Composition de Mathématiques

Le 10 septembre 2025 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

❖ Problème ❖

Partie A. Questions de cours

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} = (u_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$, une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. a. Quelles sont, selon la définition des suites extraites, les propriétés de φ ?

1. b. Démontrer que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \varphi(k) \geqslant k.$$

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. a. Pour quelles valeurs de α la suite de terme général $z_n = e^{in\alpha}$ est-elle convergente ?

2. b. Pour quelles valeurs de α les suites de termes généraux

$$x_n = \cos n\alpha \qquad \text{et} \qquad y_n = \sin n\alpha$$

sont-elles convergentes ?

2. c. On suppose que $\sin\alpha \neq 0$. Démontrer que la suite de terme général

$$u_n = a\cos n\alpha + b\sin n\alpha$$

est convergente si, et seulement si, $a = b = 0$.

3. On considère trois nombres complexes a, b et c avec $a \neq 0$. On note s_1 et s_2, les racines complexes du trinôme $aX^2 + bX + c$. Donner (sans justification) les expressions de $\sigma_1 = s_1 + s_2$ et de $\sigma_2 = s_1 s_2$ en fonction de a, b et c.

4. On considère deux nombres réels a et $b \neq 0$ et une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}, \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Donner l'expression générale de u_n en fonction de $n \in \mathbb{Z}$ et des racines complexes r_1 et r_2 de l'équation caractéristique.

☞ *On remarquera que, dans cette question, les suites considérées sont indexées par l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.*

Partie B. Suites biconvergentes

On note E, l'espace vectoriel des suites réelles $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ indexées par $\mathbb{Z}$ et bornées.
Une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est dite ***convergente à droite*** *lorsque la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente ;* ***convergente à gauche*** *lorsque la suite $(x_{-k})_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente et* ***biconvergente*** *lorsqu'elle est convergente à droite et à gauche.*
On note $\mathscr{C}$, l'ensemble des suites réelles $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ biconvergentes.

5. Démontrer que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de E.

6. Soit $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in E$, une suite monotone.

6. a. Démontrer que cette suite x appartient à $\mathscr{C}$.

6. b. Donner un exemple explicite d'une suite $x \in E$ strictement croissante.

On définit deux applications S et T sur l'espace vectoriel $\mathscr{C}$ en posant :

$$\forall\, x \in \mathscr{C}, \qquad S(x) = (x_{-k})_{k\in\mathbb{Z}} \qquad \textit{et} \qquad T(x) = (x_{k-1} + x_{k+1})_{k\in\mathbb{Z}}.$$

7. Démontrer que S est un endomorphisme de $\mathscr{C}$.

8. Démontrer que les ensembles

$$F = \{x \in \mathscr{C} \,:\, \forall\, k \in \mathbb{Z},\ x_{-k} = x_k\} \qquad \text{et} \qquad G = \{x \in \mathscr{C} \,:\, \forall\, k \in \mathbb{Z},\ x_{-k} = -x_k\}$$

sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathscr{C}$.

9. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

9. a. On suppose que $|\lambda| \neq 2$. Démontrer que

$$\operatorname{Ker}(T - \lambda\, I_{\mathscr{C}}) = \{0\}.$$

9. b. Déterminer les sous-espaces $\operatorname{Ker}(T - 2\, I_{\mathscr{C}})$ et $\operatorname{Ker}(T + 2\, I_{\mathscr{C}})$.

10. L'endomorphisme T est-il injectif ? surjectif ?

Partie C. Topologies des suites biconvergentes

Pour toute suite $u \in E$, on pose

$$\|u\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |u_k| \qquad \textit{et} \qquad \|u\| = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|u_k| + |u_{-k}|}{2^k}.$$

On note K, l'ensemble des suites dont tous les termes appartiennent au segment $[-1, 1]$:

$$K = [-1, 1]^{\mathbb{Z}}.$$

On considère enfin, pour $k \in \mathbb{Z}$, la suite

$$\sigma_k = \big(\sigma_k(j)\big)_{j \in \mathbb{Z}}$$

définie par

$$\forall\, j \in \mathbb{Z}, \qquad \sigma_k(j) = \delta_{j,k}$$

(où $\delta_{j,k}$ est le symbole de Kronecker).

11. Démontrer que $\|\cdot\|_\infty$ est bien une norme sur E.

12. Démontrer que $\sigma_k \in K$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

13. Calculer $\|\sigma_k - \sigma_{k'}\|_\infty$ en fonction des entiers relatifs k et k'. En déduire que la suite $(\sigma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ diverge pour $\|\cdot\|_\infty$.

14. Démontrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.

15. Démontrer que la norme $\|\cdot\|$ est dominée par la norme $\|\cdot\|_\infty$, mais que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

☞ *On pourra vérifier que la suite $(\sigma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente pour $\|\cdot\|$.*

On considère maintenant les prolongements naturels de S et T à l'espace E :

$$\forall\, x \in E, \qquad S(x) = (x_{-k})_{k \in \mathbb{Z}} \qquad \textit{et} \qquad T(x) = (x_{k-1} + x_{k+1})_{k \in \mathbb{Z}}$$

et on pose

$$F_0 = \{x \in E \,:\, \forall\, k \in \mathbb{Z},\ x_{-k} = x_k\} \qquad \textit{et} \qquad G_0 = \{x \in E \,:\, \forall\, k \in \mathbb{Z},\ x_{-k} = -x_k\}.$$

16. Démontrer que l'application linéaire S est continue sur E pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ et pour la norme $\|\cdot\|$.

17. Démontrer que les sous-espaces vectoriels F_0 et G_0 sont fermés dans E pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ et pour la norme $\|\cdot\|$.

18. Démontrer que l'application linéaire T est continue sur E pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ et pour la norme $\|\cdot\|$. Calculer la norme triple dans les deux cas.

19. Dans cette question, l'espace E est muni de la topologie définie par la norme $\|\cdot\|_\infty$.

19. a. Démontrer que la partie K est fermée et bornée mais n'est pas compacte.

19. b. Démontrer que l'adhérence de l'intérieur de K est égale à K.

20. Dans cette question, l'espace E est muni de la topologie définie par la norme $\|\cdot\|$.

20. a. Démontrer que la partie K est fermée et bornée.

20. b. Démontrer que le sous-espace $\mathscr{C}$ n'est pas fermé pour $\|\cdot\|$.

20. c. Démontrer que la partie K est compacte.

