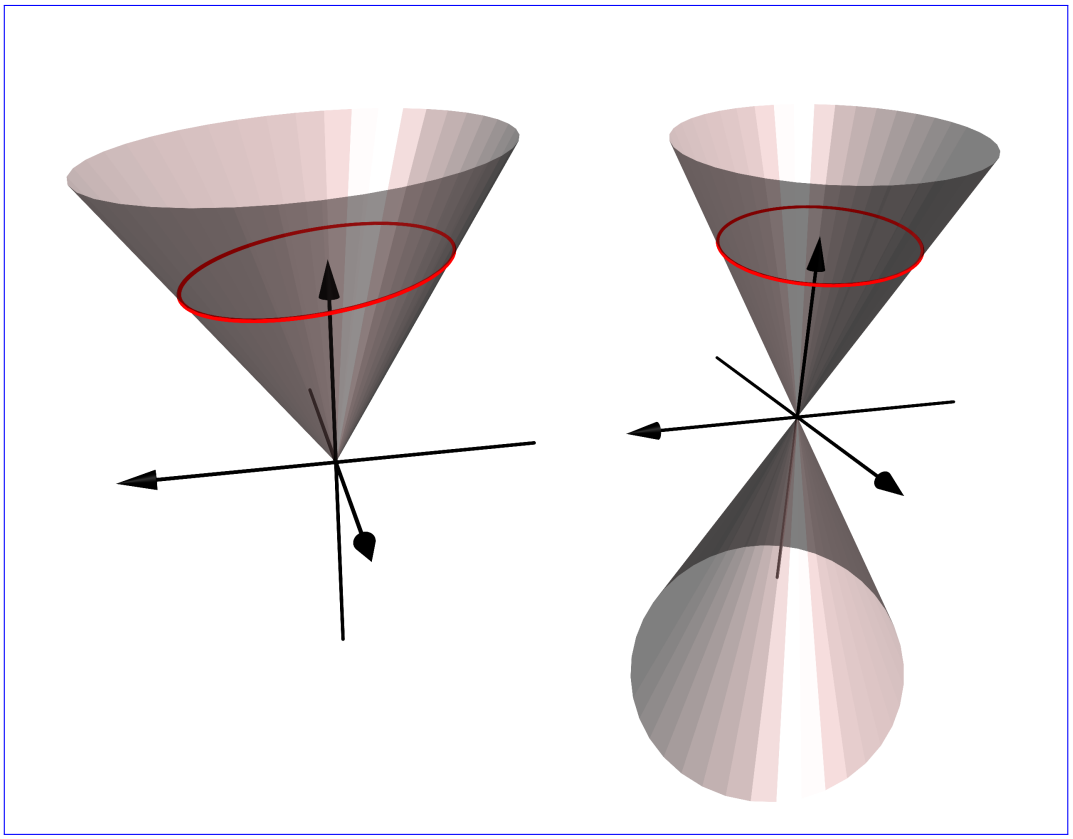
$$[(x,y)\mapsto x+y]$$

qui est une application continue de $E\times E$ dans E.

Solution 34

1.

✍ *Remarque sur le vocabulaire : pour $x \in K$ fixé (non nul !), l'ensemble des points de E de la forme $\lambda\cdot x$ avec $\lambda\in\mathbb{R}_+$ est la demi-droite issue de l'origine et dirigée par le vecteur x. L'ensemble F est donc l'ensemble des* demi-droites *issues de O et dirigée par un vecteur de K, c'est ce qu'on appelle un* ***cône positif*** *(figure de gauche).*
Le ***cône*** *construit sur K est l'ensemble des* droites *vectorielles dirigées par un vecteur de K (figure de droite).*



Considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de F en supposant que cette suite converge vers une limite $\ell_0 \in E$.

✍ *Une partie est fermée si, et seulement si, elle est stable par passage à la limite.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le vecteur u_n appartient à F, donc il existe un scalaire $\lambda_n \in \mathbb{R}_+$ et un vecteur $x_n \in K$ tels que $u_n = \lambda_n \cdot x_n$.
Comme K est compact, il existe une suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ extraite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une limite $\ell \in K$.
En tant que suite extraite d'une suite de limite ℓ_0, la sous-suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge elle aussi vers ℓ_0.
Comme le vecteur nul n'appartient pas à K et que les scalaires λ_n sont tous positifs,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \lambda_n = \frac{\|u_n\|}{\|x_n\|} \qquad \text{et en particulier} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \lambda_{n_k} = \frac{\|u_{n_k}\|}{\|x_{n_k}\|}$$

donc

$$\lambda_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \frac{\|\ell_0\|}{\|\ell\|} \overset{\text{not.}}{=} \alpha \in \mathbb{R}_+.$$

✍ *En effet, la norme vue comme une application de E dans $\mathbb{R}$ est une application continue (elle est lipschitzienne et admet 1 pour constante de Lipschitz d'après l'inégalité triangulaire).*

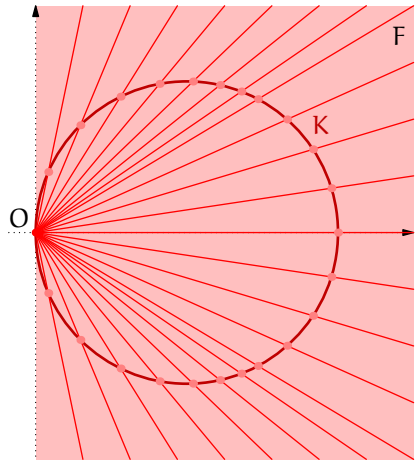
On en déduit que

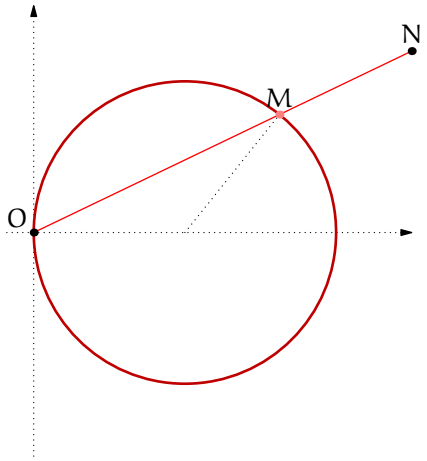
$$\ell_0 = \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{k\to+\infty} u_{n_k} = \lim_{k\to+\infty} \lambda_{n_k} \cdot x_{n_k} = \underbrace{\alpha}_{\in\mathbb{R}_+} \cdot \underbrace{\ell}_{\in K} \in F.$$

On a démontré que F était stable par passage à la limite, donc F est fermé.

2. La partie K est la boule fermée de centre $M_0 = (1, 0)$ et de rayon 1. C'est, par définition, une partie fermée et bornée et comme $\mathbb{R}^2$ est un espace de dimension finie, la partie K est compacte.

✍ *Contrairement au compact de la question précédente, cette fois, K contient l'origine.*
Pour comprendre que l'ensemble F est ici encore le cône positif basé sur K, il faut bien regarder la figure suivante et connaître un peu de trigonométrie (Théorème de l'angle au centre).





▷ L'origine O appartient clairement à F. Par conséquent, pour tout point $M \in K$, le point $0 \cdot M = 0$ appartient à F.

▷ Considérons un point $M = (x_1, x_2)$ de K distinct de O. Il existe donc un angle $-\pi < t < \pi$ tel que

$$x_1 = 1 + \cos t \qquad \text{et} \qquad x_2 = \sin t.$$

Comme $\cos t > 0$, on a bien $x_1 > 0$ et par conséquent

$$\forall\, \lambda > 0, \qquad \lambda \cdot M = (\underbrace{\lambda x_1}_{>0}, \lambda x_2) \in F.$$

▷ Réciproquement, considérons un point $N = (u_1, u_2) \in F$ distinct de O et posons

$$\alpha = \operatorname{Arctan} \frac{u_2}{u_1} \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[.$$

Comme $\cos \alpha > 0$, il existe donc un réel $r > 0$ tel que

$$(x_1, x_2) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha) = \frac{r}{2\cos\alpha} \cdot (2\cos^2\alpha, 2\sin\alpha\cos\alpha) = \frac{r}{2\cos\alpha} \cdot (1 + \cos 2\alpha, \sin 2\alpha).$$

Par conséquent, il existe un réel $\lambda = \frac{r}{2\cos\alpha} > 0$ et un point $M = (1 + \cos 2\alpha, \sin 2\alpha) \in K$ tels que $N = \lambda M$.

✍ *Le point M est le point d'intersection d'une demi-droite [ON) issue de O avec le cercle K. L'angle α est la détermination principale de l'argument de N.*

▷ Par double inclusion, on a donc démontré que

$$F = \big\{(0,0)\big\} \cup \big([x \neq 0] \cap [y > 0]\big).$$

❧ Cet ensemble F n'est pas fermé pour la norme produit $\|\cdot\|_\infty$. En effet, pour tout indice $n \geqslant 1$, le point

$$M_n = \left(1, 1/n\right)$$

appartient à F. Lorsque n tend vers $+\infty$, la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le point $L = (1, 0)$ qui n'appartient plus à F.

Comme F n'est pas stable par passage à la limite, on en déduit que F n'est pas fermé.

✍ *L'ensemble F n'est pas ouvert non plus, car $(0,0)$ est un point de F mais F n'est pas un voisinage de $(0,0)$ (figure !).*

Solution 35

On considère une application continue $f : E \to F$ et une partie compacte $K \subset E$. L'image (directe) de K par f est définie par

$$f_*(K) = \big\{f(x),\ x \in K\big\}.$$

Pour démontrer que $f_*(K)$ est une partie compacte de F, on considère une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $f * (K)$. Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe au moins un $x_n \in K$ tel que $y_n = f(x_n)$.

Comme K est une partie compacte, il existe une suite extraite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in K$.

Comme f est continue (sur E et en particulier au point $\ell \in K$),

$$y_{n_k} = f(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to+\infty]{} f(\ell)$$

(Théorème de composition des limites).

Comme $\ell \in K$, alors $f(\ell) \in f_*(K)$. On a ainsi démontré qu'il existait une suite extraite $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui convergeait vers une limite $f(\ell) \in f_*(K)$.

Ainsi, toute suite d'éléments de $f_*(K)$ possède une valeur d'adhérence dans $f_*(K)$, ce qui signifie que $f_*(K)$ est une partie compacte de F.

Solution 36

✍ *La fonction f est **uniformément continue sur** K si, et seulement si,*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, x, y \in K, \quad \|x-y\|_E \leqslant \alpha \Longrightarrow \|f(x)-f(y)\|_F \leqslant \varepsilon.$$

Nous allons procéder par contraposée et pour cela, nous commençons par écrire la négation de cette expression formelle.

► Nous supposons que :

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0,\ \forall\, \alpha > 0,\ \exists\, x_\alpha, y_\alpha \in K, \quad \begin{cases} \|x_\alpha - y_\alpha\|_E \leqslant \alpha \\ \|f(x_\alpha) - f(y_\alpha)\|_F > \varepsilon_0. \end{cases}$$

✍ *Conservons le réel $\varepsilon_0 > 0$ qui nous est donné par l'hypothèse de travail et puisque nous pouvons choisir librement α, choisissons α en imposant des contraintes de plus en plus fortes.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, prenons $\alpha_n = 2^{-n} > 0$. Pour chaque valeur de $n \in \mathbb{N}$, il existe alors deux éléments x_n et y_n de K tels que

$$\|x_n - y_n\|_E \leqslant 2^{-n} \quad \text{et} \quad \big\|f(x_n) - f(y_n)\big\|_F > \varepsilon_0.$$

► Comme tous les x_n appartiennent à K et que K est compact, il existe une suite extraite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in K$.

Par inégalité triangulaire (et astuce taupinale),

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \|y_{n_k} - \ell\|_E \leqslant \underbrace{\|y_{n_k} - x_{n_k}\|_E}_{\leqslant 1/2^{n_k}} + \underbrace{\|x_{n_k} - \ell\|_E}_{\to 0}$$

donc la suite extraite $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge elle aussi vers ℓ.

► Comme f est continue sur E, elle est en particulier continue au point ℓ et, par composition de limites,

$$f(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to+\infty]{} f(\ell) \quad \text{et} \quad f(y_{n_k}) \xrightarrow[k\to+\infty]{} f(\ell)$$

ce qui prouve en particulier que

$$\big\|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\big\|_F \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

Mais cela contredit la propriété établie plus haut :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \big\|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\big\|_F \geqslant \varepsilon_0 > 0.$$

► Notre hypothèse de travail est donc fausse et nous pouvons conclure : si f est continue sur E, alors la restriction de f à un compact $K \subset E$ est uniformément continue.

Solution 37

Comme la fonction f est bornée (sous entendu : sur E tout entier), les deux bornes supérieures ont bien un sens.

► Toute partie est contenue dans son adhérence, donc

$$V \overset{\text{not.}}{=} \big\{\|f(x)\|_F,\ x \in A\big\} \subset \big\{\|f(x)\|_F,\ x \in \overline{A}\big\} \overset{\text{not.}}{=} V'$$

et par conséquent

$$\sup_{x\in A} \|f(x)\|_F \leqslant \sup_{x\in\overline{A}} \|f(x)\|.$$

▶ Réciproquement, soit $x_0 \in \overline{A}$. Il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x_0 (caractérisation séquentielle de l'adhérence) et, d'après le Théorème de composition des limites,

$$\|f(u_n)\|_F \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|f(x_0)\|$$

puisque f est supposée continue.

Comme la borne supérieure est un majorant et que tous les u_n appartiennent à A,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \|f(u_n)\|_F \leqslant \sup_{x\in A} \|f(x)\|_F$$

et comme les inégalités larges sont conservées par passage à la limite, on vient de démontrer que

$$\forall\, x_0 \in \overline{A}, \qquad \|f(x_0)\|_F \leqslant \sup_{x\in A} \|f(x)\|_F.$$

Le majorant trouvé est indépendant de x_0, on peut donc passer à la borne supérieure et en déduire que

$$\sup_{x_0\in\overline{A}} \|f(x_0)\| \leqslant \sup_{x\in A} \|f(x)\|_F.$$

▶ L'égalité cherchée est donc démontrée par double inégalité.

Solution 38

1. On étudie ici une application *linéaire* $f : E \to F$.

✍ *Dans un espace vectoriel normé, tout singleton est fermé.*
L'image réciproque d'une partie fermée de F par une application continue de E dans F est une partie fermée de E.
D'après l'inégalité triangulaire, l'application $\|\cdot\|_F : F \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne et donc continue.

Si $f : E \to F$ est continue, alors $\|f\|_F : E \to \mathbb{R}$ est continue et

$$A = \left\{x \in E \,:\, \|f(x)\|_F = 1\right\}$$

est l'image réciproque du fermé $\{1\} \subset \mathbb{R}$ par une application continue ($\|f\|_F : E \to \mathbb{R}$), donc A est une partie fermée de E.

2. a.

✍ *Une application linéaire est continue si, et seulement si, elle est bornée au voisinage de l'origine :*

$$\exists\, M > 0,\ \exists\, r > 0,\ \forall\, x \in E, \quad \|x\|_E \leqslant r \Longrightarrow \|f(x)\|_F \leqslant M. \tag{8}$$

Nous allons procéder par contraposée.

❧ Si l'application *linéaire* f n'est pas continue, alors elle n'est pas bornée au voisinage de 0_E, c'est-à-dire :

$$\forall\, M > 0,\ \forall\, r > 0,\ \boxed{\exists\, x \in E,} \qquad \begin{cases} \|x\|_E \leqslant r, \\ \|f(x)\|_F > M. \end{cases} \tag{9}$$

✍ *La propriété (2) est la* négation formelle *de la propriété (1).*
On peut raisonner par analogie, comme s'il s'agissait d'événements d'une tribu : dire que l'événement B est une conséquence de l'événement A se traduit en algèbre booléenne par

$$A \subset B,$$

c'est-à-dire par

$$A \cap B^c = \varnothing.$$

(On vient d'exprimer la contraposée.)
La propriété contraire se traduit donc par

$$A \cap B^c \neq \varnothing$$

et donc par le fait qu'il existe au moins un $x \in E$ pour lequel l'intersection $A \cap B^c$ est réalisée.

✍ *Puisqu'on peut choisir librement $M > 0$ et $r > 0$, nous allons choisir ce qui est le plus contraignant : le minorant M de plus en plus grand et le rayon r de plus en plus petit.*

Pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe donc un vecteur $x_n \in E$ tel que

$$\|x_n\|_E \leqslant \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad \|f(x_n)\|_F > n.$$

La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0_E et pourtant la suite $(f(x_n))_{n\geqslant 1}$ n'est pas bornée, cqfd.

2. b. Puisqu'on suppose ici que l'application linéaire f n'est pas continue, nous reprenons la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de la question précédente et nous posons

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad y_n = \frac{x_n}{\|f(x_n)\|_F}.$$

✍ *Le dénominateur est strictement supérieur à 1, on ne risque pas de diviser par zéro.*

Par linéarité de f et absolue homogénéité de $\|\cdot\|_F$,

$$\|f(y_n)\|_F = \left\| \frac{f(x_n)}{\|f(x_n)\|_F} \right\|_F = 1$$

donc $(y_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite d'éléments de A.

✍ *Il faut voir la définition des y_n comme un moyen* naturel *de construire une suite d'éléments de A.*

D'autre part, par construction de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$,

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \|y_n - 0_E\|_E = \left\| \frac{x_n}{\|f(x_n)\|_F} \right\|_E = \frac{\|x_n\|_E}{\|f(x_n)\|_F} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

donc la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0_E.

Et comme $f(0_E) = 0_F$ par linéarité de f, la limite de la suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ n'appartient pas à A.

L'ensemble A n'est donc pas stable par passage à la limite, ce n'est donc pas un fermé de E.

Solution 39

La propriété

$$u \circ v^{n+1} - v^{n+1} \circ u = (n+1)\alpha \cdot v^n \tag{HR_n}$$

est vraie pour $n = 0$ par hypothèse.

Si la propriété (HR_n) est vérifiée pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned}
(n+1)\alpha \cdot v^{n+1} &= (u \circ v^{n+1} - v^{n+1} \circ u) \circ v && \text{(composition par } v\text{)} \\
&= u \circ v^{n+2} - v^{n+1} \circ (u \circ v) \\
&= u \circ v^{n+2} - v^{n+1} \circ (v \circ u + \alpha I_E) && (HR_1) \\
&= u \circ v^{(n+1)+1} - v^{(n+1)+1} \circ u - \alpha \cdot v^{n+1}
\end{aligned}$$

et donc

$$u \circ v^{(n+1)+1} - v^{(n+1)+1} \circ u = [(n+1)+1]\alpha \cdot v^{n+1},$$

ce qui prouve que la propriété (HR_n) est bien fondée et héréditaire.

La propriété (HR_n) est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

✍ *La suite de l'exercice était facile à traiter avec l'ancien programme, en utilisant la norme d'application linéaire continue. Je donne dans un premier temps l'ancienne preuve et je montre ensuite comment l'adapter dans le cadre du nouveau programme. (Ce sont les mêmes idées, mais cela demande une maîtrise technique bien supérieure : au lieu d'appliquer une recette vue en cours, il faut inventer la recette et le cours qui va avec !)*

❧ L'espace vectoriel $L_c(E)$ des endomorphismes continus de E est normé par

$$|u| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|.$$

La **norme d'application linéaire continue** $|\cdot|$, dite aussi **norme subordonnée à la norme** $\|\cdot\|$ sur E, est une norme d'algèbre :

$$\forall\, u, v \in L_c(E), \qquad |u \circ v| \leqslant |u|\,|v|.$$

Par absolue homogénéité et inégalité triangulaire, on déduit de (HR_n) que

$$(n+1)\,|\alpha|\,\|v^n\| \leqslant \|u\|\,\|v^{n+1}\| + \|v^{n+1}\|\,\|u\| \leqslant 2\|u\|\,\|v\|\,\|v^n\|.$$

Par conséquent : ou bien v est nilpotent, ou bien

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)\alpha \leqslant 2\|u\|\,\|v\|$$

et dans ce cas, $\alpha = 0$.

✍ *Comme on suppose que les applications linéaires sont continues, on sous-entend que l'espace E n'est pas un espace de dimension finie !*

En effet, si E est un espace de dimension finie,
— tous les endomorphismes de E sont continus ;
— on pourrait aussi raisonner sur le nombre fini de valeurs propres pour conclure.

Solution 40

1. Soit $x \in K$. Comme $K \subset U$, l'élément x appartient aussi à U et comme U est ouvert, c'est un voisinage de x. Il existe donc un réel $\alpha > 0$ tel que la boule ouverte $B_o(x, \alpha)$ soit contenue dans U.

✍ *Le réel α dépend* a priori *du point x choisi.*

2. On sait que, pour toute partie non vide A de E, l'application

$$[x \mapsto d(x, A)]$$

est continue (et même 1-lipschitzienne). Donc la fonction $x \mapsto d(x, U^c)$ est continue.

D'après la question précédente, pour tout $x \in K$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $B_o(x, \alpha) \subset U$. Cela signifie que

$$\forall\, y \in U^c, \qquad y \notin B_o(x, \alpha) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \alpha \leqslant \|y - x\|.$$

On a un minorant indépendant de $y \in U^c$, on peut donc passer à la borne inférieure pour obtenir

$$d(x, U^c) \geqslant \alpha > 0.$$

✍ *On rappelle que, dans ce raisonnement, le réel α dépend du point $x \in K$ considéré.*

❧ Une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes. Donc la fonction $x \mapsto d(x, U^c)$ atteint en particulier son minimum en un point de K : il existe $x_0 \in K$ tel que

$$\forall\, x \in K, \qquad d(x, U^c) \geqslant d(x_0, U^c)$$

et comme la fonction ne s'annule pas, son minimum est strictement positif.

On a ainsi justifié l'existence d'un réel

$$\alpha_0 = d(x_0, U^c) > 0$$

tel que

$$\forall\, x \in K, \qquad d(x, K) \geqslant \alpha_0 > 0.$$

✍ *Et cette fois, grâce à la compacité de K, on a trouvé un minorant indépendant de $x \in K$.*

Solution 41

1. a. Comme $b \neq -a$, la fonction affine

$$f_{a,b} = [t \mapsto (1-t)a + tb = a + (b-a)\cdot t]$$

ne s'annule pour aucune valeur de $t \in [0, 1]$.

✍ *Comme a et b sont deux points du cercle et ne sont pas diamétralement opposés, la corde (ab) n'est pas un diamètre : elle ne passe pas par le centre du cercle.*

Il y a un sens à raisonner géométriquement dans le plan (quelle que soit la dimension de E) : en effet, tout notre raisonnement repose sur les trois points O, a et b — et trois points, ça tient dans un plan. Toujours.