20. d. Démontrer que l'adhérence de l'intérieur de K est strictement contenue dans K.

Solution ❀ Suites bornées

Partie A. Questions de cours

1. a. La suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si, et seulement si, φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

> *Une telle application φ est communément appelée* ***extractrice****.*

1. b. Nous allons procéder par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

❧ Comme $\varphi(0) \in \mathbb{N}$, il est clair que $\varphi(0) \geqslant 0$.

[HR] – Supposons qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(k) \geqslant k$. Comme φ est *strictement* croissante et que $(k+1) > k$, alors

$$\varphi(k+1) > \varphi(k).$$

Or $\varphi(k)$ et $\varphi(k+1)$ sont des entiers, donc en fait

$$\varphi(k+1) \geqslant \varphi(k) + 1 \overset{\textbf{[HR]}}{\geqslant} k+1.$$

❧ On a ainsi démontré par récurrence que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \varphi(k) \geqslant k.$$

> *S'il fallait donner un nom à ce résultat, je l'appellerais volontiers la* ***propriété fondamentale des extractrices*** *: on s'en sert rarement mais quand il faut s'en servir, il vaut mieux ne pas l'avoir oubliée...*

2. a. Nous allons procéder par analyse et synthèse.

❧ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|z_n| = 1$. Si la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors sa limite ℓ vérifie aussi $|\ell| = 1$. Comme $\ell \neq 0$,

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\ell}{\ell} = 1,$$

Il faut donc que $e^{i\alpha} = 1$.

❧ Réciproquement, si $e^{i\alpha} = 1$, alors $z_n = (e^{i\alpha})^n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

❧ On a démontré que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, $e^{i\alpha} = 1$, c'est-à-dire si $\alpha = 0$ modulo 2π.

2. b. Si les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, alors la suite de terme général

$$z_n = x_n + iy_n$$

est convergente et, d'après la question précédente, $e^{i\alpha} = 1$.

❧ Si une seule des deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente ou si ces deux suites sont divergentes, alors $e^{i\alpha} \neq 1$ et la situation est plus délicate.

Les formules d'addition nous donnent :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \begin{aligned} x_{n+1} &= \cos\alpha\cdot x_n - \sin\alpha\cdot y_n, \\ y_{n+1} &= \sin\alpha\cdot x_n + \cos\alpha\cdot y_n. \end{aligned}$$

Si $\sin\alpha \neq 0$, on en déduit que

$$y_n = \frac{x_{n+1} - \cos\alpha\cdot x_n}{\sin\alpha} \quad \text{et} \quad x_n = \frac{y_{n+1} - \cos\alpha\cdot y_n}{\sin\alpha}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

❧ Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et si la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, il faut donc que $\sin\alpha = 0$. C'est absurde, car α est alors congru à 0 modulo π et dans ce cas, la $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergerait aussi.

Si la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, il faut aussi que $\sin\alpha = 0$ et donc $e^{i\alpha} = \pm 1$. Comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, le seul cas possible est $e^{i\alpha} = -1$.

❧ Ayant envisagé tous les cas possibles, on peut conclure.

- Si $\alpha = 0 \pmod{2\pi}$, alors les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont constantes ($x_n = 1$ et $y_n = 0$).
- Si $\alpha = \pi \pmod{2\pi}$, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge ($x_n = (-1)^n$) et la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est identiquement nulle.
- Pour toutes les autres valeurs de α ($\sin\alpha \neq 0$), les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

2. c. Si $a = b = 0$, alors il est clair que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

❧ Réciproquement, supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente. Alors, comme $\sin\alpha \neq 0$, la suite de terme général

$$v_n = \frac{u_{n+1} - \cos\alpha\cdot u_n}{\sin\alpha} = b\cos n\alpha - a\sin n\alpha$$

est convergente elle aussi.

> *La suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente en tant que suite extraite d'une suite convergente.*
> *Toute combinaison linéaire de suites convergentes est elle aussi convergente.*

On en déduit que la suite de terme général

$$a\cdot u_n + b\cdot v_n = (a^2+b^2)\cos n\alpha$$

est convergente. Or la suite $(\cos n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente (cf. question précédente), donc le facteur constant (a^2+b^2) doit être nul. Comme a et b sont réels, on en déduit qu'il faut que $a = b = 0$ pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente.

❧ On a ainsi démontré que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, $a = b = 0$.

3. On doit absolument connaître les deux principales formules reliant les coefficients et les racines d'un polynôme.

$$\sigma_1 = \frac{-b}{a} \qquad \sigma_2 = \frac{c}{a}.$$

> *Pour faciliter la mémorisation, on peut retenir l'expression suivante des trinômes* unitaires *:*
>
> $$X^2 - SX + P.$$
>
> *Il reste à factoriser par a (supposé non nul ici) pour en retrouver les formules dans le cas du trinôme $aX^2 + bX + c$.*

4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre deux. L'équation caractéristique associée à cette relation est

$$\lambda^2 - a\lambda - b = 0.$$

Comme $b \neq 0$ (par hypothèse), 0 n'est pas solution de cette équation caractéristique.

❧ Si l'équation caractéristique admet deux racines complexes distinctes (et non nulles) r_1 et r_2, alors il existe deux nombres complexes λ et μ tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

Il reste à étudier le cas des indices négatifs. À cet effet, on pose

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad v_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n,$$

ce qui a bien un sens car $r_1 \neq 0$ et $r_2 \neq 0$. Par définition de λ et μ, on sait que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n.$$

Il reste à vérifier que

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}_-, \quad u_n = v_n$$

et, pour cela, nous allons démontrer par récurrence que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{-n+1} = v_{-n+1}.$$

On sait que $u_1 = v_1$ ($n = 0$) et que $u_0 = v_0$ ($n = 1$). De plus, la suite $(u_{-n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{-n+1} = a u_{-n} + b u_{-n-1}.$$

Pour sa part, la suite $(v_{-n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation

$$\begin{aligned} v_{-n+1} &- a v_{-n} - b v_{-n-1} \\ &= \lambda r_1^{-n-1}(r_1^2 - a r_1 - b) + \mu r_2^{-n-1}(r_2^2 - a r_2 - b) \\ &= 0 \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ (puisque r_1 et r_2 vérifient l'équation caractéristique).

Les deux suites $(u_{-n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_{-n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont égales pour $n = 0$ et pour $n = 1$; elles vérifient la même relation de récurrence linéaire d'ordre deux, donc ces deux suites sont égales.

On a ainsi démontré qu'il existe deux scalaires λ et μ tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

> *Comme a et b sont réels, si le discriminant du polynôme caractéristique est strictement négatif (soit $a^2 + 4b < 0$), alors les racines r_1 et r_2 sont conjuguées et comme les termes u_n sont réels, les scalaires λ et μ sont conjugués eux aussi.*
> *Si le discriminant est strictement positif, alors les racines r_1 et r_2 sont réelles et les scalaires λ et μ sont réels également.*

❧ Si l'équation caractéristique admet une racine double r (on a $r_1 = r_2$ dans le cas où $a^2 + 4b = 0$ et cette racine est réelle, non nulle car $b \neq 0$), alors il existe deux nombres réels λ et μ tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + \mu n) r^n.$$

On en déduit par récurrence (exactement comme on l'a fait dans le cas général) que

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad u_n = (\lambda + \mu n) r^n.$$

Partie B. Suites biconvergentes

5. Toute suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ convergente est bornée, donc toute suite biconvergente $u \in E = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ est bornée :

$$\mathscr{C} \subset E$$

et on sait que E est un espace vectoriel (ce qui est rappelé dans l'énoncé).

❧ La suite nulle de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ est biconvergente, donc elle appartient à $\mathscr{C}$.

❧ Soient u et v, deux suites réelles biconvergentes et $\lambda \in \mathbb{R}$, un scalaire. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on pose

$$w_k = \lambda u_k + v_k \in \mathbb{R}.$$

Les deux suites $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(w_{-k})_{k\in\mathbb{N}}$ sont convergentes (en tant que combinaisons linéaires de deux suites convergentes), donc la suite w est biconvergente, ce qui prouve que $\mathscr{C}$ est stable par combinaison linéaire.

❧ On a ainsi démontré que $\mathscr{C}$ était un sous-espace vectoriel de E.

6. a. Supposons que la suite $x \in E$ soit croissante. Par construction de E, cette suite x est bornée.

La suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée, donc x est convergente à droite (Théorème de convergence monotone).

La suite $(x_{-k})_{k\in\mathbb{N}}$ est pour sa part **décroissante** et minorée, donc x est convergente à gauche.

La suite x est donc biconvergente.

> *On est prié d'être très précis pour justifier la biconvergence de x !*

❧ De même, toute suite décroissante $x \in E$ est biconvergente.

On a ainsi démontré que toute suite monotone $x \in E$ appartient au sous-espace $\mathscr{C}$.

6. b. La suite x définie par

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad x_k = \frac{1}{1 + e^{-k}}$$

est strictement croissante (composée de fonctions strictement monotones).

De plus, la suite x converge (vers 1) à droite et converge (vers 0) à gauche, donc elle est bornée et appartient de ce fait à E.

7. Soit $x \in \mathscr{C}$. Comme la suite x est convergente à droite, la suite $S(x)$ est convergente à gauche. De même, comme la suite x est convergente à gauche, la suite $S(x)$ est convergente à droite. Donc $S(x) \in \mathscr{C}$.

❧ Soient x et y, deux suites appartenant à $\mathscr{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, un scalaire. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on pose

$$z_k = \lambda x_k + y_k.$$

La suite z appartient à $\mathscr{C}$ (structure d'espace vectoriel) et

$$S(z) = (\lambda x_{-k} + y_{-k})_{k\in\mathbb{Z}} = \lambda \cdot (x_{-k})_{k\in\mathbb{Z}} + (y_{-k})_{k\in\mathbb{Z}}.$$

Autrement dit :

$$S(\lambda x + y) = \lambda S(x) + S(y),$$

ce qui prouve que l'application $S : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ est bien linéaire.

❧ On a ainsi démontré que S était un endomorphisme de $\mathscr{C}$.

8. Il est assez clair que

$$\forall\, x \in \mathscr{C}, \qquad (S \circ S)(x) = x.$$

Comme S est un endomorphisme de $\mathscr{C}$, on en déduit d'abord que S est une **symétrie** et ensuite que

$$\mathscr{C} = \mathrm{Ker}(S - I_{\mathscr{C}}) \oplus \mathrm{Ker}(S + I_{\mathscr{C}}).$$

❧ D'après les définitions,

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathscr{C}, \quad x \in F &\iff S(x) = x \\ &\iff (S - I_{\mathscr{C}})(x) = 0 \\ x \in G &\iff S(x) = -x \\ &\iff (S + I_{\mathscr{C}})(x) = 0. \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$F = \mathrm{Ker}(S - I_{\mathscr{C}}) \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Ker}(S + I_{\mathscr{C}})$$

et par conséquent

$$\mathscr{C} = F \oplus G.$$

Les deux ensembles F et G sont donc bien des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{C}$ (en tant que noyaux d'endomorphismes de $\mathscr{C}$) et ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathscr{C}$.

> *On peut traiter cette question par le calcul, sans reconnaître que S est une symétrie et sans connaître le cours sur les symétries. Mais on y perd beaucoup de temps !*

9. a. Considérons une suite $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathscr{C}$ appartenant au noyau de $(T - \lambda\, I_{\mathscr{C}})$:

$$T(x) = \lambda \cdot x.$$

Par définition de T, cela équivaut au fait que

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad x_{k+2} - \lambda x_{k+1} + x_k = 0.$$

Les *deux* suites $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(x_{-k})_{k\in\mathbb{N}}$ vérifient la *même* relation de récurrence linéaire d'ordre deux, dont l'équation caractéristique est

$$u^2 - \lambda u + 1 = 0.$$

> *Plus généralement, si on avait*
>
> $$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad a x_{k+2} + b x_{k+1} + c x_k = 0,$$
>
> *alors l'équation caractéristique de la relation de récurrence linéaire d'ordre deux vérifiée par $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ serait*
>
> $$au^2 + bu + c = 0$$
>
> *cependant que l'équation caractéristique de la relation de récurrence vérifiée par $(x_{-k})_{k\in\mathbb{N}}$ serait*
>
> $$cu^2 + bu + a = 0$$
>
> *(puisque les indices* décroissent *pour cette deuxième suite).*

❧ Comme $|\lambda| \neq 2$, le discriminant de cette équation est non nul et cette équation admet deux racines (réelles ou complexes) distinctes.