✍ *En dimension* finie, *toute application linéaire est continue et par conséquent toute application affine est continue aussi.*
En dimension infinie, il en va autrement... Mais l'application affine que nous considérons ici est lipschitzienne quelle que soit la dimension de E *:*

$$\forall\, t, t', \qquad \big\|f_{a,b}(t) - f_{a,b}(t')\big\| = \big\|(t-t')\cdot(b-a)\big\| = \|b-a\|\,|t-t'|,$$

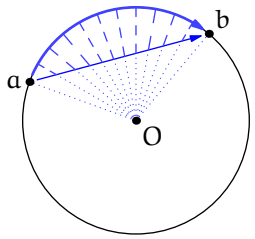
donc elle est bien continue.

L'application $\|\cdot\|$ est continue de $(E, \|\cdot\|)$ dans $\mathbb{R}$ (elle est lipschitzienne), donc la composée $\|f_{a,b}\|$ est continue et ne s'annule pas.

Par conséquent, le quotient

$$t \mapsto \frac{(1-t)a + tb}{\|(1-t)a + tb\|}$$

est une fonction continue sur $[0,1]$ et, par homogénéité de la norme, il prend ses valeurs dans la sphère unité S.



2. Soient a et b dans S.

❧ Si $b \neq -a$, alors on a explicité une fonction continue $f : [0,1] \to S$ telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$.

❧ Il reste donc à trouver une fonction continue $f : [0,1] \to S$ telle que $f(0) = a$ et $f(1) = -a$.
Comme la dimension de E est au moins égale à 2, il existe un point $b \in S$ distinct de a et de $-a$.

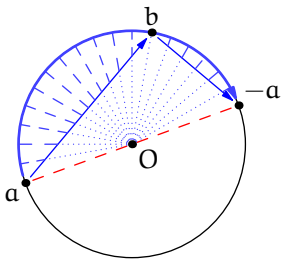
✍ *Si* $\dim E = 1$*, alors la sphère unité ne contient que deux points opposés :* ± 1 *ou le pôle nord* N *et le pôle sud* $S = -N$*. Dans ce cas, la sphère unité* n'est pas *connexe par arcs !*
(Il faut bien utiliser l'hypothèse sur la dimension de E*.)*

Par hypothèse, on a $b \neq -a$ et aussi $b \neq -(-a)$.

La question précédente nous donne alors deux fonctions continues $f_1 : [0,1] \to S$ et $f_2 : [0,1] \to S$ telles que $f_1(0) = a$, $f_1(1) = f_2(0) = b$ et $f_2(1) = -a$. En recollant ces deux fonctions :

$$\forall\, t \in [0, 1/2], \quad f(t) = f_1(2t), \qquad \forall\, t \in [1/2, 1], \quad f(t) = f_2(2t-1)$$

on obtient une fonction continue $f : [0,1] \to S$ telle que $f(0) = a$ et $f(1) = -a$.



On a ainsi démontré que, en dimension supérieure à 2, la sphère unité d'un espace vectoriel normé est toujours connexe par arcs.

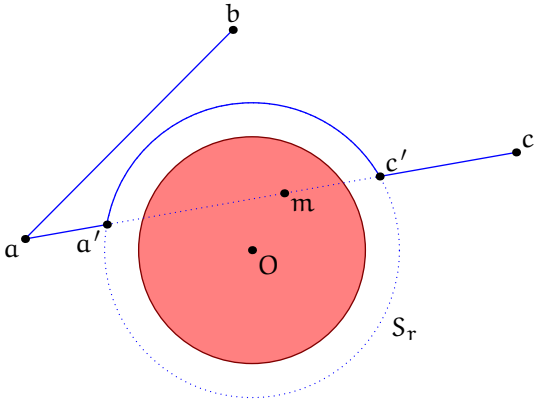
✍ *Toute sphère se déduit de la sphère unité par une homothétie et une translation, donc toute sphère de* E *est connexe par arcs (quel que soit son centre, quel que soit son rayon).*

3. Notons B, la boule unité fermée : $x \in B \iff \|x\| \leqslant 1$.

❧ Considérons deux points a et b dans le complémentaire B^c (c'est-à-dire $\|a\| > 1$ et $\|b\| > 1$) et supposons que le segment qui relie ces deux points ne rencontre pas la boule unité fermée :

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \big\|(1-t)a + tb\big\| > 1.$$

Dans ces conditions, la fonction affine $[t \mapsto (1-t)a + tb]$ est une fonction continue de $[0,1]$ dans B^c qui part de a (à $t = 0$) et arrive en b (à $t = 1$).



❧ Et si on considère deux points a et c dans B^c tels que le segment $[a,c]$ rencontre la boule unité fermée B ? Par hypothèse, $\|a\| > 1$ et $\|c\| > 1$, donc il existe un réel r tel que

$$1 < r < \min\{\|a\|, \|c\|\}.$$

On note S_r, la sphère de centre O et de rayon r.

"On voit bien" que le segment $[a,c]$ coupe la sphère S_r en deux points a' et c' tels que l'intervalle $[a,a'[$ soit hors de la sphère S_r ; que le segment $[a',c']$ soit contenu dans la boule fermée de centre O et de rayon r et que l'intervalle $]c',c]$ soit hors de la sphère S_r.

Par connexité de la sphère S_r, on peut aller continûment de a à c en restant en dehors de la boule unité fermée :
— d'un mouvement rectiligne uniforme de a à a' (on reste hors de la sphère S_r, donc hors de la boule unité fermée) ;
— de a' à c' en restant sur la sphère S_r (et donc hors de la boule unité fermée) ;
— d'un mouvement rectiligne uniforme de c' à c.

✍ *Il s'agit cette fois de recoller trois fonctions continues — on a su en recoller deux, ce n'est pas très différent.*

❧ Ce qui suit s'adresse à ceux qui ne croient pas ce qu'ils voient.

Nous avons distingué trois étapes dans le mouvement qui nous fait aller de a à c : avant de passer à l'intérieur de la sphère S_r ; le transit à l'intérieur de cette sphère ; la fin du parcours après être sorti de cette sphère. Autrement dit,

$$\|f_{a,c}(t)\| > r \quad \text{puis} \quad \|f_{a,c}(t)\| \leqslant r \quad \text{et enfin} \quad \|f_{a,c}(t)\| > r.$$

Il est donc logique de s'intéresser à

$$I = \{t \in [0,1] \ : \ \|f_{a,c}(t)\| \leqslant r\}.$$

► On a supposé qu'il existait un point m du segment $[a,c]$ qui appartenait à la boule unité fermée B. Il existe donc un instant $t_m \in [0,1]$ tel que $\|f_{a,c}(t_m)\| \leqslant 1 < r$. Donc l'ensemble I n'est pas vide.

► Par définition de r, $\|f_{a,c}(0)\| = \|a\| > r$ et $\|f_{a,c}(1)\| = \|b\| > r$, donc l'ensemble I ne contient ni 0, ni 1.

► Si $t_1 < t_2$ sont deux éléments de I, alors

$$\{f_{a,c}(t),\ t \in [t_1,t_2]\}$$

est le segment qui relie les points $f_{a,c}(t_1)$ et $f_{a,c}(t_2)$. Par définition de I, ces deux points appartiennent à la boule fermée B_r de centre O et de rayon r. Dans un espace vectoriel normé, toutes les boules sont convexes. Par conséquent, ce segment est tout entier contenu dans B_r, ce qui signifie que $[t_1,t_2] \subset I$.

On a ainsi démontré que I était un intervalle.

► Comme $f_{a,c} \ : \ [0,1] \to E$ est une application continue, la composée $\|f_{a,c}\|$ est continue et l'intervalle I est l'image réciproque du fermé $[<,1[$ par une application continue. Cet intervalle I est donc un fermé de $[0,1]$ et donc (puisque $[0,1]$ est un fermé de $\mathbb{R}$) un segment $[\alpha,\beta]$.

► Par définition de I, on a donc

$$\forall\, t \in [0,\alpha[\,\cup\,]\beta,1]\,, \qquad \|f_{a,c}(t)\| > r.$$

✍ *Ce n'est pas nécessaire, mais on peut aussi démontrer que $\alpha < \beta$.*

❧ *Par définition de I,*

$$\forall\, t \in [0,\alpha[\,\cup\,]\beta,1] = [0,1] \setminus I, \qquad \|f_{a,c}(t)\| > r.$$

Or la fonction

$$\left[t \mapsto \|f_{a,c}(t)\|\right] \ : \ [0,1] \to \mathbb{R}$$

est continue et $\alpha > 0$, donc

$$\|f_{a,c}(\alpha)\| = \lim_{t \to \alpha-} \|f_{a,c}(t)\| \geqslant r$$

alors que

$$\|f_{a,c}(\alpha)\| \leqslant r$$

(puisque $\alpha \in I$*).*

On a donc $\|f_{a,c}(\alpha)\| = r$ *et de même* $\|f_{a,c}(\beta)\| = r$ *(puisque* $\beta < 1$*).*

❧ *NB : Il est important de rappeler que* $0 < \alpha$ *et* $\beta < 1$ *pour qu'il y ait un sens à étudier la limite* à gauche *en* α *et la limite* à droite *en* β *!*

On n'étudie pas la limite à gauche en 0*, ni la limite à droite en* 1 *d'une fonction qui n'est définie que sur* $[0,1]$ *!*

❧ *Si on avait* $\alpha = \beta$*, alors* $[0,1] = [0,\alpha[\cup \{\alpha\} \cup]\beta,1]$ *et on aurait donc*

$$\forall\, t \in [0,1], \qquad \|f_{a,c}(t)\| \geqslant r$$

alors qu'il existe un instant $t_m \in [0,1]$ *tel que*

$$\|f_{a,c}(t_m)\| = \|m\| \leqslant 1 < r.$$

4. On considère un ensemble fini $\Omega = \{M_k,\ 1 \leqslant k \leqslant n\}$. L'ensemble des distances qui séparent les points de Ω est donc fini :

$$\Delta = \big\{d(M_k, M_\ell),\ 1 \leqslant k < \ell \leqslant n\big\}$$

et contenu dans $\mathbb{R}_+^*$ (on a pris soin de mesurer la distance entre des points distincts). Cet ensemble admet donc un plus petit élément, strictement positif, et on pose

$$r = \frac{1}{3}\min\Delta > 0.$$

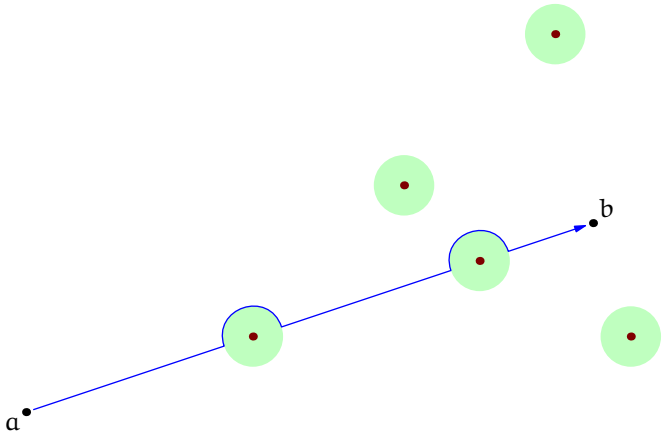
❧ Pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, on note B_k, la boule fermée de centre M_k et de rayon r. Ces boules sont deux à deux disjointes : si $x \in B_k$ et $y \in B_\ell$, alors

$$\begin{aligned}
\|x-y\| &= \|x - M_k + M_k - M_\ell + M_\ell - y\| \\
&\geqslant \|M_k - M_\ell\| - \|x - M_k + M_\ell - y\| && \text{(inégalité triangulaire)} \\
&\geqslant \|M_k - M_\ell\| - \big(\|x - M_k\| + \|M_\ell - y\|\big) && \text{(bis)} \\
&\geqslant \min\Delta - 2r = r > 0.
\end{aligned}$$

❧ Étant donnés deux points a et b dans Ω^c, on trace le segment $[a,b]$.

À chaque fois que ce segment traverse une boule, on contourne cette boule (cf la construction précédente).

Si ce segment émerge d'une boule (= a se trouve dans une des boules B_k) ou termine dans une boule (= b se trouve dans une des boules B_k) ou si segment est contenu dans une boule (= a et b se trouvent dans une même boule B_k), il suffit de construire un chemin continu reliant un point à l'intérieur de la boule à un point de la surface (on a démontré pour commencer que la surface était connexe par arcs).



✍ *Tout cela serait bien fastidieux à rédiger mais cela se "voit" très bien.*

Solution 42

Comme f est uniformément continue, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, y, z \in E, \quad \|y - z\|_E \leqslant \alpha \implies \big\|f(y) - f(z)\big\|_F \leqslant 1. \tag{$\star$}$$

✍ *On a choisi $\varepsilon = 1$, c'est sans importance ici.*

❧ Pour tout vecteur $x \in E$ non nul, on pose

$$n = \left\lfloor \frac{\|x\|}{\alpha} \right\rfloor \qquad \text{pour avoir} \qquad n\alpha \leqslant \|x\| < (n+1)\alpha.$$

On passe de 0_E à x en faisant de petit pas :

$$f(x) - f(0_E) = \sum_{k=1}^{n} \left[f\Big(k\alpha \cdot \frac{x}{\|x\|}\Big) - f\Big((k-1)\alpha \cdot \frac{x}{\|x\|}\Big)\right] + \left[f(x) - f\Big(n\alpha \cdot \frac{x}{\|x\|}\Big)\right]$$

et donc, par inégalité triangulaire,

$$\big\|f(x) - f(0_E)\big\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left\| f\Big(k\alpha \cdot \frac{x}{\|x\|}\Big) - f\Big((k-1)\alpha \cdot \frac{x}{\|x\|}\Big)\right\| + \left\|f(x) - f\Big(n\alpha \cdot \frac{x}{\|x\|}\Big)\right\|.$$

Pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\left\| k\alpha \cdot \frac{x}{\|x\|} - (k-1)\alpha \cdot \frac{x}{\|x\|}\right\| = \left\|\alpha \cdot \frac{x}{\|x\|}\right\| = \alpha$$

et

$$\left\| x - n\alpha \cdot \frac{x}{\|x\|}\right\| = \left\|\big(\|x\| - n\alpha\big) \cdot \frac{x}{\|x\|}\right\| = \|x\| - n\alpha \leqslant \alpha.$$

On peut donc appliquer l'estimation $(\star)$ à chacun des $(n+1)$ termes de la somme :

$$\big\|f(x) - f(0_E)\big\| \leqslant (n+1) \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha} \cdot \|x\|$$

d'où, par inégalité triangulaire :

$$\big\|f(x)\big\| \leqslant \frac{1}{\alpha} \cdot \|x\| + 1 + \big\|f(0_E)\big\|.$$

❧ Il est clair que cette majoration est aussi vraie pour $x = 0_E$!
❧ L'estimation qu'on vient de justifier :

$$\forall\, x \in E, \qquad \big\|f(x)\big\| \leqslant a\|x\| + b$$

prouve que le quotient $\big\|f(x)\big\|/\|x\|$ reste borné lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$, donc

$$\big\|f(x)\big\|_F \underset{\|x\|_E \to +\infty}{=} \mathcal{O}\big(\|x\|_E\big).$$

Solution 43

1. Pour tout $x \in [0,1]$, l'application

$$y \longmapsto (x,y) \longmapsto f(x,y)$$

est continue sur $[0,1]$ (en tant que composée d'applications continues). Les segments de $\mathbb{R}$ sont des parties compactes, donc cette application atteint un maximum et $g(x)$ est donc bien défini.
2. Soient $x_0 \in [0,1]$ et $\varepsilon > 0$. L'application f est continue sur le compact $[0,1] \times [0,1]$, donc elle est uniformément continue. Il existe donc un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in [0,1]\times[0,1], \quad \big\|(x_2,y_2) - (x_1,y_1)\big\|_\infty \leqslant \alpha \implies \big|f(x_2,y_2) - f(x_1,y_1)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi,

$$\forall\, y \in [0,1],\ \forall\, x \in [x_0-\alpha, x_0+\alpha] \cap [0,1], \quad \big|f(x,y) - f(x_0,y)\big| \leqslant \varepsilon \tag{$\star$}$$

❧ En particulier

$$\forall\, y \in [0,1],\ \forall\, x \in [x_0-\alpha, x_0+\alpha] \cap [0,1], \quad f(x,y) \leqslant f(x_0,y) + \varepsilon \leqslant g(x_0) + \varepsilon$$

puisque le maximum est un majorant. On a un majorant indépendant de y, donc on peut passer au maximum :

$$\forall\, x \in [x_0-\alpha, x_0+\alpha]\cap[0,1], \quad g(x) = \max_{y\in[0,1]} f(x,y) \leqslant g(x_0)+\varepsilon.$$

❧ D'autre part, il existe $y_0 \in [0,1]$ tel que

$$f(x_0,y_0) = g(x_0)$$

et $(\star)$ nous donne alors

$$\forall\, x \in [x_0-\alpha, x_0+\alpha]\cap[0,1], \quad g(x_0)-\varepsilon = f(x_0,y_0)-\varepsilon \leqslant f(x,y_0) \leqslant g(x).$$

❧ On obtient de cette manière l'encadrement suivant

$$\forall\, x \in [x_0-\alpha, x_0+\alpha]\cap[0,1], \quad g(x_0)-\varepsilon \leqslant g(x) \leqslant g(x_0)+\varepsilon,$$

ce qui prouve que g est bien une fonction continue sur $[0,1]$.

Solution 44

1. Si $A \in O_n(\mathbb{R})$, alors $A^\top.A = I_n$, donc $A.A^\top.A = A$ et $A \in V$. Donc $O_n(\mathbb{R})$ est contenu dans V et par conséquent

$$O_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \cap V. \tag{10}$$

✍ *Le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est aussi contenu dans $GL_n(\mathbb{R})$ — mais n'anticipons pas trop.*

2. Si $A \in V$ est inversible, alors on peut multiplier (à gauche ou à droite, c'est indifférent) par A^{-1} l'égalité

$$A.A^\top.A = A$$

et obtenir $A^\top.A = I_n$, ce qui signifie que $A \in O_n(\mathbb{R})$.

Avec la question précédente, on vient en fait de démontrer que

$$O_n(\mathbb{R}) = GL_n(\mathbb{R}) \cap V. \tag{11}$$

3. Pour démontrer que $O_n(\mathbb{R})$ est à la fois un ouvert relatif à V et un fermé relatif à V, il faut démontrer qu'il existe un ouvert G de E et un fermé F de E tels que

$$O_n(\mathbb{R}) = G \cap V = F \cap V.$$

✍ *On rappelle avant d'aller plus loin que :*
— *toute application linéaire sur un espace de dimension finie est continue ;*
— *en particulier les applications coordonnées (relatives à une base quelconque) sont continues ;*
— *toute combinaison linéaire et tout produit d'applications continues sont encore des applications continues ;*
— *en particulier toute fonction polynomiale des coordonnées (relatives à une base quelconque) est continue ;*
— *tout singleton est fermé.*

▶ Le groupe orthogonal

$$O_n(\mathbb{R}) = [M^\top.M = I_n]$$

est un fermé de $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque du fermé $\{I_n\}$ par l'application

$$\left[M \mapsto M^\top.M\right] \,:\, \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),$$

qui est continue en tant que **produit** des applications continues

$$[M \mapsto M] \qquad \text{et} \qquad \left[M \mapsto M^\top\right]$$

(applications linéaires sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, espace de dimension finie).

On déduit alors de (1) que $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé relatif à V (on prend $F = O_n(\mathbb{R})$).

▶ L'ensemble

$$[\det M = 0]$$

est un fermé de $\mathfrak{M}_n(R)$ en tant qu'image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application

$$[M \mapsto \det M] \,:\, \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},$$

qui est continue en tant que fonction polynomiale des coordonnées relatives à la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

✍ *La formule*

$$\det M = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) m_{1,\sigma(1)} m_{2,\sigma(2)} \cdots m_{n,\sigma(n)}$$

n'a jamais servi à calculer le moindre déterminant, il faut bien qu'elle serve à quelque chose !

Le groupe linéaire

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = [\det M \neq 0] = [\det M = 0]^c$$

est donc un ouvert de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ en tant que complémentaire d'un fermé et par (2), le groupe $O_n(\mathbb{R})$ est un ouvert relatif à V (on prend $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$).

✍ ***Variante***

On peut aussi appliquer la caractérisation séquentielle des fermés. Pour cela, on considère une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de V qui converge vers une matrice $L \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et il s'agit de vérifier que la limite L appartient encore à V. Mais comme $A_k \in V$,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad A_k.A_k^\top.A_k = A_k$$

et comme l'application

$$\left[A \mapsto A.A^\top.A\right]$$

est continue (en tant que produit de trois applications linéaires sur un espace de dimension finie), on déduit du Théorème de composition des limites que

$$L.L^\top.L = L$$

et donc que $L \in V$. Mission accomplie !

✍ *Pour la topologie relative à V, comme pour toutes les topologies, il y a au moins deux parties ouvertes et fermées : $\varnothing$ et V.*
Mais, au contraire de ce qu'on observe dans un espace vectoriel, ce ne sont pas les seules parties ouvertes et fermées : il y aussi $O_n(\mathbb{R})$ (et son complémentaire dans V, bien sûr).

Solution 45

1. Nous allons bien évidemment procéder par double implication.

❧ Supposons que f tende vers ℓ au voisinage de (x_0, y_0).

▷ Par définition de la limite, pour $\varepsilon = 1 > 0$, il existe un réel $\alpha_1 > 0$ tel que

$$\|(x,y) - (x_0,y_0)\| \leqslant \alpha_1 \implies \left|f(x,y) - \ell\right| \leqslant 1.$$

En particulier, pour tout $0 < r \leqslant \alpha_1$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, le couple

$$(x,y) = (x_0 + r\cos\theta,\ y_0 + r\sin\theta)$$

vérifie bien

$$\|(x,y) - (x_0,y_0)\| = r \leqslant \alpha_1$$

et la fonction

$$\left[\theta \mapsto f\big(x_0 + r\cos\theta,\ y_0 + r\sin\theta\big) - \ell\right]$$

est bornée sur $\mathbb{R}$ (sa valeur absolue est inférieure à 1).

▷ On peut donc poser

$$\forall\, 0 < r \leqslant \alpha_1, \quad \varphi(r) = \sup_{\theta\in\mathbb{R}} \left|f(x_0 + r\cos\theta,\ y_0 + r\sin\theta) - \ell\right| \tag{$\star$}$$

pour obtenir

$$\begin{array}{l}\forall\, 0 < r \leqslant \alpha_1,\\ \forall\, \theta \in \mathbb{R},\end{array} \quad \left|f(x_0 + r\cos\theta,\ y_0 + r\sin\theta) - \ell\right| \leqslant \varphi(r) \tag{$\star\star$}$$

(puisque le sup $(\star)$ calculé sur le cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon r, est un majorant).