❧ Le produit de ces deux racines est égal à 1 **[4.]**.

Premier cas : Si les deux racines ont même module, ce module est égal à 1 et comme ces racines sont inverses l'une de l'autre (le produit est égal à 1), elles sont conjuguées. On peut dans ce cas supposer que

$$r_1 = e^{i\alpha} \quad \text{et} \quad r_2 = e^{-i\alpha}$$

avec $0 < \alpha < \pi$.

> *Pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$, les deux racines seraient égales. Ce cas sera traité au* **[9.b.]**.

Comme les x_k sont réels, il existe donc deux réels a et b tels que

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad x_k = a\cos n\alpha + b\sin n\alpha.$$

Par hypothèse, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente, donc **[2.c.]** $a = b = 0$.

Le même raisonnement s'applique à la suite $(x_{-k})_{k\in\mathbb{N}}$, donc

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad x_k = 0$$

et finalement $x = 0_{\mathscr{C}}$.

Comme $\mathrm{Ker}(T - \lambda\, I_{\mathscr{C}})$ est un sous-espace de $\mathscr{C}$, on en déduit que

$$\mathrm{Ker}(T - \lambda\, I_{\mathscr{C}}) = \{0_{\mathscr{C}}\}.$$

Deuxième cas : Si les deux racines ont des modules distincts, comme elles sont inverses l'une de l'autre, on peut supposer que

$$0 < |r_1| < 1 < |r_2|.$$

Il existe deux nombres complexes a et b tels que

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad x_k = a r_1^k + b r_2^k.$$

> *Les x_k sont* réels *mais a priori les racines r_1 et r_2 de l'équation caractéristique sont complexes et, de ce fait, les constantes a et b sont a priori complexes.*

Lorsque k tend vers $+\infty$, r_1^k tend vers 0 (car $|r_1| < 1$) et r_2^k tend vers l'infini (car $|r_2| > 1$). Or la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente, donc $b = 0$.

Il reste donc $x_k = a r_1^k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Lorsque k tend vers $-\infty$, r_1^k tend vers l'infini (car $1/|r_1| > 1$) et la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}_-}$ est elle aussi convergente, donc $a = 0$.

Dans ce cas aussi, le noyau de $(T - \lambda\, I_{\mathscr{C}})$ est réduit à la suite nulle.

9. b. Soit $x \in \mathrm{Ker}(T - 2\, I_{\mathscr{C}})$.

❧ Pour $\lambda = 2$, l'équation caractéristique est

$$u^2 - 2u + 1 = (u-1)^2 = 0,$$

donc **[4.]** il existe deux réels a et b tels que

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad x_k = (a + bk).$$

Comme la suite x est biconvergente, il faut $b = 0$.

Réciproquement, toute suite constante x appartient bien à $\mathscr{C}$ et vérifie

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad x_k = \frac{x_{k-1} + x_{k+1}}{2}.$$

Donc le noyau de $(T - 2\, I_{\mathscr{C}})$ est la droite vectorielle des suites constantes.

❧ Pour $\lambda = -2$, de même, il existe deux réels a et b tels que

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad x_k = (a + bk)(-1)^k.$$

Comme la suite x est bornée, il faut que $b = 0$. Il reste donc

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad x_k = a(-1)^k.$$

Comme cette suite est biconvergente, il faut aussi que $a = 0$. Par conséquent,

$$\operatorname{Ker}(T + 2\,I_{\mathscr{C}}) = \{0_{\mathscr{C}}\}.$$

> *Le spectre de l'endomorphisme T est donc réduit à $\{2\}$ et son unique sous-espace propre est une droite vectorielle.*

10. D'après **[9.a.]** (pour $\lambda = 0$), le noyau de T est réduit à la suite nulle, donc l'endomorphisme T est injectif.

> *Pour démontrer que T n'est pas surjectif, on procède en deux temps :*
> — *une première analyse du problème posé dégage une condition nécessaire sur les suite $y \in \mathscr{C}$ qui admettent un antécédent par T et on comprend que cette condition nécessaire ne peut pas toujours être satisfaite ;*
> — *ensuite, on présente un contre-exemple explicite.*

❧ Soit $y \in \mathscr{C}$ et supposons que la suite y admette un antécédent $x \in \mathscr{C}$ par l'endomorphisme T. On a alors

$$\forall\, p \in \mathbb{Z}, \qquad y_{2p+1} = x_{2p+2} + x_{2p}.$$

On en déduit en particulier que

$$\begin{aligned} y_{4k+1} &- y_{4k-1} \\ &= y_{2(2k)+1} - y_{2(2k-1)+1} \\ &= \big(x_{2(2k)+2} + x_{2(2k)}\big) - \big(x_{2(2k-1)+2} + x_{2(2k-1)}\big) \\ &= x_{4k+2} - x_{4k-2} \end{aligned}$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$. On en déduit par récurrence (télescopage) que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} (y_{4k+1} - y_{4k-1}) = x_{4n+2} - x_2.$$

Comme la suite $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ converge à droite, la suite extraite $(x_{4n+2})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et il faut donc que la série $\sum(y_{4k+1} - y_{4k-1})$ converge.

❧ Considérons la suite $y = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par

$$\forall\, p \in \mathbb{Z}, \quad y_{2p+1} = \frac{(-1)^p}{\sqrt{p^2+1}} \quad \text{et} \quad y_{2p} = 0.$$

Les deux suites $(y_{2p})_{p\in\mathbb{Z}}$ et $(y_{2p+1})_{p\in\mathbb{Z}}$ convergent (à gauche et à droite) vers 0, donc la suite y est biconvergente : $y \in \mathscr{C}$.

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} y_{4k+1} - y_{4k-1} &= y_{2(2k)+1} - y_{2(2k-1)+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4k^2+1}} - \frac{-1}{\sqrt{4k^2-4k+2}} \end{aligned}$$

donc

$$y_{4k+1} - y_{4k-1} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k}.$$

On en déduit que la série $\sum(y_{4k+1} - y_{4k-1})$ est divergente (comparaison à la série harmonique) et, d'après l'analyse qui précède, la suite y n'a pas d'antécédent par T.

❧ On a ainsi démontré que T n'était pas surjective.

Partie C. Topologies des suites biconvergentes

11. C'est à nouveau une question de cours (à peine modifiée).

❧ L'ensemble E est bien un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

❧ **[Application positive]**

Par définition, toute suite $x \in E$ est bornée, donc l'ensemble

$$\big\{|x_n|,\ n \in \mathbb{Z}\big\}$$

est une famille <u>non vide</u> et <u>bornée</u> de réels positifs.

On en déduit que la borne supérieure $\|x\|_\infty$ est bien définie (Axiome de la borne supérieure) et qu'elle est positive. Ainsi, $\|\cdot\|_\infty$ est bien une application de E dans $\mathbb{R}_+$.

❧ **[Homogénéité]**

Quel que soit le scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}, \qquad |\lambda x_n| = |\lambda| \cdot |x_n|$$

et $|\lambda|$ est un réel **positif**, donc

$$\|\lambda x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |\lambda| \cdot |x_n| = |\lambda| \sup_{n\in\mathbb{Z}} |x_n| = |\lambda| \|x\|_\infty.$$

❧ **[Séparation]**

Si $\|x\|_\infty = 0$, alors

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leqslant |x_n| \leqslant \|x\|_\infty = 0$$

(puisque la borne supérieure est un majorant) et donc

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad x_n = 0$$

c'est-à-dire $x = 0_E$.

❧ **[Inégalité triangulaire]**

Considérons deux suites x et y dans E. Par inégalité triangulaire (dans $\mathbb{R}$),

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad |x_n + y_n| \leqslant |x_n| + |y_n|.$$

La borne supérieure est un majorant, donc

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad |x_n + y_n| \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Le second est indépendant du paramètre n, c'est donc un majorant et, par passage à la borne supérieure,

$$\|x + y\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |x_n + y_n| \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

❧ On a démontré que $\|\cdot\|_\infty$ était bien une norme sur E.

12. Tous les termes, sauf un ! de la suite σ_k sont nuls, donc cette suite est bornée : $\sigma_k \in E$.

Par ailleurs, l'unique terme non nul est égal à 1, donc

$$\forall\, j \in \mathbb{Z}, \quad \sigma_k(j) \in [-1, 1]$$

et chaque suite σ_k appartient donc à K.

13. Si $k = k'$, il est clair que

$$\|\sigma_k - \sigma_{k'}\|_\infty = 0.$$

Si $k \neq k'$, alors

$$\begin{aligned} \sigma_k(k) - \sigma_{k'}(k) &= 1 - 0 = 1 \\ \sigma_k(k') - \sigma_{k'}(k') &= 0 - 1 = -1 \\ \forall\, j \in \mathbb{Z} \setminus \{k, k'\}, \quad \sigma_k(j) - \sigma_{k'}(j) &= 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

donc

$$\|\sigma_k - \sigma_{k'}\|_\infty = 1.$$

❧ Si la suite $(\sigma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ était convergente pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, alors en particulier

$$\lim_{k\to+\infty} \|\sigma_k - \sigma_{k-1}\|_\infty = 0.$$

Or, d'après ce qui précède,

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad \|\sigma_k - \sigma_{k-1}\|_\infty = 1.$$

Donc la suite $(\sigma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est divergente (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$).

> *Il est important de bien préciser* "pour la norme $\|\cdot\|_\infty$". *D'une part, cela évite tout risque d'ambiguité (l'énoncé a déjà évoqué une autre norme sur l'espace* E*) et, surtout ! on montre ainsi qu'on a remarqué que l'espace* E *était un espace vectoriel de* dimension infinie *et que les normes sur cet espace n'étaient pas toutes équivalentes.*

14. On a rappelé plus haut **[11.]** que E était bien un espace vectoriel (réel).

❧ Toute suite $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ dans E est bornée **[5.]** et la borne supérieure est un majorant, donc

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \frac{|x_k| + |x_{-k}|}{2^k} \leqslant \frac{\|x\|_\infty + \|x\|_\infty}{2^k}. \qquad (1)$$

La série $\sum (1/2)^k$ est absolument convergente (série géométrique de raison $1/2 \in]-1, 1[$), donc la série

$$\sum \frac{|x_k| + |x_{-k}|}{2^k}$$

est convergente (comparaison de deux séries de termes généraux positifs) et sa somme est un réel positif.

La quantité $\|x\|$ est donc bien définie pour toute suite $x \in E$. Autrement dit : l'application $\|\cdot\|$ est bien définie sur E et à valeurs positives.

❧ Par linéarité de la somme sur les séries convergentes, il est clair que l'application $\|\cdot\|$ est absolument homogène :

$$\forall\, (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E, \quad \|\lambda \cdot x\| = |\lambda|\, \|x\|.$$

❧ Une somme de réels positifs est nulle si, et seulement si, chaque terme est nul. Par conséquent, si $\|x\| = 0$, alors

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad |x_k| + |x_{-k}| = 0$$

et donc, pour la même raison,

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad x_k = 0.$$

Donc $\|\cdot\|$ vérifie bien la propriété de séparation des points.

❧ Enfin, quelles que soient les suites x et y dans E,

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad |x_k + y_k| \leqslant |x_k| + |y_k|$$

(inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$). On en déduit que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{|x_k + y_k| + |x_{-k} + y_{-k}|}{2^k} \leqslant \frac{|x_k| + |x_{-k}|}{2^k} + \frac{|y_k| + |y_{-k}|}{2^k}.$$

Comme x, y et $x + y$ appartiennent à E, on peut sommer ces inégalités et comme les inégalités larges sont conservées, on en déduit que

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

Donc $\|\cdot\|$ vérifie aussi l'inégalité triangulaire.

❧ Donc $\|\cdot\|$ est bien une norme sur E.

15. D'après (1) **[14.]**,

$$\forall\, x \in E, \quad \|x\| \leqslant 2\|x\|_\infty \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 4\|x\|_\infty$$

donc la norme $\|\cdot\|$ est dominée par la norme $\|\cdot\|_\infty$.

❧ Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\|\sigma_k\| = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{|\delta_{j,k}| + |\delta_{-j,k}|}{2^j} = \frac{1}{2^k}.$$

> *Attention !* $\|\sigma_0\| = 2$ *mais c'est sans importance pour la suite du raisonnement.*

Par conséquent, la suite $(\sigma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la suite nulle pour la norme $\|\cdot\|$:

$$\lim_{k\to+\infty} \|\sigma_k - 0_{\mathscr{C}}\| = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2^k} = 0.$$

❧ Une même suite de vecteurs est convergente pour la norme $\|\cdot\|$ et divergente pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ **[13.]**, donc les deux normes ne sont pas équivalentes.