▷ Revenons à la définition de la limite.
Pour tout $0 < \varepsilon \leqslant 1$, il existe $0 < \alpha(\varepsilon) \leqslant \alpha_1$ tel que

$$\|(x,y) - (x_0,y_0)\| \leqslant \alpha(\varepsilon) \implies \left|f(x,y) - \ell\right| \leqslant \varepsilon.$$

Le majorant étant indépendant de (x,y), on peut passer au sup en restant sur le cercle de centre (x_0,y_0) et de rayon $0<r\leqslant\alpha(\varepsilon)$:

$$\forall\, 0<r\leqslant\alpha(\varepsilon),\qquad 0\leqslant\varphi(r)\leqslant\varepsilon.$$

On vient de démontrer que la fonction $\varphi\ :\ ]0,\alpha_1]\to\mathbb{R}_+$, définie par $(\star)$ et qui vérifie la propriété $(\star\star)$, tend vers 0 au voisinage de 0.

❧ La réciproque est beaucoup plus simple. On suppose qu'il existe un réel $\alpha_1>0$ et une fonction φ définie sur $]0,\alpha_1]$ et de limite nulle en 0 telle que

$$\begin{array}{l}\forall\, 0<r\leqslant\alpha_1,\\ \forall\,\theta\in\mathbb{R},\end{array}\qquad \big|f(x_0+r\cos\theta,\ y_0+r\sin\theta)-\ell\big|\leqslant\varphi(r).$$

Soit $\varepsilon>0$. Par hypothèse sur φ, il existe un réel $0<\alpha\leqslant\alpha_1$ tel que

$$\forall\, 0<r\leqslant\alpha,\quad 0\leqslant\varphi(r)\leqslant\varepsilon.$$

Pour tout (x,y) tel que

$$\big\|(x,y)-(x_0,y_0)\big\|\leqslant\alpha,$$

le point (x,y) est dans le disque fermé de centre (x_0,y_0) et de rayon α, donc il existe $0\leqslant r\leqslant\alpha$ et $\theta\in\mathbb{R}$ tels que

$$(x,y)=(x_0+r\cos\theta,\ y_0+r\sin\theta)$$

et par conséquent

$$\big|f(x,y)-\ell\big|\leqslant\varphi(r)\leqslant\varepsilon.$$

On vient de démontrer que f tend vers ℓ au voisinage de (x_0,y_0) ! (Relire ce qui est écrit en rouge...)

2. On traite les quatre exemples au moyen des coordonnées polaires en mettant en évidence une fonction φ convenable à chaque fois.

Premier exemple

$$0\leqslant f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\frac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^2}\leqslant r^2=\varphi(r)$$

Deuxième exemple

$$0\leqslant\big|f(x,y)\big|\leqslant\frac{r^3(|\cos^3\theta|+|\sin^3\theta|)}{r^2}\leqslant 2r=\varphi(r)$$

Troisième exemple

$$0\leqslant\big|f(x,y)\big|\leqslant\frac{2|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2}\leqslant\frac{3r^3}{r^2}=3r=\varphi(r)$$

Quatrième exemple

La fonction $\left[\theta\mapsto\sqrt{\cos^4\theta+\sin^4\theta}\right]$ est continue et π-périodique sur $\mathbb{R}$, donc elle est bornée et atteint ses bornes. En particulier, elle atteint un minimum et comme la fonction ne s'annule jamais (puisque $\cos\theta$ et $\sin\theta$ ne peuvent s'annuler en même temps !), son minimum m_0 est strictement positif.

$$0\leqslant\big|f(x,y)\big|\leqslant\frac{r^4}{r^2\sqrt{\cos^4\theta+\sin^4\theta}}\leqslant\frac{r^2}{m_1}=\varphi(r)$$

❧ Les quatre fonctions sont naturellement définies sur $\mathbb{R}^2\setminus\{O\}$ et continues sur cet ouvert (soit comme fonctions rationnelles, soit par opérations sur des fonctions continues).

On vient de démontrer qu'elles tendent vers 0 au voisinage de $(0,0)$. On peut donc, *si on y a intérêt*, les prolonger en fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$.

3. Pour démontrer qu'une fonction n'a pas de limite au voisinage du point $O=(0,0)$, on peut procéder par contraposée en utilisant le Théorème de composition des limites.

✍ *Si f tend vers ℓ au voisinage de O et si $g\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ tend vers O au voisinage de 0, alors la composée*

$$(f\circ g)(t)=f\big(g_x(t),\ g_y(t)\big)$$

tend aussi vers ℓ lorsque t tend vers 0.

❧ *Par contraposée, si on trouve une fonction continue $\gamma\ :\ ]-\alpha,\alpha[\to\mathbb{R}^2$ telle que*

$$\gamma(t)=\big(x(t),y(t)\big)\xrightarrow[t\to0]{}(0,0)$$

et que $f\big(\gamma(t)\big)$ ne tende pas vers ℓ lorsque t tend vers 0, alors f n'est pas continue en $(0,0)$.

❧ *Variante : si on trouve deux fonctions g_1 et g_2 définies sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ telles que*

$$\lim_{t\to 0} g_1(t) = \lim_{t\to 0} g_2(t) = (0,0)$$

et telles que

$$\lim_{t\to 0} f\big(g_1(t)\big) \neq \lim_{t\to 0} f\big(g_2(t)\big),$$

alors f n'est pas continue en $(0,0)$.

Premier exemple
Avec $g_1(t) = (t,t)$ et $g_2(t) = (t,-t)$, on obtient

$$\forall\, t \neq 0, \quad f[g_1(t)] = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad f[g_2(t)] = \frac{1}{2}$$

ce qui prouve que f n'a pas de limite au voisinage de $(0,0)$.

✍ *En coordonnées polaires, on aurait trouvé*

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 1 + \cos\theta\sin\theta$$

*et quel que soit $\ell \in \mathbb{R}$, il est impossible de majorer l'écart, **qui ne dépend pas de** r,*

$$\big|f(x,y) - \ell\big|$$

par une expression qui ne dépend que de r et qui tend vers 0 lorsque r tend vers 0.

Deuxième exemple
Avec $g_1(t) = (t,0)$ et $g_2(t) = (0,t)$, on obtient

$$\forall\, t \neq 0, \quad f[g_1(t)] = 1 \quad \text{et} \quad f[g_2(t)] = -1.$$

✍ *En coordonnées polaires,*

$$\forall\, r > 0, \quad f(r\cos\theta,\ r\sin\theta) = \cos 2\theta.$$

Troisième exemple
Avec $g_1(t) = (t,t)$ et $g_2(t) = (t,-t)$, on obtient

$$\forall\, t \neq 0, \quad f[g_1(t)] = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f[g_2(t)] = \frac{-1}{2}.$$

✍ *En coordonnées polaires,*

$$\forall\, r > 0, \quad f(r\cos\theta,\ r\sin\theta) = \sin\theta\cos\theta.$$

✍ *Pour trouver les fonctions g_1 et g_2 qui prouvent que la fonction f n'a pas de limite, il est utile de passer en coordonnées polaires pour voir comment f dépend de r.*

Si f ne dépend pas de r (comme c'est le cas de ces trois exemples), la dépendance en θ permet de trouver des chemins qui mènent à des valeurs incompatibles.

Solution 46

✍ *Pour démontrer que F est continue sur U, il faut prouver que F est continue en chaque point de U. La démonstration commence donc par :*

❧ Soit $M_0 = (x_0, y_0) \in U$. Comme U est un ouvert, il existe un rayon $r_0 > 0$ tel que

$$K \overset{\text{not.}}{=} \left[\|M_0M\| \leqslant r_0\right] \subset U$$

et K, en tant que boule fermée dans un espace de dimension finie, est une partie compacte de E.

✍ *Dans la définition des voisinages, il est dit qu'il existe une boule* ouverte *de centre M_0 et de rayon $r > 0$ contenue dans U.*
Pour tout $0 < r_0 < r$, la boule fermée *de centre M_0 et de rayon r_0 est contenue dans la boule ouverte de centre M_0 et de rayon r. C'est une telle boule fermée que nous notons K.*
L'avantage de considérer une boule fermée est qu'une telle boule, dans un espace de dimension finie, est une partie compacte. (On dit que les EVN *de dimension finie sont* localement compacts.*)*

❧ Un produit de parties compactes est une partie compacte de l'espace produit, donc

$$K \times [a, b]$$

est une partie compacte de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Comme la fonction f est continue sur $U \times [a, b]$, sa restriction au compact $K \times [a, b]$ est uniformément continue.

❧ Soit $\varepsilon > 0$. Comme $b > a$, le réel $\frac{\varepsilon}{b-a}$ est strictement positif et, par *continuité uniforme*, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\begin{aligned}\forall\, t \in [a, b],\ \forall\, \big((x, y), s\big) \in K \times [a, b],\\ \big\|\big((x, y), s\big) - \big((x_0, y_0), t\big)\big\|_\infty \leqslant \alpha\\ \Longrightarrow \big|f(x, y, s) - f(x_0, y_0, t)\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\forall\, M = (x, y) \in K,\ \forall\, t \in [a, b],\\ \left\{\begin{array}{l} |x - x_0| \leqslant \alpha \\ |y - y_0| \leqslant \alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow \big|f(M, t) - f(M_0, t)\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\end{aligned}$$

puisque $\|(M, t) - (M_0, t)\|_\infty = \max\{|x - x_0|, |y - y_0|, 0\}$.

❧ La conservation des inégalités par l'intégrale nous donne alors :

$$\begin{aligned}\big|F(M) - F(M_0)\big| &= \left|\int_a^b f(x, y, t) - f(x_0, y_0, t)\,dt\right|\\ &\leqslant \int_a^b \big|f(x, y, t) - f(x_0, y_0, t)\big|\,dt\\ &\leqslant (b-a) \times \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon\end{aligned}$$

pour tout $M = (x, y) \in U$ tel que $|x - x_0| \leqslant \alpha$ et $|y - y_0| \leqslant \alpha$.

On a bien démontré que F était continue au point $M_0 \in U$ et comme cela vaut pour tout $M_0 \in U$, on a démontré que F était continue sur U.

Solution 47

✍ *On considère ici une fonction définie par une intégrale qui dépend de trois paramètres : les deux bornes et un troisième paramètre sous le signe $\int$. La régularité d'une telle expression ne fait pas partie des théorèmes au programme, mais on peut l'étudier en restant dans le cadre du programme...*

❧ Pour rassurer les inquiets, on précise que I et J sont des intervalles ouverts de longueur strictement positive.

❧ Pour des raisons de commodité, nous munissons les espaces $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ de leurs normes produit respectives (ce qui n'est pas une restriction comme on sait), qu'on notera toutes les deux $\|\cdot\|_\infty$.

❧ Dans tout ce qui suit, on fixe un point $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$.

❧ Comme les intervalles I et J sont ouverts, il existe $r > 0$ tel que

$$[x_0 - r, x_0 + r] \times [y_0 - r, y_0 + r] \times [z_0 - r, z_0 + r] \subset I \times I \times J = \Omega. \tag{12}$$

Comme I est un *intervalle*, il existe un segment $[a,b] \subset I$ tel que

$$[x_0 - r, x_0 + r] \subset [a,b] \quad \text{et} \quad [y_0 - r, y_0 + r] \subset [a,b]. \tag{13}$$

En tant que produits de deux compacts (segments) de $\mathbb{R}$, les rectangles

$$K_1 = [x_0, y_0] \times [z_0 - r, z_0 + r] \subset I \times J = U$$

et

$$K_2 = [a,b] \times [z_0 - r, z_0 + r] \subset I \times J$$

sont des parties compactes de $\mathbb{R}^2$.

❧ On **fixe** maintenant une tolérance $\varepsilon > 0$.

► Comme la fonction f est continue sur U, elle est en particulier bornée sur le compact K_2 :

$$\exists\, A > 0,\ \forall\, (t,z) \in K_2, \qquad \big|f(t,z)\big| \leqslant A \tag{14}$$

et uniformément continue sur le compact K_1 :

$$\begin{aligned} &\exists\, \alpha > 0, \forall\, (t,z), (t_1,z_1) \in K_1, \\ &\qquad \|(t_1,z_1) - (t,z)\|_\infty \leqslant \alpha \implies \big|f(t,z) - f(t_1,z_1)\big| \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

donc en particulier

$$\begin{aligned} &\exists\, \alpha > 0,\ \forall\, t \in [x_0, y_0],\ \forall\, z \in [z_0 - r, z_0 + r], \\ &\qquad |z - z_0| \leqslant \alpha \implies \big|f(t,z) - f(t,z_0)\big| \leqslant \varepsilon. \end{aligned} \tag{4}$$

► Nous disposons de deux réels strictement positifs : r donné par (1) et α donné par (4). Nous noterons dans la suite α_0, le plus petit de ces deux réels :

$$\alpha_0 = \min\{r,\ \alpha\} > 0.$$

De cette manière,

$$[z_0 - \alpha_0, z_0 + \alpha_0] \subset [z_0 - r, z_0 + r]$$

et

$$|z - z_0| \leqslant \alpha_0 \implies |z - z_0| \leqslant \alpha.$$

D'après (3),

$$\forall\, (t,z) \in [a,b] \times [z_0 - \alpha_0, z_0 + \alpha_0] \subset K_2, \quad \big|f(t,z)\big| \leqslant A \tag{16}$$

et d'après (4),

$$\forall\, (t,z) \in [x_0, y_0] \times [z_0 - \alpha_0, z_0 + \alpha_0], \quad \big|f(t,z) - f(t,z_0)\big| \leqslant \varepsilon. \tag{17}$$

► Nous appliquons maintenant l'astuce taupinale et l'inégalité triangulaire avec opiniâtreté. Quel que soit $(x,y,z) \in [a,b] \times [a,b] \times [z_0 - \alpha_0, z_0 + \alpha_0]$,

$$\begin{aligned} &\big|F(x,y,z) - F(x_0,y_0,z_0)\big| \\ &\qquad = \left| \left(\int_x^{x_0} f(t,z)\,dt + \int_{x_0}^{y_0} f(t,z)\,dt + \int_{y_0}^{y} f(t,z)\,dt \right) - \int_{x_0}^{y_0} f(t,z_0)\,dt \right| \\ &\qquad \leqslant \left| \int_x^{x_0} f(t,z)\,dt \right| + \left| \int_{x_0}^{y_0} f(t,z) - f(t,z_0)\,dt \right| + \left| \int_{y_0}^{y} f(t,z)\,dt \right| \\ &\qquad \leqslant A|x - x_0| + \left| \int_{x_0}^{y_0} f(t,z) - f(t,z_0)\,dt \right| + A|y - y_0| \qquad \text{(par (5))} \end{aligned}$$

car $[x \leftrightarrow x_0] \subset [a,b]$ et $[y \leftrightarrow y_0] \subset [a,b]$. et d'après (6),

$$\left| \int_{x_0}^{y_0} f(t,z) - f(t,z_0)\,dt \right| \leqslant |y_0 - x_0|\,\varepsilon \leqslant (b-a)\varepsilon.$$

► Si on impose *en outre* $|x - x_0| \leqslant \varepsilon/A$ et $|y - y_0| \leqslant \varepsilon/A$, c'est-à-dire

$$\max\big\{|x - x_0|,\ |y - y_0|\big\} \leqslant \underbrace{\min\{\alpha_0,\ \varepsilon/A\}}_{>0} \quad \text{et} \quad |z - z_0| \leqslant \alpha_0,$$

alors

$$\big|F(x,y,z) - F(x_0,y_0,z_0)\big| \leqslant (b - a + 2)\varepsilon.$$

Les réels a et b ayant été choisis **avant** ε, ce sont bien des *constantes* et cela prouve que F est continue au point (x_0, y_0, z_0).

Solution 48

Cas d'une limite finie

S'il existe un réel $R_0 > 0$ et une fonction

$$\varphi \,:\,]R_0, +\infty[\to \mathbb{R}$$

de limite nulle au voisinage de $+\infty$ et telle que

$$\begin{array}{l}\forall\, r \geqslant R_0,\\ \forall\, \theta \in \mathbb{R},\end{array} \qquad (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \in A \implies \big|f(x,y) - \ell\big| \leqslant \varphi(r)$$

alors la fonction f tend vers ℓ au voisinage de l'infini.

Cas d'une limite infinie

S'il existe un réel $R_0 > 0$ et une fonction

$$\psi \,:\,]R_0, +\infty[\to \mathbb{R}$$

qui tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$ et telle que

$$\begin{array}{l}\forall\, r \geqslant R_0,\\ \forall\, \theta \in \mathbb{R},\end{array} \qquad (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \in A \implies \big|f(x,y)\big| \geqslant \psi(r)$$

alors la fonction f tend vers l'infini au voisinage de l'infini.

✍ *On doit être conscient que l'étude de f au voisinage de l'infini signifie que la norme de la variable tend vers $+\infty$. Pour se représenter géométriquement la situation, on peut imaginer que la variable peut évoluer n'importe où dans l'ensemble de définition A en restant en dehors d'un disque arbitrairement grand.*

Nous avons choisi les coordonnées polaires à cause des expressions étudiées. On pourrait utiliser n'importe quelle autre norme sur $\mathbb{R}^2$ sans modifier les résultats obtenus. La seule règle est de choisir la norme en fonction de l'expression $f(x,y)$ étudiée.

1. Quel que soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\big|(x+y)e^{-(x^2+y^2)}\big| \leqslant \big(|x|+|y|\big)e^{-(x^2+y^2)} \leqslant 2re^{-r^2} = \varphi(r).$$

2. Quel que soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$x^4 + y^2 = r^2(r^2\cos^4\theta + \sin^2\theta).$$

❧ La fonction $\big[\theta \mapsto \cos^4\theta + \sin^2\theta\big]$ est continue et π-périodique, donc elle est bornée et atteint ses bornes (c'est comme si la fonction n'était définie que sur le compact $[0,\pi]$). Comme cette fonction ne s'annule pas (puisque $\cos\theta$ et $\sin\theta$ ne peuvent pas s'annuler simultanément), son minimum α est strictement positif.

❧ Pour $r \geqslant 1$, on a donc

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \qquad r^2 \underbrace{\cos^4\theta}_{\geqslant 0} + \sin^2\theta \geqslant 1\cdot\cos^4\theta + \sin^2\theta \geqslant \alpha > 0$$

et donc

$$\forall\, r \geqslant 1,\ \forall\, \theta \in \mathbb{R}, \qquad x^4 + y^2 \geqslant \alpha\, r^2 = \psi(r).$$

▶ La fonction $\big[\theta \mapsto 2\cos^4\theta + \sin^4\theta\big]$ est continue et π-périodique, donc elle est bornée et atteint ses bornes. Comme cette fonction ne s'annule pas, son minimum m_1 est strictement positif. *(Air connu)*

$$\forall\, r > 0,\ \forall\, \theta \in \mathbb{R}, \qquad 0 \leqslant \frac{x^2+y^2}{2x^4+y^4} \leqslant \frac{r^2}{m_1 r^4} = \frac{1}{m_1 r^2} = \varphi(r)$$

✍ *Pour les deux exemples suivants, il est important de remarquer que si l'une des coordonnées x ou y tend vers l'infini, alors le vecteur (x,y) tend aussi vers l'infini puisque*

$$\big\|(x,y)\big\| = r \qquad \textit{et} \qquad r \geqslant |x|, \quad r \geqslant |y|.$$

3. Si on se déplace sur l'axe des abscisses,

$$f(x,0) = 4x^2\,\ln|x| \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} +\infty$$

donc la fonction f n'est pas bornée au voisinage de l'infini.

Si on se déplace sur l'axe des ordonnées,

$$\forall\, y \neq 0, \qquad f(0,y) = 0$$

donc la fonction f ne tend pas vers $+\infty$ au voisinage de l'infini.

✍ *Utilisation habituelle du Théorème de composition des limites pour prouver qu'une fonction ne tend pas vers une valeur donnée.*

4. Déplaçons-nous sur la courbe d'équation $x^2y = 1$, qui est clairement contenue dans l'ensemble de définition de f.

$$[x^2y = 1] \subset A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$$

Dans ce cas,

$$\forall\, x \neq 0, \quad f(x,y) = f\left(x, \frac{1}{x^2}\right) = 1 + \frac{4}{x^2}\ln^2 x$$

expression qui tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Par conséquent, la fonction f ne tend pas vers $+\infty$ au voisinage de l'infini.

5.

✍ *On rappelle qu'une* ***forme quadratique*** *sur $\mathbb{R}^3$ est une fonction q définie par la relation*

$$\forall\, u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \qquad q(u) = u^\top.H.u$$

où H est une matrice symétrique réelle. Cette forme quadratique est ***définie positive*** *lorsque les valeurs propres de H sont toutes strictement positives.*

D'après le Théorème spectral, il existe une matrice orthogonale P et trois réels

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$$

tels que

$$P^\top.H.P = \mathrm{Diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \overset{\text{not.}}{=} \Delta$$

et donc

$$\forall\, u \in \mathbb{R}^3, \qquad q(u) = u^\top.P.\Delta.P^\top.u = (P^\top.u)^\top.\Delta.(P^\top.u).$$

En notant

$$P^\top.u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \qquad \text{on a} \qquad q(u) = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

et on en déduit que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} q(u) = \lambda_1 a^2 + \underbrace{\lambda_2}_{\geqslant\lambda_1}\underbrace{b^2}_{\geqslant 0} + \underbrace{\lambda_3}_{\geqslant\lambda_1}\underbrace{c^2}_{\geqslant 0} &\geqslant \lambda_1(a^2+b^2+c^2) \\ &= \lambda_1 (P^\top.u)^\top (P^\top.u) = \lambda_1 u^\top.u \\ &= \underbrace{\lambda_1}_{>0} \|u\|^2 = \psi(u) \end{aligned}$$

ce qui prouve que q tend vers $+\infty$ lorsque u tend vers l'infini (= lorsque $\|u\|$ tend vers $+\infty$).

Solution 49

La fonction est continue sur $\mathbb{R}^2$ privé de l'origine en tant que fonction rationnelle dont l'unique pôle est $O = (0,0)$.

❧ Pour tout $x \neq 0$,

$$f(x,x) = \frac{x^2}{2x^4} = \frac{1}{2x^2}.$$

Lorsque la coordonnée x tend vers 0, le point $M = (x,x)$ tend vers O (puisque $\|\mathbf{OM}\|_\infty = |x|$ tend vers 0) et $f(x,x)$ tend vers $+\infty$. Donc la fonction f n'est pas bornée au voisinage de O.