16. On a déjà justifié la linéarité de S **[7.]**.

❧ Il est par ailleurs clair que

$$\forall\, x \in E, \quad \big\|S(x)\big\| = \|x\| \quad \text{et que} \quad \big\|S(x)\big\|_\infty = \|x\|_\infty$$

donc l'endomorphisme S est continu pour la norme $\|\cdot\|$ et pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

> *C'est même une isométrie pour les deux normes.*

17. Par définition,

$$\forall\, x \in E, \quad \begin{cases} x \in F_0 \iff S(x) = x \\ x \in G_0 \iff S(x) = -x. \end{cases}$$

Autrement dit,

$$F_0 = \operatorname{Ker}(S - I_E) \quad \text{et} \quad G_0 = \operatorname{Ker}(S + I_E).$$

On sait **[16.]** que S est continue. Par ailleurs, I_E est un endomorphisme continu de E.

> *Quel que soit l'espace vectoriel normé* $(V, \|\cdot\|_V)$*, l'identité est une isométrie de* $(V, \|\cdot\|_V)$ *sur* $(V, \|\cdot\|_V)$ *:*
>
> $$\forall\, x \in V, \quad \|I_V(x)\|_V = \|x\|_V$$
>
> *et comme c'est une application linéaire, cela prouve qu'elle est continue.*

Donc les deux endomorphismes $(S - I_E)$ et $(S + I_E)$ sont continus (combinaisons linéaires d'endomorphismes continus) et par conséquent, F_0 et G_0 sont fermés (images réciproques du fermé $\{0_E\}$ par une application continue).

Dans tout espace métrique, *les parties finies sont fermées.*

Les sous-espaces $F = F_0 \cap \mathscr{C}$ *et* $G = G_0 \cap \mathscr{C}$ *définis plus haut* **[8.]** *sont donc des fermés relatifs à* $\mathscr{C}$.

18. La borne supérieure est un majorant, donc

$$\forall\, j \in \mathbb{Z}, \quad |x_j| \leqslant \|x\|_\infty.$$

Par conséquent,

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad \big|T(x)(k)\big| \leqslant |x_{k-1}| + |x_{k+1}| \leqslant 2\|x\|_\infty.$$

L'application *linéaire* T est donc continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans lui-même et, pour cette norme, $|||T||| \leqslant 2$.

La suite constante définie par $x_k = 1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ appartient bien à E et **[9.b.]** $T(x) = 2x$, donc

$$\|x\|_\infty = 1 \quad \text{et} \quad \|T(x)\|_\infty = 2.$$

On en déduit que

$$|||T||| = \sup_{\|x\|_\infty = 1} \|T(x)\|_\infty \geqslant 2$$

(puisque la borne supérieure est un majorant) et finalement que $|||T||| = 2$.

❧ Par définition, pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned}\big\|T(x)\big\| &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|T(x)(k)| + |T(x)(-k)|}{2^k}\\ &= 2|T(x)(0)| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|T(x)(k)| + |T(x)(-k)|}{2^k}\\ &\leqslant 2(|x_1| + |x_{-1}|) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|x_{k-1}| + |x_{-(k-1)}|}{2^k}\\ &\qquad + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|x_{k+1}| + |x_{-(k+1)}|}{2^k}\end{aligned}$$

par inégalité triangulaire. Or (changement d'indice)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|x_{k-1}| + |x_{-(k-1)}|}{2^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|x_k| + |x_{-k}|}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}\|x\|$$

et de manière analogue

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|x_{k+1}| + |x_{-(k+1)}|}{2^k} &= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|x_k| + |x_{-k}|}{2^{k-1}}\\ &= 2\Big(\|x\| - 2|x_0| - \frac{|x_1| + |x_{-1}|}{2}\Big).\end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned}\big\|T(x)\big\| &\leqslant \frac{5}{2}\|x\| - 4|x_0| + |x_1| + |x_{-1}|\\ &\leqslant \frac{5}{2}\|x\| + 2\|x\| = \frac{9}{2}\|x\|\end{aligned}$$

On a ainsi prouvé que l'application linéaire T est continue de $(E, \|\cdot\|)$ dans lui-même et que, pour cette norme, $|||T||| \leqslant 9/2$.

Si les majorations précédentes sont assez simples, elles sont néanmoins assez fines pour nous laisser deviner un cas d'égalité : on relit ce qui précède et on cherche un moyen de transformer les inégalités en égalités.
On doit savoir que, dans $\mathbb{R}$,

$$|u + v| = |u| + |v|$$

si, et seulement si, u *et* v *sont de même signe.*

Considérons la suite x définie par

$$x = (\ldots, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, \ldots)$$

ou plus précisément par

$$x_{\pm 1} = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, k \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\}, \quad x_k = 0.$$

Il est clair que cette suite est bornée : $x \in E$ et que $\|x\| = 1$ (il suffit d'appliquer la définition).

On en déduit que

$$T(x) = (\ldots, 0, 0, 1, 0, 2, 0, 1, 0, 0, \ldots)$$

ou si on préfère :

$$y_0 = 2, \quad y_{\pm 2} = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 2\}, \quad y_k = 0.$$

Par conséquent,

$$\big\|T(x)\big\| = \frac{2+2}{1} + \frac{1+1}{2^2} = \frac{9}{2} = \frac{9}{2}\|x\|.$$

Comme plus haut, on en déduit que

$$|||T||| = 9/2.$$

19. a. Par construction,

$$\forall\, x \in E, \quad x \in K \iff \|x\|_\infty \leqslant 1.$$

Autrement dit, la partie K est la boule unité fermée de l'espace E pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Il est donc clair que K est une partie fermée et bornée de E pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

❧ On sait **[12.]** que

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad \sigma_k \in K.$$

Considérons une suite extraite $(\sigma_{\varphi(j)})_{j \in \mathbb{N}}$ convergente et de limite $\ell \in K$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ (en admettant qu'il existe une telle suite). Pour tout $j \in \mathbb{N}$, les indices $\varphi(j)$ et $\varphi(j+1)$ sont distincts **[1.a.]**, donc **[13.]**

$$\begin{aligned}1 &= \|\sigma_{\varphi(j+1)} - \sigma_{\varphi(j)}\|_\infty\\ &= \|\sigma_{\varphi(j+1)} - \ell + \ell - \sigma_{\varphi(j)}\|_\infty\\ &\leqslant \|\sigma_{\varphi(j+1)} - \ell\|_\infty + \|\ell - \sigma_{\varphi(j)}\|_\infty.\end{aligned}$$

Mais, par hypothèse,

$$\lim_{j \to +\infty} \|\sigma_{\varphi(j+1)} - \ell\|_\infty = \lim_{j \to +\infty} \|\ell - \sigma_{\varphi(j)}\|_\infty = 0,$$

ce qui est contradictoire.