❧ Pour tout $x \neq 0$, on a aussi $f(x,0) = 0$. Lorsque la coordonnée x tend vers 0, le point $N = (x,0)$ tend vers O (puisque $\|\mathbf{ON}\|_\infty = |x|$ tend vers 0) et $f(x,0)$ reste bornée (et même constante), donc la fonction f ne tend pas vers $+\infty$ au voisinage de O.

Solution 50

1. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ en tant que fonction rationnelle dont l'unique pôle est l'origine O.

✍ *L'ensemble de définition U est un ouvert en tant que complémentaire du fermé $\{O\}$ (tout singleton et, plus généralement, tout ensemble fini est fermé).*

Plus généralement encore, toute fonction rationnelle est définie sur un ouvert car l'ensemble de ses pôles est un fermé. En effet, une fonction rationnelle s'exprime sous la forme

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{P(x_1, \dots, x_n)}{Q(x_1, \dots, x_n)}$$

où P et Q sont des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^n$.

En tant que fonctions polynomiales, P et Q sont des applications continues sur $\mathbb{R}^n$ et l'ensemble des pôles de f :

$$\pi(f) = [Q(x_1, \dots, x_n) = 0]$$

est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$ en tant qu'image réciproque du fermé $\{0\} \subset \mathbb{R}$ par l'application continue Q.

L'ensemble de définition de f est donc ouvert en tant que complémentaire d'une partie fermée :

$$U = [\pi(f)]^c$$

et f est continue sur U en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule en aucun point de U.

Pour $h = (x, y) \neq O$, en coordonnées polaires (c'est-à-dire en munissant $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne canonique),

$$\big|f(O + h)\big| = \big|f(x, y)\big| = r\,|\cos^3\theta - \sin^3\theta| \leqslant 2r = 2\|h\|.$$

Cela prouve bien que $f(h) = \mathcal{O}(h)$ au voisinage de O.

En particulier, cela implique que $f(h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers O et qu'on peut donc prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ en posant

$$f(O) = 0.$$

2. L'hypothèse faite sur f signifie que f, une fois prolongée par continuité, serait différentiable au point O et que φ serait son application linéaire tangente.

$$df(O) = \varphi$$

On sait alors que

$$\varphi(1, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \quad \text{et} \quad \varphi(0, 1) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).$$

Or, pour tout $x \neq 0$ et pour tout $y \neq 0$,

$$\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = -1$$

donc f admet des dérivées partielles au point O avec

$$\frac{\partial f}{\partial x}(O) = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(O) = -1.$$

Donc, **si** f est différentiable au point O, alors

$$\mathfrak{Mat}_{\text{can}}\big(df(O)\big) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \varphi(x, y) = x - y.$$

❧ Pour $(x, y) \neq O$,

$$f(x, y) - \varphi(x, y) = \frac{x^2 y - x y^2}{x^2 + y^2} = r \cdot \underbrace{\sin\theta \cos\theta (\cos\theta - \sin\theta)}_{\text{expression bornée}}.$$

Il est donc clair que

$$f(O + h) = f(O) + \varphi(h) + \mathcal{O}(h)$$

lorsque h tend vers 0.

Cependant, le quotient

$$\frac{\big|f(h)-\varphi(h)\big|}{\|h\|}$$

est **indépendant de** $r=\|h\|$ sans être identiquement nul (on peut prendre $\theta=\pi/6$ ou $\theta=-\pi/4$ par exemple), donc ce quotient ne tend pas vers 0 lorsque r tend vers 0.

Par conséquent, $f(h)-\varphi(h)\neq o(h)$, ce qui prouve que f *n'est pas* différentiable au point O (bien que f soit continue au point O et admette des dérivées partielles en ce point — ce sont les dérivées partielles de f qui ne sont pas continues au point O).

Solution 51

1. La norme considérée par l'énoncé est bien une norme sur $E=\mathbb{R}_2[X]$: il s'agit de la norme produit associée à la base canonique de E !

$$\|P\|=\big\|\mathfrak{Mat}_{can}(P)\big\|_\infty$$

Dans le même ordre d'idée, les trois applications coordonnées

$$\varepsilon_2=\big[P=aX^2+bX+c\mapsto a\big]\qquad \varepsilon_1=[P\mapsto b]\qquad \varepsilon_0=[P\mapsto c]$$

sont linéaires et (donc) continues sur E, espace de dimension finie.

❧ Le noyau de la première forme coordonnée :

$$[\varepsilon_2(P)=0]=[a=0]$$

est un fermé de E (en tant que noyau d'une forme linéaire continue).

L'ensemble U des polynômes de degré 2 (dont le degré est *exactement égal* à 2) est, par définition, le complémentaire de $[\varepsilon_2(P)=0]$:

$$U=[\varepsilon_2(P)\neq 0]=[\varepsilon_2(P)=0]^c$$

et U est donc un ouvert de E.

▶ Soit $P=aX^2+bX+c$, un polynôme de E.
Si $a\neq 0$, alors $P\in U$.
Si $a=0$, alors $P\notin U$ et on pose alors

$$\forall\, n\geqslant 1,\quad P_n=\frac{1}{n}X^2+bX+c\in U.$$

On a ainsi défini une suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de U qui converge vers P :

$$\|P-P_n\|=\Big\|\frac{1}{n}X^2\Big\|=\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

Donc l'ouvert U est bien dense dans E.

▶ Les polynômes $A=X^2$ et $B=-X^2$ appartiennent tous les deux à U.
S'il existe une application *continue* $f:[0,1]\to E$ telle que

$$f(0)=A,\quad f(1)=B\quad\text{et}\quad\forall\, t\in[0,1],\quad f(t)\in U$$

alors la fonction

$$(\varepsilon_2\circ f):[0,1]\to\mathbb{R}$$

est continue (en tant que composée d'applications continues) sur l'intervalle $[0,1]$, strictement positive en $t=0$ (car $\varepsilon_2(A)=+1$) et strictement négative en $t=1$ (car $\varepsilon_2(B)=-1$). D'après le *Théorème des valeurs intermédiaires*, il existe donc un instant $t_0\in\,]0,1[$ tel que

$$(\varepsilon_2\circ f)(t_0)=0$$

c'est-à-dire $f(t_0)\notin U$: c'est absurde !

Donc l'ouvert U n'est pas connexe par arcs.

✍ *L'ouvert U est l'union de deux composantes connexes par arcs :*

$$U=[a>0]\sqcup[a<0].$$

En effet, si $A=a_1X^2+b_1X+c_1$ et $B=a_2X^2+b_2X+c_2$ avec $a_1>0$ et $a_2>0$, alors la fonction affine *définie par*

$$\begin{aligned}\forall\, t\in[0,1],\quad f(t)&=(1-t)A+tB\\&=\big[(1-t)a_1+ta_2\big]X^2+\big[(1-t)b_1+tb_2\big]X+\big[(1-t)c_1+tc_2\big]\end{aligned}$$

est continue, elle vérifie $f(0) = A$ *et* $f(1) = B$ *et*

$$\forall\, t \in [0,1], \quad (\varepsilon_2 \circ f)(t) = (1-t)a_1 + ta_2 \in [a_1 \leftrightarrow a_2] \subset \mathbb{R}_+^*.$$

On vient en fait de démontrer que les deux composantes connexes par arcs de U *sont des parties convexes !*
Idem si a_1 *et* a_2 *sont strictement négatifs.*

2. a. L'application

$$\left[P \mapsto b^2 - 4ac\right]$$

est une fonction continue sur E en tant que fonction polynomiale des coordonnées.

Le discriminant Δ est donc une fonction continue en tant que restriction à l'ouvert U d'une application continue sur E.

✍ *Le discriminant n'est défini que sur* U*, pas sur* E *tout entier !*

2. b. Par définition de Δ,

$$F \overset{\text{not.}}{=} \left[\Delta(P) = 0\right] = [b^2 - 4ac = 0] \cap U.$$

La partie $[b^2 - 4ac = 0]$ est un fermé de E en tant qu'image réciproque du fermé $\{0\}$ par une application continue (fonction polynomiale des coordonnées), donc F est un fermé relatif à U.

► Mais F n'est pas un fermé de E ! Considérons les polynômes définis pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$P_n = 2^{-n}X^2.$$

Il est clair qu'il s'agit d'une suite d'éléments de F et que cette suite converge vers le polynôme nul :

$$\|P_n - 0\| = 2^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

alors que le polynôme nul n'appartient pas à F. La partie F n'est donc pas stable par passage à la limite.

2. c. On considère un point $P_0 \in F$ et V, un voisinage relatif à U de ce point. Il existe donc un rayon $r_0 > 0$ tel que

$$\left[\|P - P_0\| \leqslant r_0\right] \cap U \subset V.$$

Comme U est un ouvert, si le rayon $r_0 > 0$ est choisi assez petit, on a

$$\left[\|P - P_0\| \leqslant r_0\right] \subset U$$

et donc

$$\left[\|P - P_0\| \leqslant r_0\right] \subset V.$$

Si on note $P_0 = a_0^2 + b_0X + c_0$, on sait que

$$a_0 \neq 0 \quad \text{et que} \quad b_0^2 - 4a_0c_0 = 0$$

(par définition de $P_0 \in F$). Il est alors clair que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad b_0^2 - 4a_0(c_0 + 2^{-n}) = -2^{-n+2}a_0 \neq 0$$

et donc que

$$Q_n = a_0X^2 + b_0X + (c_0 + 2^{-n}) \notin F$$

alors que

$$Q_n \in U \qquad \text{et} \qquad \|Q_n - P_0\| = 2^{-n}$$

ce qui signifie que $Q_n \in V$ pour tout n assez grand.

En clair : si $P_0 \in F$, on a trouvé une suite de polynômes (Q_n) qui converge vers P_0 alors qu'aucun de ces polynômes n'appartient à F.

En VO : tout voisinage relatif à U d'un polynôme $P_0 \in F$ rencontre F^c, c'est-à-dire : F est une partie d'intérieur vide relativement à U.

✍ *Il faut faire le parallèle avec* $\mathbb{Q}$ *et* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *! L'ensemble* $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$ *et d'intérieur vide, puisque tout voisinage d'un nombre* $x_0 \in \mathbb{Q}$ *contient des irrationnels.*

Solution 52

La fonction F est naturellement définie sur $\mathbb{R}^2$ privé de la diagonale $\Delta = [y = x]$ et comme f est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction F est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ en tant que quotient de la différence des fonctions continues

$$(x,y) \overset{\text{lin.}}{\longmapsto} x \overset{\text{cont.}}{\longmapsto} f(x) \quad \text{et de} \quad (x,y) \longmapsto y \longmapsto f(y)$$

par la fonction linéaire (ou polynomiale)

$$(x,y) \longmapsto x - y$$

qui ne s'annule pas sur la diagonale Δ.

► Le prolongement de F à $\mathbb{R}^2$ défini par l'énoncé est le plus naturel qui soit. En effet, quel que soit $x \in \mathbb{R}$ *fixé*,

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \xrightarrow[y \to x]{} f'(x)$$

puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}$, ce qui prouve que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{y \to x} F(x,y) = F(x,x), \tag{18}$$

condition minimale pour que F soit continue sur $\mathbb{R}^2$.

Il reste à prouver que ce prolongement est bien continu sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire (compte tenu de ce qui précède) continu en chaque point (x_0, x_0) de la diagonale Δ.

✍ *La propriété (1) n'indique qu'une "continuité partielle" de la fonction F, puisqu'une seule variable varie (y), l'autre variable étant fixée (x est fixée par le quantificateur).*

NB : La "continuité partielle" n'a pas de sens mathématique, c'est juste une façon imagée de parler.

► **Première méthode**

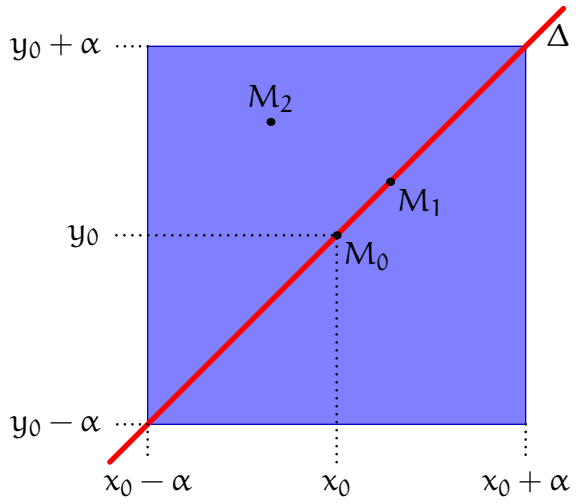
Fixons $x_0 \in \mathbb{R}$, le point $M_0 = (x_0, x_0)$ sur la diagonale et une tolérance $\varepsilon > 0$. Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], \qquad \left|f'(x) - f'(x_0)\right| \leqslant \varepsilon. \tag{19}$$

▷ Considérons maintenant un point $M = (x,y)$, distinct de M_0, tel que

$$\|\mathbf{M_0M}\|_\infty \leqslant \alpha.$$

On doit distinguer deux cas : ou bien M est sur la diagonale (cas M_1), ou bien M n'est pas sur la diagonale (cas M_2).



▷ Si $x = y$, alors

$$\left|F(x,y) - F(x_0,x_0)\right| = \left|f'(x) - f'(x_0)\right| \leqslant \varepsilon$$

par (2), car $|x - x_0| \leqslant \alpha$.

▷ Si $x \neq y$, alors (Thm des accroissements finis) il existe

$$c \in [x \leftrightarrow y] \subset [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$$

tel que $F(x,y) = f'(c)$ et par conséquent, à nouveau par (2),

$$\big|F(x,y) - F(x_0,x_0)\big| = \big|f'(x) - f'(x_0)\big| \leqslant \varepsilon$$

car $|c - x_0| \leqslant \alpha$.

▷ *Dans les deux cas,* on a bien

$$\big|F(x,y) - F(x_0,y_0)\big| \leqslant \varepsilon.$$

▷ On a donc démontré qu'il existait un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, M \in \mathbb{R}^2, \quad \|\mathbf{M_0M}\|_\infty \leqslant \alpha \implies \big|F(M) - F(M_0)\big| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui prouve que F est continue au point $M_0 = (x_0,y_0)$, quel que soit $x_0 \in \mathbb{R}$, et donc que F est bien continue sur $\mathbb{R}^2$.

► **Variante savante**

Pour $x = y$,

$$\int_0^1 f'\big(x + t(y-x)\big)\,dt = \int_0^1 f'(x)\,dt = f'(x).$$

Pour $x \neq y$, on effectue le changement de variable affine

$$u = x + t(y-x) = (1-t)x + ty$$

et on trouve

$$\int_0^1 f'\big(x + t(y-x)\big)\,dt = \frac{1}{y-x}\int_x^y f'(u)\,du = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

Donc, quel que soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$F(x,y) = \int_0^1 f'\big(x + t(y-x)\big)\,dt.$$

✍ *Évidemment, c'est un début assez siouxx ! L'avantage est de disposer maintenant d'une expression* unique *pour* F.

▷ Il nous reste à vérifier les hypothèses du théorème de continuité des intégrales fonctions d'un paramètre.

❧ Quel que soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, la fonction

$$[t \mapsto f'(x + t(y-x))]$$

est continue sur le segment $[0,1]$, donc intégrable sur $[0,1]$.

❧ Quel que soit $t \in [0,1]$, la fonction

$$[(x,y) \mapsto f'(x + t(y-x))]$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$, comme composée de fonctions continues.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\text{lin.}} & \mathbb{R} & \xrightarrow{\mathscr{C}^0} & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x + t(y-x) & \longmapsto & f'(x + t(y-x)) \end{array}$$

❧ Restreinte à un segment $[-a,a]$, la fonction f' est bornée (puisqu'elle est continue), donc il existe une constante $A > 0$ telle que

$$\forall\, t \in [0,1],\ \forall\, (x,y) \in [-a,a]\times[-a,a], \quad \big|f'\big(\underbrace{x + t(y-x)}_{\in[-a,a]}\big)\big| \leqslant A.$$

❧ D'après le Théorème de convergence dominée (version "convergence bornée"), la fonction

$$F = \left[(x,y) \mapsto \int_0^1 f'\big(x + t(y-x)\big)\,dt\right]$$

est continue sur tout compact de la forme $[-a,a]\times[-a,a]$.

▷ Comme la continuité est une propriété locale, la fonction F est continue sur

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{a>0} [-a,a]\times[-a,a].$$

Solution 53

On suppose que la matrice A possède r valeurs propres deux à deux distinctes :

$$\mathrm{Sp}(A) = \{\mu_1, \dots \mu_r\}.$$

❧ Si $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$, alors $A - 0.I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$: on peut donc choisir $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et la suite (constante !) de matrices inversibles

$$(A - \lambda_k.I_n)_{k\in\mathbb{N}}$$

converge vers A.

❧ Si $0 \in \mathrm{Sp}(A)$, on pose

$$r = \min_{\substack{\mu\in\mathrm{Sp}(A)\\ \mu\neq 0}} |\mu| > 0 \quad \text{et} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \lambda_k = \frac{r}{k+1}.$$

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$\lambda_k \notin \mathrm{Sp}(A), \quad \text{donc} \quad A - \lambda_k.I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

et comme

$$\big\|A - (A - \lambda_k.I_n)\big\| = |\lambda_k|\,\|I_n\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0,$$

la suite de matrices inversibles

$$(A - \lambda_k.I_n)_{k\in\mathbb{N}}$$

converge vers A.

❧ On a ainsi démontré que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ était dense dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ (quelle que soit la norme choisie, bien entendu).

Solution 54

1. Comme $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace de dimension finie, toutes les normes sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont équivalentes et en particulier la norme N est équivalente à la norme produit $\|\cdot\|_\infty$. Il existe donc deux réels $0 < a < b$ tels que

$$\forall\, A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \qquad a\|A\|_\infty \leqslant N(A) \leqslant b\|A\|_\infty.$$

Il suffit donc de trouver une matrice diagonalisable T telle que

$$\|T - T_0\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{b}$$

pour conclure.

❧ On sait qu'une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ qui possède n valeurs propres distinctes est diagonalisable et que les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux.

✍ *L'idée consiste donc à* perturber *les coefficients diagonaux de T_0 (= leur ajouter de petites quantités), et* seulement *les coefficients diagonaux de T_0, pour obtenir une matrice T triangulaire dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts.*

$$T_0 = \begin{pmatrix} \mu_1 & \star & \star \\ 0 & \ddots & \star \\ 0 & 0 & \mu_n \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} \mu_1 + \alpha_1 & \star & \star \\ 0 & \ddots & \star \\ 0 & 0 & \mu_n + \alpha_n \end{pmatrix}$$

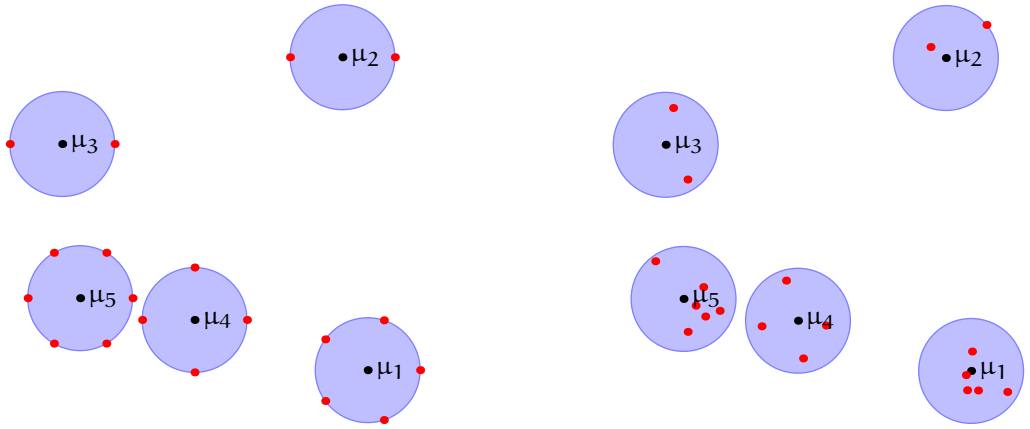
Avec les notations ci-dessus,

$$\|T - T_0\|_\infty = \max\{|\alpha_1|, \dots, |\alpha_n|\}.$$

❧ Il y a une manière simple d'obtenir une matrice T comme on la souhaite :
- on entoure chaque valeur propre d'un cercle de rayon assez petit pour que les différents cercles soient deux à deux distincts ;
- on place sur le cercle des complexes régulièrement espacés (à la manière des racines de l'unité) selon la multiplicité de chaque valeur propre.

✍ *On peut obtenir un résultat analogue de manière plus rock'n'roll : si μ_k est une valeur propre de multiplicité m_k, on peut choisir m_k points au hasard dans le disque centré en μ_k. Statisquement, on est presque sûr d'obtenir des valeurs propres deux à deux distinctes.*

✍ *Sur la figure de gauche, les valeurs propres sont régulièrement espacées sur des cercles ; sur la figure de droite, elles sont prises au hasard dans des disques.*



Sur cet exemple, les multiplicités respectives sont

$$m_1 = 5, \quad m_2 = m_3 = 2, \quad m_4 = 4, \quad m_5 = 6$$

donc $T_0 \in \mathfrak{M}_{19}(\mathbb{C})$ *(la taille de la matrice est la somme des multiplicités).*

❧ Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, les valeurs propres sont sur la droite réelle et il suffit alors de remplacer les disques par des segments. Il n'est pas compliqué de placer m_k points deux à deux distincts sur un segment donné, qu'ils soient placés aléatoirement ou régulièrement, quelle que soit la multiplicité m_k. Donc : ça marche aussi.

2. Quelle que soit la matrice inversible P, l'application

$$\left[M \mapsto P^{-1}MP\right]$$

est linéaire et donc continue puisque $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace de dimension finie.

Idem pour $\left[M \mapsto PMP^{-1}\right]$ pour les mêmes raisons !

3. On choisit une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs et de limite nulle. Pour chaque indice $n \in \mathbb{N}$, on choisit une matrice diagonalisable T_n telle que $N(T - T_n) \leqslant \varepsilon_n$.

Donc toute matrice triangulaire est limite d'une suite de matrices diagonalisables.

❧ Soit enfin une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Comme il s'agit d'une matrice complexe, elle est semblable à une matrice triangulaire : il existe une matrice inversible P et une matrice triangulaire T telles que

$$P^{-1}AP = T.$$

Étant donnée une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices diagonalisables qui converge vers T, on pose

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A_n = PT_nP^{-1}.$$

▶ Comme les matrices A_n et T_n sont semblables et que les T_n sont diagonalisables, alors les matrices A_n sont diagonalisables.

▶ Comme la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice T et que la fonction $f = \left[M \mapsto PMP^{-1}\right]$ est continue, on déduit du théorème de composition des limites que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f(T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $A = f(T)$.

▶ Conclusion : toute matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrices diagonalisables, donc les matrices diagonalisables sont denses dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

✍ *Ce résultat est faux pour les matrices réelles (parce qu'une matrice réelle n'est pas forcément triangularisable).*

Solution 55

Comme E est un espace vectoriel de dimension finie, la sphère unité S^1 de E est compacte.

✍ *Toutes les parties compactes sont fermées et bornées. Dans un espace vectoriel* ***de dimension finie****, la réciproque est vraie : toute partie fermée et bornée est compacte.*

▶ Comme l'application $f : E \to E$ est continue, l'application $\|f\| : E \to \mathbb{R}$ est continue et atteint un minimum sur le compact S^1 :

$$\exists\, u_0 \in S^1,\ \forall\, u \in S^1, \quad \left\|f(u)\right\| \geqslant \left\|f(u_0)\right\|.$$

✍ *On rappelle que, pour toute norme N sur E, l'application N est lipschitzienne de (E,N) dans $(\mathbb{R},|\cdot|)$ (conséquence de l'inégalité triangulaire).*

► On pose $\alpha = \big\|f(u_0)\big\| \in \mathbb{R}_+$.
Pour tout $x \in E$ *non nul*, par linéarité de f et absolue homogénéité de $\|\cdot\|$,

$$\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \Big\| f\Big(\underbrace{\frac{x}{\|x\|}}_{\in S^1}\Big)\Big\| \geqslant \alpha.$$

On en déduit que

$$\big\|f(x)\big\| \geqslant \alpha\|x\|,$$

propriété qui est évidemment vraie pour $x = 0_E$ aussi.

► Supposons que $\alpha > 0$.
Si $f(x) = 0_E$, alors

$$0 = \|0_E\| = \big\|f(x)\big\| \geqslant \alpha\|x\| \geqslant 0$$

et comme $\alpha > 0$, alors $\|x\| = 0$ et donc $x = 0_E$. Cela prouve que l'application linéaire f est injective.

▷ Réciproquement, supposons que f soit injective. Comme $f(0_E) = 0_E$ et que la sphère unité S^1 ne contient pas le vecteur nul, l'application f ne s'annule en aucun point de S^1. En particulier, $f(u_0) \neq 0_E$ et donc

$$\alpha = \big\|f(u_0)\big\| > 0.$$

▷ Donc : l'application linéaire f est injective si, et seulement si, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, x \in E, \qquad \big\|f(x)\big\| \geqslant \alpha\|x\|.$$

► Dans ce cas, le théorème de comparaison nous dit que : si $\|x\|$ tend vers $+\infty$, alors $\|f(x)\|$ tend aussi vers $+\infty$.
Autrement dit, $f(x)$ tend vers l'infini lorsque x tend vers l'infini.

Solution 56

1. La dérivation D est l'endomorphisme caractérisé par

$$D(1) = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, 1 \leqslant k \leqslant d, \quad D(X^k) = k.X^{k-1}$$

donc, pour tout $P \in \mathbb{R}_d[X]$,

$$\begin{aligned}\|D(P)\|_\infty &= \Big\| \sum_{k=1}^{d} k a_k X^{k-1} \Big\|_\infty \\ &= \max\{k|a_k|,\ 1 \leqslant k \leqslant d\} \\ &\leqslant d \max\{|a_k|\ 1 \leqslant k \leqslant d\} \\ &\leqslant d\|P\|_\infty\end{aligned}$$

donc $|\!|D|\!| \leqslant d$.

❧ Par ailleurs, $\|D(X^d)\|_\infty = d\|X^d\|_\infty$, donc en fait

$$|\!|D|\!| = d.$$

✍ *Comme E est un espace de dimension finie, sa sphère unité S^1 est compacte et D, en tant qu'application linéaire continue sur E atteint un maximum sur S^1. Il existe donc un polynôme $P_0 \in E$ tel que*

$$\|P_0\|_\infty = 1 \quad \textit{et} \quad \|D(P_0)\|_\infty = |\!|D|\!|.$$

Ici, il a été facile de trouver que le monôme $P_0 = X^d$ convenait — ce n'est pas toujours le cas !

2. Les deux applications $[P \mapsto P]$ et $[P \mapsto P']$ sont linéaires sur $E = \mathbb{R}_d[X]$, espace vectoriel de dimension finie, donc elles sont continues toutes les deux.
Par conséquent, l'application

$$f = [P \mapsto (P, P')]$$

est continue de E dans $E \times E$.

✍ *L'application f est aussi* linéaire *de E dans $E \times E$.*

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\|X^2 - P_n\| = \|-2^{-n}X\| = 2^{-n}\|X\|$$
donc la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge bien vers X^2.

▶ Comme P_n est scindé à racines simples,
$$f(P_n) = P_n \wedge P_n' = 1$$
cependant que
$$f(X^2) = X^2 \wedge (2X) = X.$$

▶ On a donc trouvé une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que
$$\lim_{n\to+\infty} P_n = X^2 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} f(P_n) = 1 \neq f(X^2),$$
ce qui prouve que l'application f *n'est pas* continue (Théorème de composition des limites).

✍ *L'application f (faut-il le préciser ?) n'est pas linéaire !*

Solution 57

Tout d'abord, pour tout $x \in [0,1]$, l'application
$$\begin{array}{ccccc} [0,1] & \longrightarrow & [0,1]\times[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$
est continue (composée de fonctions continues) sur le segment $[0,1]$ (compact), donc cette application est bornée et atteint ses bornes. Par conséquent, le maximum $g(x)$ est bien défini.

❧ Fixons $\varepsilon > 0$ et $x_0 \in [0,1]$. Il existe au moins un réel $y_0 \in [0,1]$ tel que
$$g(x_0) = f(x_0,y_0) = \max_{y\in[0,1]} f(x_0,y). \tag{†}$$

La fonction f est uniformément continue, car continue sur le compact $[0,1]\times[0,1]$ (Théorème de Heine).

✍ *Un segment, comme $[0,1]$, est une partie compacte de $\mathbb{R}$ et tout produit de parties compactes de $\mathbb{R}$ est une partie compacte de l'espace produit $\mathbb{R}^2$.*

Il existe donc un réel $\alpha > 0$ tel que
$$\forall\,(x,y),(x',y') \in [0,1]\times[0,1], \quad \big\|(x',y')-(x,y)\big\|_\infty \leqslant \alpha \implies \big|f(x',y')-f(x,y)\big| \leqslant \varepsilon.$$
En particulier,
$$\forall\, x \in [x_0-\alpha, x_0+\alpha],\ \forall\, y \in [0,1], \quad \big|f(x,y)-f(x_0,y)\big| \leqslant \varepsilon. \tag{‡}$$

❧ On déduit en particulier de (‡) et de (†) que
$$\forall\, x \in [x_0-\alpha, x_0+\alpha],\ \forall\, y \in [0,1], \quad f(x,y) \leqslant f(x_0,y)+\varepsilon \leqslant g(x_0)+\varepsilon.$$
Le majorant étant indépendant de $y \in [0,1]$, on peut passer à la borne supérieure, ce qui nous donne :
$$\forall\, x \in [x_0-\alpha, x_0+\alpha], \quad g(x) = \sup_{y\in[0,1]} f(x,y) \leqslant g(x_0)+\varepsilon. \tag{⋆}$$

❧ On déduit également de (‡) et de (†) que
$$\forall\, x \in [x_0-\alpha, x_0+\alpha],\ \forall\, y \in [0,1], \quad f(x_0,y)-\varepsilon \leqslant f(x,y).$$
La borne supérieure est un majorant, donc
$$\forall\, x \in [x_0-\alpha, x_0+\alpha],\ \forall\, y \in [0,1], \quad f(x_0,y)-\varepsilon \leqslant \sup_{t\in[0,1]} f(x,t) = g(x)$$
et comme le majorant est indépendant de $y \in [0,1]$, on en déduit en passant à la borne supérieure que
$$\forall\, x \in [x_0-\alpha, x_0+\alpha], \quad g(x_0)-\varepsilon = \sup_{y\in[0,1]} f(x_0,y)-\varepsilon \leqslant g(x). \tag{⋆⋆}$$

❧ On a ainsi démontré avec (⋆) et (⋆⋆) que
$$\forall\, x \in [x_0-\alpha, x_0+\alpha], \qquad \big|g(x)-g(x_0)\big| \leqslant \varepsilon.$$
L'application g est donc bien continue sur $[0,1]$.

Solution 58

Supposons que que $A \subset E$ soit à la fois ouverte et fermée et que $A \neq \varnothing$.

✍ *Pour démontrer une **alternative**, on suppose qu'une des deux conclusions est fausse et on démontre que l'autre conclusion est nécessairement vraie.*

❧ Nous allons démontrer que l'indicatrice de A est une fonction continue de E dans $\mathbb{R}$. Cette indicatrice sera notée f :

$$\forall\, x \in E, \qquad f(x) = \mathbb{1}_A(x) = \left| \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{array} \right.$$

✍ *Par définition, une application $f : E \to F$ est continue sur E si, et seulement si, elle est continue en chaque point x_0 de E.*

Soient $x_0 \in E$ et $\varepsilon > 0$.

► Si $x_0 \in A$, alors A est un voisinage de x_0 (puisque A est une partie ouverte) et

$$\forall\, x \in A, \quad \big|f(x) - f(x_0)\big| = |1 - 1| \leqslant \varepsilon.$$

► Si $x_0 \notin A$, alors A^c est un voisinage de x_0 (puisque A^c est le complémentaire d'une partie fermée et que A^c contient x_0) et

$$\forall\, x \in A^c, \quad \big|f(x) - f(x_0)\big| = |0 - 0| \leqslant \varepsilon.$$

❧ On a ainsi démontré que, pour tout $x_0 \in E$, il existait un voisinage V de x_0 tel que

$$\forall\, x \in V, \qquad \big|f(x) - f(x_0)\big| \leqslant \varepsilon$$

et donc que f était bien continue en chaque point x_0 de E.

❧ Comme E est connexe par arcs, on déduit du Théorème des valeurs intermédiaires que $f_*(E)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

✍ *Tout espace vectoriel est convexe et en particulier connexe par arcs.*
La version générale du Théorème des valeurs intermédiaires affirme que l'image d'une partie connexe par arcs de E par une application continue $f : E \to F$ est une partie connexe par arcs de F. On doit savoir que les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles (de quelque type que ce soit).

Comme $A \neq \varnothing$, alors l'indicatrice de A prend au moins une fois la valeur 1.
Et comme l'image de l'indicatrice est, par construction, contenue dans $\{0;1\}$, on en déduit que $f_*(E)$ est un intervalle I tel que

$$\{1\} \subset I \subset \{0;1\}.$$

Par conséquent, $I = \{1\}$, ce qui signifie que $A = E$.

Solution 59

1. Toute suite convergente est bornée : il existe $r > 0$ tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \|u_n\| \leqslant r$$

et par passage à la limite,

$$\|\ell\| \leqslant r.$$

Par conséquent, la partie K est contenue dans la boule de centre 0_E et de rayon r.

✍ *Dans un espace vectoriel, une partie est bornée si, et seulement si, elle est contenue dans une boule centrée à l'origine.*

2. Si le cardinal de K est fini, alors K est compact.

✍ *Toute partie finie d'un espace vectoriel normé est compacte. En effet, en supposant que*

$$K = \{a_1, \ldots, a_r\}$$

(où les a_r sont des vecteurs deux à deux distincts de E) et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de K, alors il existe une suite extraite $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ constante et cette constante est une valeur d'adhérence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

❧ On suppose dorénavant que K est une partie infinie.

On peut alors définir une énumération injective des valeurs de la suite u :

$$\{u_n,\ n\in\mathbb{N}\}=\big\{a_k,\ k\in\mathbb{N}\big\}\cup\{\ell\}$$

en posant $a_0=u_0$ et, pour tout $k\geqslant 1$,

$$a_k=u_{\varphi(k)}\quad\text{où}\quad\varphi(k)=\min\big\{n\in\mathbb{N}\ :\ u_n\notin\{a_0,\dots,a_{k-1}\}\big\}.$$

✍ *Autrement dit, si $x\in E$ est la valeur d'un terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors*

$$\varphi(k)=\min\{n\in\mathbb{N}\ :\ u_n=x\}.$$

On considère maintenant une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constituée d'éléments de K :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\qquad v_n\in\{a_k,\ k\in\}\cup\{\ell\}.$$

❧ S'il existe une infinité d'indices $n\in\mathbb{N}$ tels que $v_n=\ell$, alors il existe une suite extraite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est constamment égale à ℓ. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède donc une suite extraite qui converge vers un élément de K.

❧ On suppose dorénavant qu'il n'existe qu'un nombre fini d'indices $n\in\mathbb{N}$ tels que $v_n=\ell$.

✍ *Comme ℓ est la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il est possible que tous les termes de cette suite soient distincts de ℓ, mais ce n'est pas nécessaire !*

Quitte à considérer une suite extraite, on peut même supposer que

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\qquad v_n\neq\ell.$$

❧ Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne compte qu'un nombre fini de termes distincts, alors il existe (au moins) une suite extraite constante (cf. plus haut).

On suppose dorénavant que l'ensemble $\{v_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ est une partie infinie de E qui ne contient pas le vecteur ℓ.

❧ L'énumération φ définie plus haut est une application injective (*strictement* croissante) de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, le terme v_n appartient à l'ensemble

$$V=\{v_n,\ n\in\mathbb{N}\}\subset\{u_n,\ n\in\mathbb{N}\}=\{a_k,\ k\in\mathbb{N}\},$$

donc il existe un entier $k\in\mathbb{N}$ tel que $v_n=u_{\varphi(k)}$ et cet entier k est unique (injectivité de φ). Il existe donc une application $\theta:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ telle que

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\qquad v_n=u_{\varphi\circ\theta(n)}.$$

❧ Comme il existe une infinité de termes v_n distincts, la fonction θ prend une infinité de valeurs distinctes (dans $\mathbb{N}$!) et on peut donc considérer une suite extraite

$$(v_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}=\big(u_{\varphi\circ(\theta\circ\psi)(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

telle que la suite d'indices

$$\big((\theta\circ\psi)(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

soit strictement croissante.

Dans ces conditions, la suite extraite $(v_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (puisque $\varphi\circ(\theta\circ\psi)$ est une composée d'applications strictement croissantes) et converge donc vers ℓ.

On a démontré que, dans ce dernier cas également, il existait une suite extraite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergeait vers un vecteur de K.

❧ On a ainsi démontré que K était une partie compacte de E.

✍ *Il n'est pas beaucoup plus simple de démontrer que K est une partie fermée (= stable par passage à la limite) et comme on n'a pas fait d'hypothèse sur la dimension de E, cela ne permet pas de conclure à la compacité de K.*

Solution 60

1. a. Les parties K_n sont compactes, donc ce sont des parties fermées.
Une intersection (quelconque) de parties fermées est une partie fermée, donc K_∞ est une partie fermée de E.
Par monotonie décroissante,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad K_\infty \subset K_{n+1} \subset K_n \leqslant K_0.$$

Toute partie fermée contenue dans une partie compacte est compacte. Comme K_∞ est une partie fermée contenue dans K_0 qui est une partie compacte, la partie K_∞ est bien compacte.
1. b. Supposons qu'aucun des compacts K_n ne soit vide. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe au moins un élément x_n dans K_n.

❧ Par monotonie décroissante,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad x_n \in K_n \subset K_0$$

et comme K_0 est compact, on peut extraire une suite $(x_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un élément ℓ de K_0.

❧ Fixons $n_0 \in \mathbb{N}$. À nouveau par monotonie décroissante,

$$\forall\, n \geqslant n_0, \qquad x_n \in K_n \subset K_{n_0}.$$

On sait que (propriété des extractrices)

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \varphi(k) \geqslant k.$$

Par conséquent,

$$\forall\, k \geqslant n_0, \qquad x_{\varphi(k)} \subset K_k \subset K_{n_0}.$$

Comme la sous-suite $(x_{\varphi(k)})_{k\geqslant n_0}$ converge vers ℓ (en tant que suite extraite d'une suite de limite ℓ) et que K_{n_0} est fermé (c'est une partie compacte), on en déduit que $\ell \in K_{n_0}$.
On a ainsi démontré que

$$\forall\, n_0 \in \mathbb{N}, \quad \ell \in K_{n_0}.$$

Autrement dit, la limite ℓ de la suite extraite appartient à K_∞, ce qui contredit l'hypothèse $K_\infty = \varnothing$.

❧ On a démontré par l'absurde que : si l'intersection K_∞ d'une suite décroissante de parties compactes $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était vide, alors seul un nombre *fini* de parties K_n n'étaient pas vides.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intervalle $A_n = [n, +\infty[$ est une partie fermée non vide de $\mathbb{R}$ et la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad A_{n+1} \subset A_n.$$

‖ *C'est clair : si* $x \in A_{n+1}$, *alors* $x \geqslant n+1 \geqslant n$, *donc* $x \in A_n$.

Cependant, l'intersection

$$A_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [n, +\infty[$$

est vide.

‖ *S'il existait un réel* $x_0 \in A_\infty$, *alors (définition de l'intersection)*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad x_0 \in A_n$$

c'est-à-dire

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad x_0 \geqslant n.$$

On sait bien que c'est impossible (en vertu de l'axiome qui énonce que le corps $\mathbb{R}$ *des nombres réels est* ***archimédien****).*

On a donc établi une propriété des parties compactes qui n'est pas vraie pour les parties fermées.

Solution 61

Soit B, le complémentaire de l'adhérence $\overline{A}$.

✍ *Il s'agit de vérifier que* B *est un voisinage de chacun de ses points.*

Soit $x_0 \in B$. Ce point x_0 n'est donc pas un point adhérent à A. En écrivant la négation de la définition des points adhérents, on voit qu'il existe un réel $r > 0$ tel que

$$B(x_0, r) \cap A = \varnothing, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad B(x_0, r) \subset A^c. \tag{$\star$}$$

✍ *Une figure nous permet de deviner que la boule ouverte* $B_o(x_0, r)$ *(qui est, comme son nom l'indique, une partie ouverte) est disjointe de l'adhérence de* A. *C'est ce que nous allons maintenant démontrer.*

Soit $y \in B_o(x_0, r)$. Comme la boule ouverte $B_o(x_0, r)$ est une partie ouverte qui contient y, c'est un voisinage de y, donc il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$B_o(y, \alpha) \subset B_o(x_0, r) \overset{(\star)}{\subset} A^c.$$

Autrement dit, pour un certain réel $\alpha > 0$,

$$B_o(y, \alpha) \cap A = \varnothing,$$

ce qui signifie que y n'est pas un point adhérent à A : $y \notin \overline{A}$, c'est-à-dire $y \in B$.

Nous avons donc démontré que

$$B_o(x_0, r) \subset \left(\overline{A}\right)^c = B$$

et donc que B était un voisinage de x_0.

La partie B, qui est un voisinage de chacun de ses points, est une partie ouverte de E. Le complémentaire de B, c'est-à-dire l'adhérence $\overline{A}$, est une partie fermée de E.

Solution 62

1. Notons F, l'adhérence de $B_o(x_0, r)$.

❧ La boule fermée $B_f(x_0, r)$ est une partie fermée qui contient la boule ouverte $B_o(x_0, r)$, donc $F \subset B_f(x_0, r)$.

✍ *L'adhérence d'une partie A est le plus petit fermé qui contienne A.*

❧ Réciproquement, si $x \in B_f(x_0, r)$, alors on pose

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = x_0 + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \cdot (x - x_0).$$

Chaque terme u_n appartient à la boule ouverte $B_o(x_0, r)$ car

$$\|u_n - x_0\| = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}_{<1} \cdot \underbrace{\|x - x_0\|}_{\leqslant r} < r$$

et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x car

$$u_n - x = \left[\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - 1\right] \cdot (x - x_0) \quad \text{d'où} \quad \|u_n - x\| = \frac{1}{2^n} \cdot \|x - x_0\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par conséquent, le point x appartient à l'adhérence de la boule ouverte $B_o(x_0, r)$.

✍ *Il faut faire une figure pour comprendre comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a été définie.*

❧ Par double inclusion, l'adhérence de la boule ouverte $B_o(x_0, r)$ est la boule fermée $B_f(x_0, r)$.

2. Notons Ω, l'intérieur de la boule fermée $B_f(x_0, r)$.

❧ La boule ouverte $B_o(x_0, r)$ est une partie ouverte contenue dans $B_f(x_0, r)$, donc elle est contenue dans Ω.

✍ *L'intérieur d'une partie A est le plus grand ouvert contenu dans A.*

❧ Réciproquement, soit $x \in \Omega$. Par définition de l'intérieur, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$B(x, \alpha) \subset B_f(x_0, r).$$

Il existe un vecteur unitaire u tel que

$$x - x_0 = \|x - x_0\| \cdot u.$$

✍ *Si $x - x_0 \neq 0_E$, alors ce vecteur unitaire est unique. Sinon, le facteur $\|x - x_0\|$ est nul et tous les vecteurs unitaires conviennent, c'est sans importance.*

On considère alors le vecteur

$$x + \frac{\alpha}{2} \cdot u \in B_o(x, \alpha) \subset B_f(x_0, r).$$

Or

$$\left(x + \frac{\alpha}{2} \cdot u\right) - x_0 = (x - x_0) + \frac{\alpha}{2} \cdot u = \left(\|x - x_0\| + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot u$$

et donc

$$\left\|\left(x + \frac{\alpha}{2} \cdot u\right) - x_0\right\| = \left(\|x - x_0\| + \frac{\alpha}{2}\right) \leqslant r.$$

Comme $\alpha/2 > 0$, on en déduit que $\|x - x_0\| < r$ et donc que

$$x \in B_o(x_0, r).$$

On a ainsi démontré que $\Omega \subset B_o(x_0, r)$ et finalement, par double inclusion, que $\Omega = B_o(x_0, r)$.

Solution 63

1. Considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points du graphe Γ : pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = \big(x_n, f(x_n)\big)$. Supposons que cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément $\ell = (\alpha, \beta)$ de $E \times E$.

Par définition de la topologie produit, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \alpha \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \beta.$$

Par continuité de f,

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\alpha)$$

(Théorème de composition des limites) et donc, par unicité de la limite,

$$\ell = (\alpha, \beta) = \big(\alpha, f(\alpha)\big) \in \Gamma.$$

On a ainsi prouvé que le graphe Γ était fermé.