On a trouvé une suite $(\sigma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de K qui n'a pas de valeur d'adhérence, donc la partie K n'est pas compacte.

19. b. Quel que soit l'espace vectoriel normé considéré, l'intérieur de la boule unité fermée est la boule unité ouverte et l'adhérence de la boule unité ouverte est la boule unité fermée.

Comme K est la boule unité fermée de l'espace E pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, l'adhérence de l'intérieur de K est égale à K lui-même.

20. a. Considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de K qui converge vers $\ell \in E$ pour la norme $\|\cdot\|$. On a donc en particulier

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad |u_n(k)-\ell(k)|+|u_n(-k)-\ell(-k)| \leqslant 2^k\|u_n-\ell\|.$$

On en déduit que

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \qquad \lim_{n\to+\infty}|u_n(k)-\ell(k)| = 0$$

par encadrement. On a ainsi démontré que

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad \ell(k) = \lim_{n\to+\infty} u_n(k)$$

et comme, par définition de K,

$$\forall\, k \in \mathbb{Z},\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n(k) \in [-1,1],$$

on en déduit que

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad \ell(k) \in [-1,1].$$

> *Les segments,* intervalles fermés, *sont stables par passage à la limite.*

Par conséquent, la limite ℓ appartient bien à K. On a démontré que la partie K était stable par passage à la limite selon la norme $\|\cdot\|$, c'est donc une partie fermée de l'espace $(E, \|\cdot\|)$.

❧ D'après **[15.]** et **[19.a.]**,

$$\forall\, u \in K, \quad \|u\| \leqslant 4\|u\|_\infty \leqslant 4$$

donc K est aussi une partie bornée pour la norme $\|\cdot\|$.

20. b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall\, j \in [\![0,n]\!], \quad \tau_n(2j) = 1$$

et

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}\setminus\{0,2,\dots,2n\}, \quad \tau_n(k) = 0.$$

Il est clair que τ_n est biconvergente (son terme général $\tau_n(k)$ est nul pour $|k|$ assez grand), donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \tau_n \in \mathscr{C}.$$

❧ Posons aussi

$$\forall\, k \in 2\mathbb{N}, \quad \ell(k) = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}\setminus 2\mathbb{N}, \quad \ell(k) = 0.$$

La suite ℓ ainsi définie est bornée ($\ell \in E$), convergente à gauche (car nulle à partir d'un certain rang) mais divergente à droite (une suite extraite converge vers 0, une autre suite extraite converge vers 1). Donc $\ell \notin \mathscr{C}$.

❧ Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall\, k \leqslant 2n, \quad \ell(k)-\tau_n(k) = 0$$

et

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad \ell(k)-\tau_n(k) \in \{0;\ 1\}.$$

Par conséquent,

$$\|\ell-\tau_n\| \leqslant \sum_{k=2n+1}^{+\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{4^n}.$$

On a ainsi prouvé que

$$\lim_{n\to+\infty}\|\ell-\tau_n\| = 0,$$

donc $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de vecteurs de $\mathscr{C}$ qui converge (pour la norme $\|\cdot\|$) vers la suite $\ell \in E\setminus\mathscr{C}$.

❧ Le sous-espace vectoriel $\mathscr{C}$ n'est donc pas fermé pour la norme $\|\cdot\|$.

> *On a démontré en cours que tout sous-espace vectoriel* de dimension finie *était fermé.*
> *Le sous-espace $\mathscr{C}$ n'étant pas un sous-espace de dimension finie, on ne doit pas être étonné de constater qu'il n'est pas fermé.*
> *On peut en revanche démontrer que $\mathscr{C}$ est fermé pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Cela non plus n'est pas étonnant car les deux normes considérées ne sont pas équivalentes.*

20. c. Considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de K et démontrons qu'il existe une suite extraite

$$(v_p)_{p\in\mathbb{N}} = (u_{\psi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$$

qui converge vers une suite $\ell \in K$ pour la norme $\|\cdot\|$.

> *Nous considérons ici une suite de vecteurs de $\mathscr{C}$ et comme les vecteurs de $\mathscr{C}$ sont des suites réelles, on considère une "suite de suites".*
> *Pour avoir une chance raisonnable d'arriver au terme du raisonnement sans embrouille, il faut mettre les notations de notre côté.*
> *Nous avons noté $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de vecteurs de $\mathscr{C}$, donc chaque u_n représente une suite réelle. Nous noterons les termes de cette suite*
>
> $$u_n = \big(u_n(k)\big)_{k\in\mathbb{Z}} \quad \textit{au lieu de} \quad u_n = (u_{n,k})_{k\in\mathbb{Z}}.$$
>
> *Cette notation s'inspire des* suites de fonctions *: les deux indices k et n occupent des positions distinctes qui permettent facilement d'identifier leurs rôles respectifs.*

> *On a démontré en cours la compacité de l'"hypercube" $[-1,1]^d$ pour la norme produit au moyen d'extractions successives.*
> *On travaille ici dans un hypercube de dimension dénombrable, on va s'inspirer de la méthode vue en cours en la complétant par un* ***argument d'extraction diagonale*** *pour conclure.*

❧ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel $u_n(0)$ appartient au compact $[-1,1]$, donc il existe une extractrice φ_0 et un réel $\ell(0) \in [-1,1]$ tels que

$$\lim_{m\to+\infty} u_{\varphi_0(m)}(0) = \ell(0).$$

❧ **[HR]** Supposons que, pour un entier $k \in \mathbb{N}$, on connaisse des extractrices

$$\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k$$

et des réels

$$-1 \leqslant \ell(0), \ell(1), \dots, \ell(k) \leqslant 1$$

tels que

$$\lim_{m\to+\infty} u_{\varphi_0(m)}(0) = \ell(0),$$
$$\lim_{m\to+\infty} u_{\varphi_0\circ\varphi_1(m)}(\pm 1) = \ell(\pm 1), \ \dots$$
$$\lim_{m\to+\infty} u_{\varphi_0\circ\varphi_1\circ\dots\circ\varphi_k(m)}(\pm k) = \ell(\pm k).$$

❧ Alors la composée

$$\psi_k = \varphi_0 \circ \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_k$$

est une extractrice et

$$\forall\, 0 \leqslant j \leqslant k, \quad \lim_{m\to+\infty} u_{\psi_j(m)}(\pm j) = \ell(\pm j)$$

(puisque toute suite extraite d'une suite convergente est elle-même convergente et tend vers la même limite).