2. Supposons que la fonction f ne soit pas continue au point $\alpha \in \mathbb{R}$. Par caractérisation séquentielle de la continuité, il existe (au moins) une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ telle que la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Comme l'application f est supposée bornée, cette suite divergente possède au moins deux valeurs d'adhérence distinctes.

✍ *Une suite divergente peut ne pas avoir de valeur d'adhérence (cas d'une suite qui tend vers l'infini) ou une seule valeur d'adhérence (comme la suite dont les termes sont 0,1,0,2,0,3,0,4,0,5,0,6...).*

En revanche, une suite dont les termes sont contenus dans une partie compacte est convergente si, et seulement si, elle admet une seule valeur d'adhérence. Par compacité, une telle suite admet au moins une valeur d'adhérence. Donc l'alternative est la suivante :

- *ou bien la suite admet une seule valeur d'adhérence (et elle converge vers cette valeur) ;*
- *ou bien la suite admet au moins deux valeurs d'adhérence (comme $u_n = (-1)^n$ par exemple).*

Il existe donc deux suites extraites $(x_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(x_{\psi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ qui convergent vers α, telles que

$$\lim_{k\to+\infty} x_{\varphi(k)} = \beta_1 \neq \beta_2 = \lim_{k\to+\infty} x_{\psi(k)}.$$

On a donc

$$\lim_{k\to+\infty} \big(x_{\varphi(k)}, f(x_{\varphi(k)})\big) = (\alpha, \beta_1) \quad \text{et} \quad \lim_{k\to+\infty} \big(x_{\psi(k)}, f(x_{\psi(k)})\big) = (\alpha, \beta_2).$$

Ainsi, (α, β_1) et (α, β_2) appartiennent à l'adhérence du graphe Γ. Comme Γ est supposé fermé, on en déduit que (α, β_1) et (α, β_2) appartiennent à Γ et donc que

$$\beta_1 = f(\alpha) = \beta_2,$$

d'où la contradiction.

✍ *En supposant que f était bornée, on a pu invoquer un argument de compacité. Sans cet argument, le résultat est clairement faux : la fonction f définie par*

$$f(0) = 0 \qquad \textit{et} \qquad \forall\, x \neq 0, \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui n'est pas continue (elle n'est pas bornée au voisinage de 0), alors que son graphe est fermé :

$$\Gamma = [xy = 1] \cap \{(0,0)\}$$

est l'union d'un singleton (qui est fermé) et de l'image réciproque du fermé $\{1\}$ par l'application continue $[(x,y) \mapsto xy]$ (application polynomiale en fonction des deux coordonnées x et y).

Solution 64

1. a. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne inférieure, il existe $x_0 \in H$ tel que $0 < x_0 < \varepsilon$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$k = \left\lfloor \frac{x}{x_0} \right\rfloor \in \mathbb{Z}.$$

Par définition de la partie entière, on a donc

$$k \leqslant \frac{x}{x_0} < k + 1$$

et comme $x_0 > 0$, on en déduit que

$$kx_0 \leqslant x \leqslant kx_0 + x_0 < kx_0 + \varepsilon, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad x - \varepsilon < kx_0 \leqslant x.$$

Comme $x_0 \in H$ et que H est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, alors $kx_0 \in H$ (quel que soit $k \in \mathbb{Z}$) et l'encadrement précédent montre que $|x - kx_0| \leqslant \varepsilon$.

On a ainsi démontré que H était une partie dense dans $\mathbb{R}$.

1. b. Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments strictement positifs de H qui converge vers a par valeurs supérieures.

❧ Nous allons démontrer par l'absurde que $a \in H$. Nous supposons donc que $a \notin H$.
Posons $\varepsilon = a/2 > 0$. Comme $a + \varepsilon > a$, par définition de la borne inférieure, il existe $u \in H$ tel que $a < u < a + \varepsilon$.

> *On a supposé que* $a \notin H$ *et* $u \in H$ *: ces deux réels sont nécessairement distincts.*
> *D'autre part,* $a + \varepsilon$ *n'est pas un minorant de* $H \cap \mathbb{R}_+^*$*, donc il existe bien un élément de* $H \cap \mathbb{R}_+^*$ *qui est* strictement *inférieur à* $a + \varepsilon$.

Comme $u > a$, toujours par définition de la borne inférieure, il existe $v \in H$ tel que $a < v < u$. Comme H est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, on en déduit que $u - v \in H$. Or

$$0 < u - v < \varepsilon = a/2 < a,$$

donc il existe un élément dans $H \cap \mathbb{R}_+^*$ qui est strictement inférieur à $a = \inf(H \cap \mathbb{R}_+^*)$: c'est impossible. Donc $a \in H$.

❧ Comme $a \in H$ et que H est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, alors $a\mathbb{Z} \subset H$.
Réciproquement, soit $x \in H$. On pose à nouveau $k = \lfloor x/a \rfloor \in \mathbb{Z}$ et, comme plus haut, on en déduit que

$$ka \leqslant x < (k+1)a.$$

Mais $x \in H$, $ka \in H$ et H est un sous-groupe additif, donc $x - ka \in H$ et

$$0 \leqslant x - ka < a.$$

Comme $a = \min(H \cap \mathbb{R}_+^*$, on en déduit que $x - ka = 0$ et donc que $x = ka \in a\mathbb{Z}$.
Finalement, $H = a\mathbb{Z}$.

❧ Considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de H qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. En tant que suite convergente, cette suite est bornée. Quel que soit $R > 0$, l'intersection $H \cap B(0, R)$ ne contient qu'un nombre fini de réels. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne prend donc qu'un nombre fini de valeurs distinctes et comme elle converge, elle est nécessairement stationnaire. Par conséquent, $\ell \in H$ et nous avons démontré que H était fermé.

2. On a distingué quatre cas :
- Si $H = \{0\}$, alors H est fermé et $H = 0\mathbb{Z}$.
- Si $H = \mathbb{R}$, alors H est fermé.
- Si H n'est pas réduit à $\{0\}$, alors $H \cap \mathbb{R}_+^*$ n'est pas réduit à $\{0\}$ et :
  - si $a = \min(H \cap \mathbb{R}_+^*) = 0$, alors H est dense dans $\mathbb{R}$;
  - si $a > 0$, alors $H = a\mathbb{Z}$ et H est fermé.

La seule partie à la fois dense dans $\mathbb{R}$ et fermée est $\mathbb{R}$ lui-même. Par conséquent, on a bien démontré l'alternative suivante :
- ou bien $H = \mathbb{R}$;
- ou bien $H \neq \mathbb{R}$ est fermé et il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $H = a\mathbb{Z}$;
- ou bien $H \neq \mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

3. La somme de deux sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ est encore un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.
Le sous-groupe $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est au plus dénombrable (car $\mathbb{Z}^2$ est dénombrable) et $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, donc $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \neq \mathbb{R}$.
Comme a et b sont strictement positifs et appartiennent à $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$, ce sous-groupe n'est pas réduit à $\{0\}$.
Si $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ était fermé, alors il existerait un réel $\alpha > 0$ tel que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \alpha\mathbb{Z}$. En particulier, il existerait deux entiers k et ℓ dans $\mathbb{Z}$ tels que

$$a = k\alpha \qquad \text{et} \qquad b = \ell\alpha.$$

Comme $\alpha > 0$, on en déduirait alors que

$$\frac{a}{b} = \frac{k\alpha}{\ell\alpha} = \frac{k}{\ell} \in \mathbb{Q},$$

ce qui est faux par hypothèse.
Il ne reste plus qu'une seule possibilité : le sous-groupe H est un sous-groupe dense dans $\mathbb{R}$, distinct de $\mathbb{R}$.

Solution 65

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

L'ensemble Ω_n est, par construction, une partie de $\mathbb{R}$. Comme l'ensemble des indices n'est pas vide, l'ensemble Ω_n contient au moins un réel et comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, l'ensemble Ω_n est borné :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |u_k| \leqslant M \implies \forall x \in \Omega_n, \quad |x| \leqslant M.$$

En tant que partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$, l'ensemble Ω_n admet une borne supérieure et une borne inférieure *réelles*.

Les deux suites réelles $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc bien définies.

❧ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $k \geqslant n+1$, alors $k \geqslant n$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \Omega_{n+1} \subset \Omega_n$$

et par conséquent,

$$v_{n+1} = \inf \Omega_{n+1} \leqslant \inf \Omega_n = v_n \quad \text{et} \quad w_n = \sup \Omega_n \leqslant \sup \Omega_{n+1} = w_{n+1}.$$

Cela démontre que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

❧ Comme Ω_n n'est pas vide, $v_n \leqslant w_n$ et par conséquent

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_0 \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant w_0$$

ce qui prouve que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par w_0 et que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par v_0.

Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (croissante et majorée) et la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (décroissante et minorée) sont convergentes.

2. Par définition, il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ. Comme $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, on sait que $\varphi(n) \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{\varphi(n)} \in \Omega_n.$$

Par définition de v_n et de w_n, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant w_n.$$

Les trois suites sont convergentes, on peut donc passer à la limite dans cet encadrement et en déduire que

$$V \leqslant \ell \leqslant W.$$

3. Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers W, il existe un rang $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_0, \qquad W \leqslant w_n \leqslant W + \varepsilon.$$

Or $w_n = \sup \Omega_n$, donc w_n est un majorant de Ω_n et comme $\varepsilon > 0$, alors $w_n - \varepsilon$ n'est pas un minorant de Ω_n. Par conséquent, il existe $k \geqslant n$ tel que

$$w_n - \varepsilon \leqslant u_k \leqslant w_n.$$

On a ainsi démontré que

$$\forall \varepsilon > 0, \ \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ \exists k \geqslant n,} \qquad W - \varepsilon \leqslant u_k \leqslant W + \varepsilon.$$

✍ *Il y a deux manière d'interpréter l'expression encadrée :*
— *il existe une infinité d'indices k tels que...*
— *il existe une suite extraite $(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que...*

Ce qui précède démontre qu'il existe une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers W, donc W est bien une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

❧ Une démonstration analogue prouve qu'il existe une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers V, donc V est aussi une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

✍ *La question précédente permet de conclure que la limite inférieure V est la plus petite valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et que la limite supérieure W est la plus grande valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

4. D'après l'étude de leurs variations, les deux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si, et seulement si, $V = W$.

❧ Si $V \neq W$, alors en fait $V < W$ et on déduit de la question précédente que V et W sont deux valeurs d'adhérence distinctes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

❧ Si $V = W$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$$

(la borne inférieure est un minorant, la borne supérieure est un majorant) et comme les deux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite, on conclut par encadrement que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que sa limite est la valeur commune à V et W.

✍ ***Variante —*** *On a démontré que toute valeur d'adhérence ℓ était compris entre V et W. Avec $V = W$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a qu'une seule valeur d'adhérence.*

D'après le cours de Topologie, toute suite bornée qui n'admet qu'une seule valeur d'adhérence est convergente, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Solution 66

Comme f et φ sont de classe $\mathscr{C}^1$, les fonctions $|f'|$ et $f\cdot\varphi$ sont continues sur le segment $[0,1]$. Les deux intégrales sont donc bien définies, donc N et N_φ sont deux applications de E dans $\mathbb{R}_+$.

Il est clair que ces deux applications sont positivement homogènes et vérifient l'inégalité triangulaire.

❧ Si $N(f)=0$, alors $f(0)=0$ et

$$\int_0^1 \left|f'(t)\right| dt = 0.$$

Comme $|f'|$ est une fonction continue et positive dont l'intégrale sur $[0,1]$ est nulle, cette fonction est identiquement nulle. Par conséquent, la fonction f est constante sur l'intervalle $[0,1]$. Comme $f(0)=0$, la fonction f est identiquement nulle.

❧ Si $N_\varphi(f)=0$, alors f est constante sur $[0,1]$ (selon le raisonnement précédent) et

$$0=\int_0^1 \varphi(t)f(t)\,dt = f(0)\cdot\underbrace{\int_0^1\varphi(t)\,dt}_{\neq 0}$$

donc $f(0)=0$ et la fonction constante f est donc identiquement nulle.

Bref : N et N_φ sont bien deux normes sur E.

❧ D'après le Théorème fondamental (puisque f est de classe $\mathscr{C}^1$),

$$\forall\, x\in[0,1],\quad f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\,dt.$$

Par inégalité triangulaire,

$$\left|f(x)\right| \leqslant \left|f(0)\right| + \int_0^x \underbrace{\left|f'(t)\right|}_{\geqslant 0}\,dt \leqslant \left|f(0)\right| + \int_0^1 \left|f'(t)\right|dt = N(f).$$

Par passage au sup,

$$\|f\|_\infty \leqslant N(f).$$

Par inégalité triangulaire,

$$\left|\int_0^1 f(t)\varphi(t)\,dt\right| \leqslant \int_0^1 \left|f(t)\right|\cdot\left|\varphi(t)\right|dt$$

et comme

$$\forall\, t\in[0,1],\quad \left|f(t)\right|\cdot\left|\varphi(t)\right| \leqslant \|f\|_\infty\cdot\left|\varphi(t)\right|,$$

on déduit de la positivité de l'intégrale que

$$\left|\int_0^1 f(t)\varphi(t)\,dt\right| \leqslant \int_0^1 \left|\varphi(t)\right|dt\cdot\|f\|_\infty$$

puis que

$$\begin{aligned}\forall\, f\in E,\qquad N_\varphi(f) &\leqslant \int_0^1\left|\varphi(t)\right|dt\cdot\|f\|_\infty + \int_0^1\left|f'(t)\right|dt\\ &\leqslant \left(\int_0^1\left|\varphi(t)\right|dt+1\right)\cdot N(f).\end{aligned}$$

La norme N_φ est donc dominée par la norme N.

✍ *C'est seulement dans la réciproque qui suit qu'on va vraiment utiliser les propriétés des* ***densités de probabilité*** *: jusqu'ici, on a seulement utilisé que φ était continue par morceaux sur $[0,1]$.*

❧ Comme f est continue sur le segment $[0,1]$, elle atteint un minimum $f(m)$ et un maximum $f(M)$ et donc

$$\forall\, t \in [0,1], \quad f(m) \leqslant f(t) \leqslant f(M).$$

Comme φ est positive, on en déduit que

$$\forall\, t \in [0,1], \quad f(m)\varphi(t) \leqslant f(t)\varphi(t) \leqslant f(M)\varphi(t)$$

et en intégrant cet encadrement sur $[0,1]$:

$$f(m) \leqslant \int_0^1 f(t)\varphi(t)\,dt \leqslant f(M).$$

On a donc prouvé que

$$\int_0^1 f(t)\varphi(t)\,dt = [f(m), f(M)].$$

Or l'image de l'intervalle $[0,1]$ par l'application continue f est un intervalle et l'image d'un compact (ici, le segment $[0,1]$) est un compact, donc

$$f_*([0,1]) = [f(m), f(M)].$$

Par conséquent, il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que

$$\int_0^1 f(t)\varphi(t)\,dt = f(x_0).$$

❧ Un coup d'astuce taupinale, un coup d'inégalité triangulaire :

$$\big|f(0)\big| \leqslant \big|f(0) - f(x_0)\big| + \big|f(x_0)\big|.$$

D'après le Théorème fondamental et l'inégalité triangulaire pour les intégrales,

$$\big|f(0) - f(x_0)\big| = \left|\int_0^{x_0} f'(t)\,dt\right| \leqslant \int_0^{x_0} \big|f'(t)\big|\,dt \leqslant \int_0^1 \big|f'(t)\big|\,dt.$$

On en déduit enfin que

$$\big|f(0)\big| \leqslant \int_0^1 \big|f'(t)\big|\,dt + \left|\int_0^1 f(t)\varphi(t)\,dt\right| = N_\varphi(f).$$

Par conséquent,

$$\forall\, f \in E, \quad N(f) \leqslant 2N_\varphi(f)$$

et les deux normes sont équivalentes.

Solution 67

1. Si $f(x) = f(y)$, alors $\|f(x)\| = \|f(y)\|$. Or l'application

$$\left[t \mapsto \frac{t}{1+t}\right]$$

est injective, donc $\|x\| = \|y\|$ et finalement on a bien $x = y$. Donc l'application f est injective.

✍ *Les* ***homographies***

$$\left[t \mapsto \frac{at+b}{ct+d}\right]$$

sont constantes pour $ad - bc = 0$ et injectives pour $ad - bc \neq 0$.

Plus précisément, si $ad - bc \neq 0$, alors la fonction réalise une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{a/c\}$ et la bijection réciproque est elle aussi une homographie. Il y a évidemment un lien avec le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$...

2. Pour tout $x \in E$,

$$\|f(x)\| = \frac{\|x\|}{1+\|x\|} < 1,$$

donc l'image de f est contenue dans la boule unité ouverte de E.

❧ Réciproquement, si $\|u\| < 1$, alors on peut poser

$$x = \frac{u}{1-\|u\|} \in E$$

et on vérifie sans peine que $f(x) = u$.

✍ *Il n'y a pas de magie ici : on a choisi u et on a ensuite résolu l'équation $f(x) = u$. Cette résolution, très simple (en s'inspirant de l'étude de l'injectivité : il s'agit d'inverser une homographie), n'apporte rien à la compréhension de la réponse, on peut donc se contenter de parachuter la "bonne valeur" de x.*

On a ainsi démontré (par double inclusion) que l'image de f était la boule unité ouverte de E.

3. Soient x et y dans E. On vérifie facilement que

$$f(x) - f(y) = \frac{\|y\| - \|x\|}{(1+\|x\|)(1+\|y\|)} \cdot x + \frac{x-y}{1+\|y\|}$$

et on en déduit que

$$\begin{aligned}\big\|f(x) - f(y)\big\| &\leqslant \frac{\big|\|y\| - \|x\|\big|}{(1+\|x\|)(1+\|y\|)} \cdot \|x\| + \frac{\|x-y\|}{1+\|y\|} \\ &\leqslant \frac{1}{1+\|y\|}\left(1 + \frac{\|x\|}{1+\|x\|}\right) \cdot \|y-x\| && \text{(inégalité triangulaire)} \\ &\leqslant 2\|y-x\|.\end{aligned}$$

La fonction f est donc 2-lipschitzienne.

✍ *On sait que le produit de deux applications lipschitziennes et bornées est encore une application lipschitzienne et bornée, mais ce théorème ne peut pas s'appliquer ici : on considère le produit d'une application lipschitzienne non bornée par une application lipschitzienne qui tend vers 0 à l'infini.*

Solution 68

1. Considérons $x \notin A$ et fixons $x_0 \in A$ (arbitrairement). Comme f est k-lipschitzienne,

$$\big|f(x_0) - f(y)\big| \leqslant k\|x_0 - y\|$$

et donc, pour tout $y \in A$,

$$\begin{aligned}k\|x-y\| + f(y) &\geqslant k\|x-y\| + \big[f(x_0) - k\|x_0 - y\|\big] \\ &\geqslant k\big(\|x-y\| - \|x_0-y\|\big) + f(x_0) \\ &\geqslant k\|x-x_0\| + f(x_0). && \text{(inég. triang.)}\end{aligned}$$

Comme le minorant est indépendant de $y \in A$, on en déduit que l'ensemble

$$\big\{k\|x-y\| + f(y),\ y \in A\big\}$$

est non vide (puisque $A \neq \varnothing$) et minoré. Cet ensemble possède donc une borne inférieure et l'application g est donc bien définie sur A^c.

❧ Considérons maintenant $x \in A$. En reprenant le calcul précédent avec $x_0 = x$ (possible car $x \in A$ et $x_0 \in A$ avait été choisi arbitrairement), on obtient

$$\forall\, y \in E, \quad k\|x-y\| + f(y) \geqslant k\|x-x\| + f(x) = f(x).$$

Par conséquent,

$$\forall\, x \in A, \quad g(x) = \min_{y\in A}\big\{k\|x-y\| + f(y),\ y \in A\big\} = f(x)$$

ce qui signifie que g est bien un prolongement de f à E tout entier.

2. Soient x_1, x_2 dans E.
Par inégalité triangulaire,

$$\forall\, y \in A, \quad k\|x_1 - y\| + f(y) \leqslant k\|x_1 - x_2\| + k\|x_2 - y\| + f(y).$$

La borne inférieure étant un minorant, on en déduit que

$$\forall y \in A, \quad g(x_1) \leqslant k\|x_1 - x_2\| + k\|x_2 - y\| + f(y)$$

c'est-à-dire

$$\forall y \in A, \quad g(x_1) - k\|x_1 - x_2\| \leqslant k\|x_2 - y\| + f(y).$$

Le minorant est indépendant de $y \in A$, on peut donc passer à la borne inférieure :

$$g(x_1) - k\|x_1 - x_2\| \leqslant \inf_{y\in A}\left\{k\|x_2 - y\| + f(y)\right\} = g(x_2).$$

On a ainsi démontré que

$$\forall x_1, x_2 \in E, \quad g(x_1) - g(x_2) \leqslant k\|x_1 - x_2\|.$$

Par symétrie, on en déduit que

$$\forall x_1, x_2 \in E, \quad g(x_2) - g(x_1) \leqslant k\|x_2 - x_1\| = \|x_1 - x_2\|$$

et donc que g est k-lipschitzienne :

$$\forall x_1, x_2 \in E, \quad \left|g(x_2) - g(x_1)\right| \leqslant k\|x_1 - x_2\|.$$

✍ *En cours, cette démonstration a servi à prouver que l'application $[x \mapsto d(x, A)]$ est 1-lipschitzienne pour toute partie non vide de E.*

Solution 69

1. Cf **03-01**.
2.
3.
4.
5.
6.
7.

Solution 70

1. Par hypothèse, il existe une matrice inversible Q telle que

$$Q^{-1}MQ = N.$$

On en déduit par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad Q^{-1}M^kQ = N^k$$

et par combinaison linéaire que

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \qquad Q^{-1}P(M)Q = P(N).$$

✍ *L'application $\left[A \mapsto Q^{-1}AQ\right]$ est un morphisme d'algèbres de $\mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$ dans elle-même : tout est là !*

2. Comme A est diagonalisable, le polynôme minimal μ de A est un polynôme annulateur de A scindé à racines simples. Comme les matrices B_n sont semblables à A, elles ont même polynôme minimal que A, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mu(B_n) = 0_d.$$

L'application $[M \mapsto \mu(M)]$ est continue sur $\mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$.

✍ *Sur une algèbre associative unitaire, l'identité $[M \mapsto M]$ est continue ; un produit de fonctions continues est une fonction continue et une combinaison linéaire de fonctions continues est continues, donc toute application* polynomiale *$[M \mapsto P(M)]$ est continue.*

Cette propriété est indépendante de la dimension de l'algèbre, puisque l'identité est continue en toute dimension.

Donc l'hypothèse

$$\lim_{n\to+\infty} B_n = B$$

entraîne (par composition de limites) que

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) = \mu(B)$$

et donc que μ est un polynôme annulateur de B.

Comme μ est scindé à racines simples, on en déduit que B est diagonalisable.

✍ *On a prouvé que μ était un polynôme annulateur unitaire de B, on n'a pas encore prouvé que c'était le polynôme minimal de B !*

❧ Considérons l'application qui, à une matrice $M \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$, associe son polynôme caractéristique $\chi(M) \in \mathbb{K}_d[X]$.

✍ *Si $M = (m_{i,j})$, alors $XI_d - M = (n_{i,j})$ avec $n_{i,j} = -m_{i,j}$ si $i \neq j$ et $n_{i,i} = X - m_{i,i}$ et*

$$\chi(M) = \det(XI_d - M) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) n_{1,\sigma(1)} \cdots n_{d,\sigma(d)}.$$

Seule cette formule permet de comprendre ce qui suit !

L'espace d'arrivée $\mathbb{K}_d[X]$ est un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sur cet espace sont donc équivalentes. On peut ainsi le rapporter à sa base canonique :

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{K}), \qquad \chi(M) = \sum_{k=0}^{d} \chi_k(M) X^k$$

et en déduire que l'application χ est continue de $\mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}_d[X]$ si, et seulement si, les $(d+1)$ composantes χ_k $(0 \leqslant k \leqslant d)$ sont continues de $\mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.

Or chaque composante $\chi_k(M)$ est une fonction polynomiale des coefficients de la matrice M. Donc l'application χ est continue sur $\mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$.

Comme A et les matrices B_n sont toutes semblables, elles ont même polynôme caractéristique. Par continuité de χ,

$$\chi(B) = \lim_{n\to+\infty} \chi(B_n) = \chi(A).$$

Comme A et B ont même polynôme caractéristique, elles ont mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités. Ces matrices sont diagonalisables, donc leurs sous-espaces propres respectifs ont mêmes dimensions, ce qui prouve que A et B sont semblables.

3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, les matrices

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & 1/n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont semblables entre elles. Cependant, leur limite est la matrice nulle qui n'est semblable qu'à elle-même et donc pas semblable à B_1.

Solution 71

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $[t \mapsto f(t)t^n]$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc l'intégrale

$$\int_0^1 f(t)t^n\,dt$$

est bien définie.

Comme f est continue sur le segment $[0,1]$, elle y reste bornée et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in [0,1], \quad \left|f(t)t^n\right| \leqslant \|f\|_\infty.$$

Par positivité de l'intégrale, on en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \left|\int_0^1 f(t)t^n\,dt\right| \leqslant \int_0^1 \left|f(t)t^n\right| dt \leqslant \|f\|_\infty.$$

L'ensemble

$$\left\{\left|\int_0^1 f(t)t^n\,dt\right|,\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

est donc une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}_+$: elle admet bien une borne supérieure et cette borne supérieure est un réel positif.

Ainsi, N est bien une application de $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}_+$.

✍ *Faut-il prendre la peine de justifier pourquoi l'ensemble considéré n'est pas vide ?*
On a justifié l'existence de chaque intégrale, donc cet ensemble contient tous les termes d'une suite réelle (pas nécessairement distincts deux à deux, mais c'est sans importance).
Je ne pense pas qu'il faille en dire plus.
En revanche, il est crucial de justifier l'existence de chaque intégrale, de justifier clairement que l'ensemble est borné et de mentionner (juste mentionner, en passant) qu'il n'est pas vide.

► Soit $f \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il est clair que

$$\left|\int_0^1 (\lambda f)(t)t^n\,dt\right| = \underbrace{|\lambda|}_{\geqslant 0}\left|\int_0^1 f(t)t^n\,dt\right|$$

et par conséquent

$$N(\lambda f) = |\lambda|\sup\left\{\left|\int_0^1 f(t)t^n\,dt\right|,\ n\in\mathbb{N}\right\} = |\lambda|\,N(f).$$

✍ *Là encore, inutile d'entrer dans les détails (à mon avis).*
Mais un jour d'oral, on doit se tenir prêt à fournir les détails nécessaires pour justifier que, pour toute partie non vide et majorée $A \subset \mathbb{R}$,

$$\forall\, t>0,\quad \sup(t.A) = t.\sup(A).$$

(Rien de compliqué, mais ça prend pas mal de temps de bien le rédiger.)

► Quelle que soient les fonctions f et g dans E, quel que soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 (f+g)(t)t^n\,dt\right| &= \left|\int_0^1 f(t)t^n\,dt + \int_0^1 g(t)t^n\,dt\right|\\ &\leqslant \left|\int_0^1 f(t)t^n\,dt\right| + \left|\int_0^1 g(t)t^n\,dt\right|\\ &\leqslant N(f)+N(g)\end{aligned}$$

(en invoquant successivement la linéarité de l'intégrale, l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$ et le fait que la borne sup est un majorant).

On a trouvé un majorant indépendant de n, on peut donc passer au sup :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\int_0^1 (f+g)(t)t^n\,dt\right| \leqslant N(f)+N(g)$$

ce qui signifie précisément que N vérifie aussi l'inégalité triangulaire :

$$\forall\, f,g\in E,\quad N(f+g)\leqslant N(f)+N(g).$$

✍ *Je tiens à ce style de démonstration avec les bornes sup (ou inf) : on commence par trouver un majorant et on conclut en rappelant que, par définition, la borne sup est le plus petit de tous les majorants possibles. — C'est peut-être une manie personnelle ?*

► Il reste à vérifier que N sépare les points. Pour cela, nous considérons $f \in E$ telle que $N(f) = 0$, c'est-à-dire

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad \int_0^1 f(t)t^n\,dt = 0.$$

Par combinaison linéaire, on en déduit que

$$\int_0^1 f(t)P(t)\,dt = 0$$

pour toute application polynomiale $P \in E$.

❧ La fonction f est CONTINUE sur le SEGMENT $[0,1]$. D'après le Théorème de Weierstrass, il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications polynomiales qui converge uniformément sur le segment $[0,1]$ vers f :

$$\lim_{n\to+\infty}\|f-P_n\|_\infty = 0.$$

❧ Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme f est bornée sur $[0,1]$,

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \left|f^2(t) - f(t)P_n(t)\right| = \left|f(t)\right| \left|f(t) - P_n(t)\right| \leqslant \|f\|_\infty \|f - P_n\|_\infty.$$

Par linéarité, par inégalité triangulaire et enfin par positivité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f^2(t)\,dt - \int_0^1 f(t)P_n(t)\,dt\right| &= \left|\int_0^1 f^2(t) - f(t)P_n(t)\,dt\right| \\ &\leqslant \int_0^1 \left|f^2(t) - f(t)P_n(t)\right| dt \\ &\leqslant \|f\|_\infty \|f - P_n\|_\infty.\end{aligned}$$

❧ On en déduit que

$$\int_0^1 f^2(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t)P_n(t)\,dt.$$

Or on a constaté en commençant que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 f(t)P_n(t)\,dt = 0.$$

Donc

$$\int_0^1 f^2(t)\,dt = 0$$

et comme f^2 est une fonction continue et positive sur $[0,1]$, on en déduit que f est la fonction nulle.

✍ *On peut vérifier facilement que l'application*

$$\left[(f,g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)\,dt\right]$$

définit un produit scalaire sur E. Le raisonnement qui précède démontre que l'orthogonal du sous-espace F des applications polynomiales est réduit à $\{0\}$ et donc que

$$F^\perp = E^\perp = \{0\} \quad \textit{bien que} \quad F \subsetneq E.$$

On en déduit en particulier que $(F^\perp)^\perp = E \neq F$.

Cela n'est possible que parce que E est un espace de dimension infinie et que F est dense dans E.

Rappel : en dimension finie, tout sous-espace vectoriel est fermé (donc $\overline{F} = F$) et $(F^\perp)^\perp = F$.

Solution 72

Par définition de F, pour toute fonction $f \in F$, il existe un NOMBRE FINI de scalaires complexes

$$a_1, \dots, a_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n$$

(où les λ_p sont DEUX À DEUX DISTINCTS) tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{p=1}^{n} a_p e^{\lambda_p x}.$$

Il est alors clair que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad f^{(k)}(0) = \sum_{p=1}^{n} a_p \lambda_p^k.$$

Toute famille FINIE de nombres réels positifs admet un plus grand élément : en posant

$$a_0 = \sum_{p=1}^{n} |a_p| \quad \text{et} \quad \lambda_0 = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\},$$

on obtient

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \left|f^{(k)}(0)\right| \leqslant a_0 \lambda_0^k$$

et on en déduit que la série

$$\sum \frac{\left|f^{(k)}(0)\right|}{k!}$$

est bien convergente (comparaison à une série de Poisson).

Par conséquent, N est bien une application de F dans $\mathbb{R}_+$.

- L'homogénéité est évidente (linéarité de la somme pour les séries convergentes).
- L'inégalité triangulaire est facile à établir. Quelles que soient les applications f et g dans F,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \left|(f+g)^{(k)}(0)\right| \leqslant \left|f^{(k)}(0)\right| + \left|g^{(k)}(0)\right|$$

(inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$) et par positivité de la somme (pour les séries convergentes)

$$N(f+g) \leqslant N(f) + N(g).$$

- Il reste à vérifier que N sépare les points.

Supposons donc que $N(f) = 0$ pour une certaine application $f \in F$. On en déduit que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad f^{(k)}(0) = 0$$

(une somme de termes positifs est nulle si, et seulement si, chaque terme est nul) et donc que (en conservant les notations précédentes) :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{p=1}^{n} a_p \lambda_p^k = 0.$$

Comme les λ_p sont deux à deux distincts, la matrice de Vandermonde

$$V = \left(\lambda_p^k\right)_{\substack{0 \leqslant k < n \\ 1 \leqslant p \leqslant n}}$$

est inversible, donc les a_p vérifient le système de Cramer homogène

$$\forall\, 0 \leqslant k < n, \quad \sum_{p=1}^{n} a_p \lambda_p^k = 0$$

ce qui prouve que les a_p sont tous nuls et donc que f est le vecteur nul.

✍ *La matrice de Vandermonde et son déterminant sont au programme.*

VARIANTE.— Pour tout λ, la fonction e_λ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad e_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} x^n.$$

Par combinaison linéaire, toute fonction $f \in F$ est donc développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et en particulier (Formule de Taylor) :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Comme on l'a vu, si $N(f) = 0$, alors $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et par conséquent la fonction f est la fonction nulle.

✍ *Cette variante est plus élégante que la méthode précédente... En fait, cette variante ne prouve que ce qu'il faut prouver (la fonction f est la fonction nulle) et rien de plus !*

La méthode précédente au contraire démontrait que f était nulle en démontrant que tous les scalaires a_k étaient nuls au moyen d'un argument (système de Cramer associé à une matrice de Vandermonde) qui permet de démontrer que la famille $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{C}}$ est une famille libre — ce dont on n'a nul besoin ici.

Solution 73

1. Comme le produit PQ peut être considéré comme une application continue sur le compact $[-1,1]$, il est clair que l'application N_Q est bien définie sur E ; qu'elle prend des valeurs positives ; qu'elle est positivement homogène et qu'elle vérifie l'inégalité triangulaire (propriétés de la norme $\|\cdot\|_\infty$).

Enfin, si $N_Q(P) = 0$, alors $PQ = 0$ (puisque $\|\cdot\|_\infty$ est une norme) et comme $\mathbb{C}[X]$ est un anneau sans diviseur de zéro, on en déduit que $P = 0$: l'application N_Q sépare les points et c'est donc bien une norme sur E.

2. Comme la fonction (associée à) Q est continue sur le compact $[-1,1]$, elle est bornée et par conséquent

$$\forall\, P \in E, \qquad \mathbb{N}_Q(P) = \|PQ\|_\infty \leqslant \|Q\|_\infty \cdot \|P\|_\infty = \|Q\|_\infty \cdot N_1(P).$$

La norme N_1 domine donc la norme N_Q.

❧ Réciproquement, si Q n'a pas de racines sur le segment $[-1,1]$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, t \in [-1,1], \quad \big|Q(t)\big| \geqslant \alpha.$$

✍ *Une fonction continue sur un compact est bornée et* atteint *ses bornes : on peut donc prendre pour α le minimum de $|Q(t)|$ — minimum qui n'est pas nul.*

On en déduit alors que

$$\forall\, P \in E,\ \forall\, t \in [-1,1], \quad \big|P(t)Q(t)\big| \geqslant \alpha\big|P(t)\big|.$$

Comme $|P(t)|$ atteint son maximum sur $[-1,1]$, il existe $t_0 \in [-1,1]$ tel que

$$\big|P(t_0)Q(t_0)\big| \geqslant \alpha\big|P(t_0)\big| = \alpha\|P\|_\infty.$$

Comme le sup est un majorant, on en déduit que

$$\alpha\|P\|_\infty \leqslant \|PQ\|_\infty = N_Q(P).$$

Le facteur α est strictement positif et indépendant de P (il ne dépend que de Q), donc on a bien démontré que la norme N_Q dominait dans ce cas la norme N_1.

Ainsi, si Q n'a pas de racine dans $[-1,1]$, les normes N_1 et N_Q sont équivalentes.

❧ Supposons maintenant que Q admette au moins une racine $\omega \in [-1,1]$. Nous allons démontrer que, dans ce cas, les normes N_1 et N_Q ne sont pas équivalentes en établissant qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad N_1(P_n) \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} N_Q(P_n) = 0.$$

▶ Fixons $\varepsilon > 0$.

▷ Par continuité de Q, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$|\omega - t| \leqslant \alpha \implies \big|Q(t)\big| \leqslant \varepsilon.$$

▷ Il existe une fonction f_ε continue sur $[-1,1]$ telle que $f_\varepsilon(\omega) = 1$ et vérifiant aussi

$$\forall\, t \in [-1,1], \quad 0 \leqslant f_\varepsilon(t) \leqslant 1 \quad \text{et} \quad |t-\omega| \geqslant \alpha \implies f_\varepsilon(t) = 0.$$

✍ *Faites une figure ! On peut choisir une fonction f_ε affine par morceaux...*

La fonction f_ε est continue sur le segment $[-1,1]$. D'après le Théorème de Weierstrass, il existe donc $P_\varepsilon \in E$ tel que

$$\|P_\varepsilon - f_\varepsilon\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

▷ On en déduit d'abord que

$$\begin{aligned} |t-\omega| \geqslant \alpha &\implies \big|P_\varepsilon(t)\big| = \big|P_\varepsilon(t) - f_\varepsilon(t)\big| \\ &\implies \big|P_\varepsilon(t)\big| \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

ensuite que

$$\|P_\varepsilon\|_\infty \leqslant \|P_\varepsilon - f_\varepsilon\|_\infty + \|f_\varepsilon\|_\infty \leqslant 1 + \varepsilon$$

par inégalité triangulaire (le côté classique) et enfin que

$$\begin{aligned}\big|P_\varepsilon(\omega)\big| &= \big|P_\varepsilon(\omega) - f_\varepsilon(\omega) + f_\varepsilon(\omega)\big| \\ &\geqslant \big|f_\varepsilon(\omega)\big| - \big|P_\varepsilon(\omega) - f_\varepsilon(\omega)\big| \\ &\geqslant 1 - \varepsilon\end{aligned}$$

par inégalité triangulaire (le côté méconnu).

Cette dernière inégalité montre que $\|P_\varepsilon\|_\infty \geqslant 1-\varepsilon$.

▷ Pour $|t-\omega| \geqslant \alpha$,

$$\big|Q(t)P_\varepsilon(t)\big| \leqslant \|Q\|_\infty \|P_\varepsilon\|_\infty \leqslant \|Q\|_\infty \cdot \varepsilon.$$

D'autre part, pour $|t-\omega| \leqslant \alpha$,

$$\big|Q(t)P_\varepsilon(t)\big| \leqslant \varepsilon \cdot \|P_\varepsilon\|_\infty.$$

En prenant une constante K supérieure à $\|Q\|_\infty$ et à $1+\varepsilon \geqslant \|P_\varepsilon\|_\infty$, on a donc

$$N_Q(P_\varepsilon) = \|QP_\varepsilon\|_\infty \leqslant K\varepsilon.$$

► Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $\varepsilon = 1/n$, si bien que $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$. On a justifié l'existence d'une suite $(U_n)_{n\geqslant 2}$ de polynômes (avec $U_n = P_{1/n}$) telle que

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad N_1(U_n) = \|U_n\|_\infty \geqslant 1 - \frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{2}$$

et que

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad N_Q(U_n) = \|QU_n\|_\infty \leqslant K\frac{1}{n}$$

(où on a choisi $K \geqslant \|Q\|_\infty$ et $K \geqslant 2 \geqslant \|U_n\|_\infty$).

► Ces encadrements prouvent que la norme N_1 n'est pas dominée par N_Q et donc que ces normes ne sont pas équivalentes.

❧ En conclusion, la norme N_1 et la norme N_Q sont équivalentes si, et seulement si, le polynôme Q n'a pas de racine sur $[-1,1]$.

Solution 74

Si la norme N vérifie l'identité

$$\forall\, A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \qquad N(A.B) = N(A).N(B),$$

alors en particulier

$$\forall\, A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \qquad N(A^2) = N(A)^2.$$

❧ Considérons la matrice $A = E_{1,2}$. Comme $A \neq 0_n$, alors $N(A) \neq 0$. Mais $A^2 = 0_n$, donc $N(A^2) = 0$. La contradiction est établie !

Solution 75

1. Il est clair que N est bien définie sur E (norme infinie d'une fonction continue sur un segment) ; qu'elle est positive ; qu'elle est positivement homogène et qu'elle vérifie l'inégalité triangulaire (linéarité de la dérivation).

Enfin, si $N(f) = 0$, alors f est une solution de l'équation différentielle linéaire homogène

$$x'' + 2x' + x = 0$$

qui vérifie en outre $x(0) = x'(0) = 0$, donc f est la fonction nulle (soit par un calcul explicite sachant que $f(t) = (at+b)e^{-t}$, soit en appliquant le théorème de Cauchy-Lipschitz).

Donc N est bien une norme sur E.

✍ *Bien entendu, N n'est pas une norme sur $\mathscr{C}^2([0,1])$.*

2. La fonction $f \in E$ considérée est *la* solution du problème de Cauchy :

$$\forall\, t \in [0,1], \quad x''(t) + 2x'(t) + x(t) = g(t), \qquad x(0) = x'(0) = 0.$$

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $x_H(t) = (at+b)e^{-t}$ et la méthode de variation des constantes nous donne une solution particulière :

$$x_0(t) = e^{-t}\int_0^t e^s(t-s)g(s)\,ds$$

et en même temps (puisqu'on raisonne sur le couple (x, x') en faisant varier les constantes)

$$x_0'(t) = e^{-t}\int_0^t e^s(1+s-t)g(s)\,ds.$$

✍ *On pourrait dériver et simplifier l'expression de $x_0(t)$: ce n'est pas compliqué, mais c'est un peu long. L'avantage de la méthode de variation des constantes est de nous donner directement une expression* simple *de la dérivée — et de ne la donner que si nous en avons réellement besoin.*

Il apparaît que $x_0(0) = x_0'(0) = 0$, donc $f = x_0$!

3. On déduit de l'inégalité triangulaire que :

$$\begin{aligned}\forall\, t \in [0,1], \quad |f(t)| &\leqslant \int_0^t \underbrace{e^{s-t}(t-s)}_{\geqslant 0}\|g\|_\infty\,ds\\ &\leqslant N(f)e^{-t}\int_0^t e^s(t-s)\,ds.\end{aligned}$$

(Les bornes de l'intégrale sont rangées dans l'ordre croissant.)

Or, pour tout $t \in [0,1]$,

$$0 \leqslant e^{-t} \leqslant 1 \quad\text{et}\quad \forall\, 0 \leqslant s \leqslant t, \quad 0 \leqslant e^s(t-s) \leqslant e\cdot 1$$

donc

$$\forall\, t \in [0,1], \quad 0 \leqslant e^{-t}\int_0^t e^s(t-s)\,ds \leqslant e.$$

On a trouvé un majorant indépendant de $t \in [0,1]$, donc on peut passer au sup :

$$\forall\, f \in E, \qquad \|f\|_\infty \leqslant e\,N(f).$$

✍ *On vient de démontrer que la norme $\|\cdot\|_\infty$ est dominée par la norme N.*

Mais la norme N prend en compte les variations de f (présence de f' et de f''), alors que la norme $\|\cdot\|_\infty$ ne tient compte que de l'amplitude de f et pas de ses variations. Pour démontrer que les deux normes ne sont pas équivalentes, on va chercher des fonctions dont l'amplitude est limitée et dont les variations sont de plus en plus rapides.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall\, t \in [0,1], \quad f_n(t) = t\sin nt.$$

Il est clair que f_n est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$, que $f_n(0) = f_n'(0) = 0$ et que $\|f_n\|_\infty \leqslant 1$.

Mais

$$\forall\, t \in [0,1], \quad f_n(t) + 2f_n'(t) + f_n''(t) = [2 + (1-n^2)t]\sin nt + n(2+t)\cos nt$$

et en particulier $f_n(0) + 2f_n'(0) + f_n''(0) = 2n$, donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad N(f_n) \geqslant 2n.$$

Le quotient $N(f_n)/\|f_n\|_\infty$ tend vers $+\infty$, donc la norme N n'est pas dominée par la norme $\|\cdot\|_\infty$. Ces deux normes ne sont donc pas équivalentes.

Solution 76

Si les normes N_1 et N_2 sont égales, il est clair que les boules B_1 et B_2 sont égales.

❧ Réciproquement, supposons que $B_1 = B_2$. Pour tout vecteur $x \in E$ *non nul*,

$$\frac{x}{N_1(x)} \in B_1 = B_2,$$

donc

$$1 = N_2\Big(\frac{x}{N_1(x)}\Big) = \frac{N_2(x)}{N_1(x)}.$$

Par conséquent,

$$\forall\, x \in E, \quad N_1(x) = N_2(x).$$

✍ *On a démontré cette égalité pour $x \neq 0_E$ et elle est par ailleurs évidente pour $x = 0_E$.*

On a ainsi démontré que $N_1 = N_2$.

Solution 77

S'il existe un rang n_0 tel que $\alpha_{n_0} < 0$, alors l'application N prend au moins une valeur strictement négative : c'est impossible.

✍ *Il suffit de considérer la suite $u = \varepsilon_{n_0}$, dont tous les termes sont nuls sauf le terme de rang n_0 qui est égal à 1. Dans ces conditions, $N(\varepsilon_{n_0}) = \alpha_{n_0} < 0$.*

❧ S'il existe un rang n_0 tel que $\alpha_{n_0} = 0$, alors l'application N ne sépare pas les points : c'est impossible.

✍ *Même chose : $N(\varepsilon_{n_0}) = 0$ alors que $\varepsilon_{n_0} \neq 0_E$.*

❧ Si la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive sans être bornée, alors il existe une suite extraite $(\alpha_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \alpha_{\varphi(k)} \geqslant 2^k.$$

✍ *D'une manière générale, une suite réelle n'est pas bornée si, et seulement si, on peut en extraire une suite qui tend vers $+\infty$. On peut reprendre le principe de la démonstration pour obtenir le résultat plus précis que nous venons d'énoncer. Supposons connus des entiers*

$$0 \leqslant \varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(k)$$

tels que $\alpha_{\varphi(j)} \geqslant 2^j$ pour tout $0 \leqslant j \leqslant k$. L'ensemble des valeurs

$$\{\alpha_n,\ 0 \leqslant n \leqslant \varphi(k)\}$$

est fini, donc borné. Comme la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, on en déduit que l'ensemble

$$\{\alpha_n,\ n > \varphi(k)\}$$

n'est pas borné : il contient donc au moins un élément supérieur à 2^{k+1}.

Considérons alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad u_{\varphi(k)} = \frac{1}{2^k}$$

et $u_n = 0$ si $n \notin \varphi_*(\mathbb{N})$. Il est clair que cette famille est sommable (de somme 1) et que

$$N(u) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_{\varphi(k)} u_{\varphi(k)} = +\infty.$$

❧ Il faut donc que la famille $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une famille bornée de réels strictement positifs pour que l'application N soit une norme sur l'espace vectoriel des suites sommables.

❧ Réciproquement, supposons que la famille $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une famille bornée de réels strictement positifs. Tout d'abord,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \alpha_n |u_n| = |\alpha_n u_n| \leqslant \|\alpha\|_\infty |u_n|$$

et comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, on en déduit que la suite $(\alpha_n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable (par comparaison). Ainsi, N est bien une application de E dans $\mathbb{R}_+$.

❧ Par linéarité de la somme, l'application N est homogène.

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\, u \in E, \quad N(\lambda u) = |\lambda|\, N(u)$$

❧ L'application N sépare les points : si $N(u) = 0$, alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \alpha_n |u_n| = 0.$$

✍ *Une somme de réels positifs est nulle si, et seulement si, chaque terme est nul.*

Et comme les α_n sont tous *strictement* positifs,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 0.$$

❧ Enfin, l'application N vérifie l'inégalité triangulaire. On sait que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n|.$$

Comme les α_n sont des réels positifs, on en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \alpha_n |u_n + v_n| \leqslant \alpha_n |u_n| + \alpha_n |v_n|$$

et en sommant (puisque les trois familles sont sommables)

$$N(u + v) \leqslant N(u) + N(v).$$

❧ L'application N est donc une norme sur E si, et seulement si, la famille $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite sommable de réels strictement positifs.

Solution 78

1. Comme la suite $u \in E$ est (par hypothèse) bornée,

$$\frac{u_k}{2^k} \underset{k\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{2^k}\Big)$$

et comme la série géométrique $\sum 1/2^k$ est absolument convergente, la série $\sum |u_k|/2^k$ est convergente et sa somme est évidemment un réel positif. Par conséquent, N est bien une application définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

❧ L'application N est homogène par linéarité de la somme :

$$N(\lambda u) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|\lambda u_k|}{2^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} |\lambda| \, \frac{|u_k|}{2^k} = |\lambda| \, N(u).$$

❧ L'application N sépare les points : si $N(u) = 0$, alors

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \frac{|u_k|}{2^k} = 0$$

donc u est la suite nulle.

❧ D'après l'inégalité triangulaire,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \frac{|u_k + v_k|}{2^k} \leqslant \frac{|u_k|}{2^k} + \frac{|v_k|}{2^k}$$

donc l'application N vérifie l'inégalité triangulaire :

$$N(u+v) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|u_k + v_k|}{2^k} \leqslant N(u) + N(v).$$

❧ Donc N est bien une norme sur E.

✍ *Voir le cours pour $\|\cdot\|_\infty$.*

❧ La borne supérieure est un majorant, donc

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \frac{|u_k|}{2^k} \leqslant \frac{\|u\|_\infty}{2^k}$$

et en sommant ces inégalités, on obtient

$$\forall\, u \in E, \qquad N(u) \leqslant \|u\|_\infty \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2\|u\|_\infty.$$

Cette inégalité montre que la norme $\|\cdot\|_\infty$ domine la norme N.

❧ Pour démontrer que les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes, il suffit de trouver une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E telle que

$$\lim_{n\to+\infty} N(\varepsilon_n) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \|\varepsilon_n\|_\infty \neq 0.$$

À cette fin, on considère la suite

$$\varepsilon_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) = (\delta_{k,n})_{k\in\mathbb{N}}.$$

Il est clair que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \|\varepsilon_n\|_\infty = 1$$

et que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad N(\varepsilon_n) = \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par conséquent, la norme N ne domine pas la norme $\|\cdot\|_\infty$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de vecteurs de C qui converge (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$) vers le vecteur $\ell \in E$:

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n - \ell\|_\infty = 0. \tag{20}$$

Chaque vecteur u_n appartient à C, donc il existe un réel λ_n tel que

$$\lim_{k\to+\infty} u_n(k) = \lambda_n. \tag{21}$$

✍ *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est en fait une "suite de suites" puisque les vecteurs de E sont des suites. Ça facilite les confusions, méfiance ! Il faut en particulier bien distinguer la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur E) de la convergence de chaque suite $u_n \in C$ (pour la norme usuelle sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire pour $|\cdot|$).*

Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe donc un rang $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n \geqslant N_\varepsilon,\ \forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \big|u_n(k) - \ell(k)\big| \leqslant \varepsilon. \tag{22}$$

Par inégalité triangulaire,

$$\forall\, n, p \geqslant N_\varepsilon,\ \forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \big|u_n(k) - u_p(k)\big| \leqslant 2\varepsilon. \tag{23}$$

On peut faire tendre k vers $+\infty$ dans (23) et déduire de (21) que

$$\forall\, n, p \geqslant N_\varepsilon, \qquad \big|\lambda_n - \lambda_p\big| \leqslant 2\varepsilon, \tag{24}$$

ce qui prouve que la suite (réelle) $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

✍ *La relation (24) montre que la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le **critère de Cauchy** et il est bon de savoir (même si ce n'est pas au programme) que, dans tout espace vectoriel de dimension finie, le critère de Cauchy est une condition suffisante de convergence.*

❧ *Si on veut rester prudemment dans le cadre du programme, on peut déduire du critère de Cauchy (24) qu'il existe une suite extraite $(\lambda_{\varphi(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ telle que*

$$\forall\, m \in \mathbb{N}, \qquad \big|\lambda_{\varphi(m+1)} - \lambda_{\varphi(m)}\big| \leqslant 1/2^m.$$

Cet encadrement prouve que la série (télescopique) $\sum(\lambda_{\varphi(m+1)} - \lambda_{\varphi(m)})$ est absolument convergente et donc que la suite extraite $(\lambda_{\varphi(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ est convergente. On déduit facilement du critère de Cauchy (24) que la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet au plus une valeur d'adhérence, donc on a démontré que cette suite était convergente.

❧ *Par définition, un espace vectoriel normé E est dit **complet**, ou **espace de Banach**, si, et seulement si, toute suite qui vérifie le critère de Cauchy converge vers un vecteur de E.*

On peut démontrer qu'un espace vectoriel E est un espace de Banach si, et seulement si, toute série absolument convergente est en fait une série convergente.

❧ Notons donc $\lambda \in \mathbb{N}$, la limite de la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En combinant l'astuce taupinale et l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\forall\, k, n \in \mathbb{N}, \qquad |\ell(k) - \lambda| \leqslant |\ell(k) - u_n(k)| + |u_n(k) - \lambda_n| + |\lambda_n - \lambda|. \tag{25}$$

D'après (24) (en faisant tendre p vers $+\infty$),

$$\forall\, n \geqslant N_\varepsilon, \qquad |\lambda_n - \lambda| \leqslant \varepsilon. \tag{26}$$

En prenant $n = N_\varepsilon$ dans (22), on a

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \big|\ell(k) - u_{N_\varepsilon}(k)\big| \leqslant \varepsilon. \tag{27}$$

Toujours en prenant $n = N_\varepsilon$ dans (21), il existe un entier $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, k \geqslant K_\varepsilon, \qquad \big|u_{N_\varepsilon}(k) - \lambda_{N_\varepsilon}\big| \leqslant \varepsilon. \tag{28}$$

En combinant (26) [avec $n = N_\varepsilon$], (27) et (28), on déduit de (25) que

$$\forall\, k \geqslant K_\varepsilon, \qquad |\ell(k) - \lambda| \leqslant 3\varepsilon.$$

On a ainsi démontré que le vecteur $\ell \in E$ (= la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$) était bien une suite convergente et donc que le sous-espace C des suites convergentes était une partie fermée de E.

✍ *Cette démonstration est une adaptation du Théorème d'interversion des limites (ou Théorème de la double limite) : au lieu d'étudier des fonctions qui ont une limite finie au voisinage de $+\infty$ et qui convergent uniformément au voisinage de $+\infty$, on étudie des suites convergentes (= des fonctions définies sur $\mathbb{N}$ qui ont une limite finie au voisinage de $+\infty$) et qui convergent uniformément au voisinage de $+\infty$ (uniformément sur $\mathbb{N}$ en fait).*

3. Notons F, l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang.

✍ ***Rappels***

Un point u_0 est à l'intérieur d'une partie F si, et seulement si,

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0, \quad B(u_0, \varepsilon_0) \subset F.$$

Par conséquent, une partie F d'un espace vectoriel E est d'intérieur vide si, et seulement si,

$$\forall\, u \in F,\ \forall\, \varepsilon > 0, \quad B(u, \varepsilon) \cap F^c \neq \varnothing.$$

(Les boules considérées ici peuvent être ouvertes ou fermées, c'est sans importance.)

❧ Soit $u \in E$, une suite nulle à partir d'un certain rang :

$$\forall\, k \geqslant K_0, \qquad u_k = 0.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, la suite v_ε définie par

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad v_\varepsilon(k) = u_k + \varepsilon$$

vérifie $\|u - v_\varepsilon\|_\infty = \varepsilon$ et

$$\forall\, k \geqslant K_0, \qquad v_\varepsilon(k) = \varepsilon > 0.$$

L'ensemble F des suites nulles à partir d'un certain rang est donc une partie d'intérieur vide.

✍ ***Variante savante.***
On peut aussi vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E et se rappeler qu'un sous-espace vectoriel strict de E est toujours une partie d'intérieur vide.

❧ Toute suite $u \in F$ tend vers 0 (suite stationnaire), donc $F \subset C$ et comme C est fermé, l'adhérence de F est contenue dans C.

✍ *L'adhérence de F est le plus petit fermé qui contienne F et C est une partie fermée qui contient F.*

❧ L'application $[u \mapsto \lim u]$, définie sur le sous-espace C des suites convergentes et cette application est linéaire et continue :

$$\forall\, u \in C, \qquad \Big|\lim_{k\to+\infty} u_k\Big| \leqslant \|u\|_\infty.$$

Le sous-espace C_0 des suites convergentes de limite nulle est donc une partie fermée de C (image réciproque du singleton $\{0\}$ par une application définie et continue sur C). Comme C est une partie fermée de E, on en déduit que C_0 est aussi une partie fermée de E et que, par conséquent, l'adhérence de F est contenue dans C_0.

❧ Réciproquement, soit $u \in C_0$, une suite convergente de limite nulle. Pour tout indice $n \in \mathbb{N}$, on considère la suite v_n définie en tronquant la suite u après l'indice n :

$$v_n = (u_0, \dots, u_n, 0, \dots).$$

Il est clair que $v_n \in F$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \|u - v_n\|_\infty = \sup_{k>n} |u_k|.$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Comme la suite u converge vers 0, alors il existe un rang $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, k \geqslant N_\varepsilon, \qquad |u_k| \leqslant \varepsilon$$

et par conséquent

$$\forall\, n \geqslant N_\varepsilon, \qquad \|u - v_n\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

Cela prouve que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de vecteurs de F qui converge (pour $\|\cdot\|_\infty$) vers le vecteur $u \in C_0$.

❧ On a ainsi démontré que tout vecteur $u \in C_0$ était adhérent à F et donc que l'adhérence du sous-espace des suites nulles à partir d'un certain rang était le sous-espace des suites convergentes de limite nulle.

4. Notons G, l'ensemble des suites réelles bornées et strictement positives.

❧ Considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de G qui converge vers le vecteur $\ell \in E$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n(k) - \ell_k| \leqslant \|u_n - \ell\|_\infty$$

et en faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \ell_k = \lim_{n\to+\infty} u_n(k).$$

Comme les $u_n(k)$ sont tous (strictement) positifs, on en déduit que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \ell_k \geqslant 0.$$

✍ *Ici encore, nous retrouvons un énoncé classique du cours : la convergence uniforme implique la convergence simple.*

Réciproquement, considérons une suite bornée $\ell \in E$ dont tous les termes sont positifs (au sens large). Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit alors le vecteur $u_n \in E$ en posant

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad u_n(k) = \ell(k) + 2^{-n}.$$

Il est clair que le vecteur u_n est une suite réelle bornée (somme de la suite bornée ℓ et d'une suite constante) et que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \|\ell - u_n\|_\infty = 2^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par conséquent, toute suite réelle bornée et positive est limite (pour $\|\cdot\|_\infty$) d'une suite de suites réelles bornées et strictement positives.

❧ On a donc démontré (par double inclusion) que l'adhérence du sous-ensemble G des suites réelles strictement positives était le sous-ensemble des suites réelles positives.

✍ *Ni G, ni son adhérence ne sont des sous-espaces vectoriels de E, mais ce sont tous les deux des parties convexes de E.*

✍ ***Variante savante.***
Pour démontrer que l'ensemble G_0 des suites réelles positives est un fermé, on pouvait aussi remarquer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'application $\varphi_k = [u \mapsto u(k)]$ est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ et que cette application linéaire est continue :

$$\forall\, u \in E, \qquad \big|\varphi_k(u)\big| = |u(k)| \leqslant \|u\|_\infty.$$

L'image d'une partie fermée de $\mathbb{R}$ par une application continue de E dans $\mathbb{R}$ est une partie fermée de E, donc

$$\varphi_k^*\big([0, +\infty[\big)$$

est une partie fermée de E pour tout $k \in \mathbb{N}$ et par conséquent

$$G_0 = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \varphi_k^*\big([0, +\infty[\big)$$

est une partie fermée de E (en tant qu'intersection d'une famille de parties fermées).

❧ Considérons un vecteur u appartenant à l'intérieur de la partie G.

✍ *Comme les inégalités larges sont conservées par passage à la limite, toutes les valeurs d'adhérence de u (s'il en existe...) sont des réels positifs (au sens large).*

Par définition, il existe donc un réel $\varepsilon > 0$ tel que la boule $B(u, \varepsilon)$ soit tout entière contenue dans G. En particulier, la suite $u - \varepsilon$ est dans G, donc

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad u(k) - \varepsilon > 0.$$

On en déduit que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad u(k) > \varepsilon$$

ce qui prouve que 0 n'est pas une valeur d'adhérence de la suite u.

❧ Réciproquement, considérons une suite $u \in G$ bornée et strictement positive et supposons qu'elle admette 0 pour valeur d'adhérence. Il existe donc une suite extraite $\big(u[\varphi(m)]\big)_{m\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0.

Pour tout $\varepsilon > 0$, le réel $\varepsilon/2$ est strictement positif et il existe donc un rang $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, m \geqslant M_\varepsilon, \qquad \big|u[\varphi(m)] - 0\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dans ces conditions,

$$u[\varphi(M_\varepsilon)] - \varepsilon < 0$$

et cette inégalité prouve que la boule (fermée) de centre u et de rayon ε n'est pas contenue dans le sous-ensemble G des suites strictement positives. Autrement dit, le vecteur u n'est pas un point intérieur à G.

❧ Nous avons démontré (par double inclusion) que l'intérieur du sous-ensemble des suites réelles bornées et strictement positives était l'ensemble des suites réelles bornées strictement positives qui n'admettait pas 0 pour valeur d'adhérence.

Solution 79

1. On peut considérer P comme une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, l'application $|P'|$ est une fonction continue sur le segment $[0,1]$ et l'intégrale est bien définie.

Ainsi, l'application N_a est bien définie sur $\mathbb{R}[X]$ et (évidemment) à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

❧ Par linéarité de la dérivation, de l'intégrale et de l'évaluation, l'application N_a est homogène.

$$\begin{aligned} N_a(\lambda P) &= \big|(\lambda P)(a)\big| + \int_0^1 \big|\lambda P'(t)\big|\,dt \\ &= |\lambda|\,\big|P(a)\big| + \int_0^1 |\lambda|\,\big|P'(t)\big|\,dt \\ &= |\lambda|\,N_a(P). \end{aligned}$$

❧ D'après l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$,

$$\big|(P+Q)(a)\big| \leqslant \big|P(a)\big| + \big|Q(a)\big| \quad \text{et} \quad \forall\, t \in [0,1], \quad \big|(P+Q)'(t)\big| \leqslant \big|P'(t)\big| + \big|Q'(t)\big|.$$

Les inégalités sont conservées par intégration bornes croissantes, donc

$$N_a(P+Q) \leqslant \big|P(a)\big| + \big|Q(a)\big| + \int_0^1 \big|P'(t)\big|\,dt + \int_0^1 \big|Q'(t)\big|\,dt = N_a(P) + N_a(Q)$$

et l'application N_a vérifie l'inégalité triangulaire.

❧ Si $N_a(P) = 0$, alors $P(a) = 0$ et

$$\int_0^1 \big|P'(t)\big|\,dt = 0.$$

(Une somme de réels *positifs* est nulle si, et seulement si, chaque terme est nul.)

La fonction $|P'|$ est continue et positive sur $[0,1]$, donc elle est en fait identiquement nulle sur $[0,1]$ et comme P' est un polynôme, elle est en fait identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, le polynôme P est constant et comme $P(a) = 0$, on en déduit que P est le polynôme nul.

2. D'après l'inégalité triangulaire,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \big|N_a(x_n) - N_a(x)\big| \leqslant N_a(x_n - x). \tag{$\star$}$$

Cet encadrement montre que : si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le vecteur x, alors la suite réelle de terme général $N_a(x_n)$ converge vers le réel $N(x)$.

✍ *L'encadrement ($\star$) signifie en fait que l'application N_a est une application lipschitzienne de (E, N_a) dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ — avec une constante de Lipschitz égale à 1.*

3. Pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$N_a(P_n) = \left(\frac{a}{2}\right)^n + \int_0^1 \frac{nt^{n-1}}{2^n}\,dt = \left(\frac{a}{2}\right)^n + \frac{1}{2^n}.$$

Par conséquent,

— si $|a| < 2$, alors $N_a(P_n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$;

— si $a = 2$, alors $N_a(P_n)$ tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$;

— sinon, $N_a(P_n)$ diverge (bornée pour $a = -2$, non bornée pour $|a| > 2$).

❧ Si $|a| < 2$, on a en fait démontré que

$$\lim_{n\to+\infty} N_a(P_n - 0) = 0,$$

ce qui signifie que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le polynôme nul.

❧ Si $a \in]-\infty,-2] \cup]2,+\infty[$, on déduit de la question précédente que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

❧ Enfin, si $a = 2$, en posant $Q_n = P_n - 1$, on a

$$N_2(Q_n - 0) = \big|Q_n(2)\big| + \int_0^1 \big|Q_n'(t)\big|\,dt = \big|P_n(2) - 1\big| + \int_0^1 \big|P_n'(t)\big|\,dt = \frac{1}{2^n}$$

ce qui prouve que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le polynôme 1.

✍ *On ne doit pas être surpris de constater des comportements différents : l'espace $\mathbb{R}[X]$ est un espace de dimension infinie, il est naturel que des normes sur cet espace ne soit pas équivalentes.*

Solution 80

1. ✍ *On sait que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur l'espace des fonctions bornées.*

Soit $f \in E$.

▶ Comme f et f' sont continues sur le segment $[0,1]$, les trois fonctions f, f' et $(f+f')$ sont bornées, donc $N(f)$ et $N'(f)$ sont bien définies et évidemment positives.

▶ Par linéarité de la dérivation et par homogénéité de $\|\cdot\|_\infty$, les deux applications N et N' sont positivement homogènes et vérifient l'inégalité triangulaire.

▶ Comme $0 \leqslant \|f\|_\infty \leqslant N(f)$, si $N(f) = 0$, alors $f = 0_E$ (puisque $\|\cdot\|_\infty$ sépare les points).

De même, si $N'(f) = 0$, alors $f + f' = 0_E$, donc il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = Ke^x$ pour tout $x \in [0,1]$. Comme $f(0) = 0$, on en déduit que $f = 0_E$.

Donc N et N' séparent les points.

❧ Donc N et N' sont deux normes sur E.

2. Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction

$$\left[t \mapsto e^t\big(f(t)+f'(t)\big)\right]$$

est continue sur l'intervalle $[0,1]$, donc (Théorème fondamental) le second membre est de classe $\mathscr{C}^1$ et sa dérivée est égale à

$$e^x\big(f(x)+f'(x)\big) = \frac{d}{dx}\left[e^x f(x)\right]$$

pour tout $x \in [0,1]$. Par ailleurs, les deux expressions sont nulles pour $x = 0$.

Les deux expressions sont égales en un point et leurs dérivées sont égales sur l'intervalle $[0,1]$, donc les deux expressions sont égales sur tout l'intervalle :

$$\forall\, x \in [0,1], \quad e^x f(x) = \int_0^x e^t\big(f(t)+f'(t)\big)\,dt.$$

3. Par inégalité triangulaire, $N'(f) \leqslant N(f)$, donc $a = 1$ convient.

Réciproquement, d'après la question précédente, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\big|f(x)\big| = \left|e^{-x}\int_0^x e^t\big(f(t)+f'(t)\big)\,dt\right| \leqslant e^{-x}\int_0^1 e^t\big|f(t)+f'(t)\big|\,dt \leqslant (e-1)\|f+f'\|_\infty.$$

Comme le majorant est indépendant de x, on en déduit que

$$\|f\|_\infty \leqslant (e-1)N'(f).$$

Par inégalité triangulaire,

$$\|f'\|_\infty = \|(f'+f)+(-f)\|_\infty \leqslant \|f'+f\|_\infty + \|f\|_\infty \leqslant eN'(f)$$

et finalement

$$\forall\, f \in E, \quad N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leqslant (2e-1)N'(f).$$