> *Tout segment est un compact de $\mathbb{R}$ (pour la topologie usuelle), donc le carré $[-1,1]\times[-1,1]$ est un compact de $\mathbb{R}^2$ (pour la topologie usuelle) en tant que produit cartésien de parties compactes.*

Lorsque l'indice m parcourt $\mathbb{N}$, les couples de réels

$$\big(u_{\psi_k(m)}(-k-1),\ u_{\psi_k(m)}(k+1)\big)$$

varient dans le compact $[-1,1]\times[-1,1]$, donc il existe une extractrice φ_{k+1} et deux réels $\ell(k+1)$ et $\ell(-k-1)$ dans $[-1,1]$ tels que

$$\lim_{m\to+\infty} u_{\psi_k\circ\varphi_{k+1}(m)}\big(\pm(k+1)\big) = \ell\big(\pm(k+1)\big).$$

On a ainsi démontré par récurrence (forte) que la propriété **[HR]** était vraie pour tout $k\in\mathbb{N}$.

❧ Pour tout entier $p\in\mathbb{N}$, on pose

$$v_p = u_{\psi_p(p)}.$$

Comme φ_{p+1} est une extractrice **[1.b.]**,

$$\varphi_{p+1}(p+1) \geqslant p+1$$

et comme ψ_p est strictement croissante,

$$\psi_{p+1}(p+1) = \psi_p\big(\varphi_{p+1}(p+1)\big) \geqslant \psi_p(p+1) > \psi_p(p).$$

Ainsi, la suite

$$\big(\psi_p(p)\big)_{p\in\mathbb{N}}$$

est une suite <u>strictement</u> croissante d'entiers, donc la suite $(v_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bien une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

❧ Considérons également la suite

$$\ell = \big(\ell(k)\big)_{k\in\mathbb{Z}}.$$

Par construction, cette suite est un vecteur de K.

Il reste à vérifier que la suite extraite $(v_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ pour la norme $\|\cdot\|$.

❧ Considérons deux entiers naturels $p \leqslant q$.

Comme $v_q\in K$ et que $\ell\in K$,

$$\forall\, k\in\mathbb{Z}, \quad \big|v_q(k)-\ell(k)\big| \leqslant 2$$

donc

$$\forall\, k \geqslant p+1, \quad \frac{\big|v_q(k)-\ell(k)\big| + \big|v_q(-k)-\ell(-k)\big|}{2^k} \leqslant \frac{4}{2^k}$$

et on sait que (série géométrique)

$$\sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{4}{2^k} = \frac{1}{2^{p-2}}.$$

Par ailleurs, pour tout $k\in[\![-p,p]\!]$,

$$v_q(k) = u_{\psi_q(q)}(k)$$
$$= u_{\psi_k\circ\varphi_{k+1}\circ\dots\circ\varphi_q(q)}(k).$$

> *Nous avons fixé les entiers p et q en imposant $p\leqslant q$. Nous allons maintenant faire varier ces entiers. La contrainte $p\leqslant q$ que nous avons imposée nous permet de faire tendre q vers $+\infty$ (l'entier p restant fixé pour le moment) <u>avant</u> de faire tendre p vers $+\infty$.*

❧ Par **[1.b.]**,

$$\forall\, q\in\mathbb{N}, \qquad \varphi_{k+1}\circ\dots\circ\varphi_q(q) \geqslant q$$

donc

$$\lim_{q\to+\infty} \varphi_{k+1}\circ\dots\circ\varphi_q(q) = +\infty$$

et

$$u_{\psi_k\circ\varphi_{k+1}\circ\dots\circ\varphi_q(q)}(k) \xrightarrow[q\to+\infty]{} \ell(k)$$

puisque

$$\lim_{m\to+\infty} u_{\psi_k(m)} = \ell(k).$$

> *Si une suite converge vers ℓ, toute suite extraite converge aussi et tend également vers ℓ.*

Une somme finie de suites de limite nulle est encore une suite de limite nulle, donc

$$\lim_{q\to+\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{\big|v_q(k)-\ell(k)\big| + \big|v_q(-k)-\ell(-k)\big|}{2^k} = 0.$$

❧ Fixons maintenant un réel $\varepsilon>0$. Il est clair que

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{2^{p-2}} = 0.$$

Donc, si l'entier p est choisi assez grand, on a

$$\frac{1}{2^{p-2}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

L'entier p étant ainsi fixé, on déduit de ce qui précède qu'il existe un rang $Q_0 \geqslant p$ assez grand pour que

$$\forall\, q \geqslant Q_0, \quad \sum_{k=0}^{p} \frac{\big|v_q(k)-\ell(k)\big| + \big|v_q(-k)-\ell(-k)\big|}{2^k} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a ainsi démontré qu'il existait un entier $Q_0\in\mathbb{N}$ assez grand pour que

$$\forall\, q \geqslant Q_0, \quad 0 \leqslant \|v_q-\ell\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

❧ Nous pouvons (enfin) conclure : d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs appartenant à K, on peut toujours extraire une suite $(v_q)_{q\in\mathbb{N}}$ qui converge (pour la norme $\|\cdot\|$) vers un vecteur $\ell \in K$.

Autrement dit : la partie K est une partie compacte de l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.

20. d. Soit

$$u_0 = \big(u_0(k)\big)_{k\in\mathbb{Z}},$$

un point de K. Par définition de K,

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \quad \big|u_0(k)\big| \leqslant 1.$$

Par définition, le vecteur u_0 est un point intérieur de K si, et seulement si, K est un voisinage de u_0 (pour la norme $\|\cdot\|$), c'est-à-dire s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, v \in \mathscr{C}, \quad \|v - u_0\| \leqslant \alpha \implies v \in K.$$

❧ Fixons $\alpha > 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, considérons la suite

$$v_n = u_0 + 2^n \alpha \sigma_n$$

(où σ_n est la suite définie par l'énoncé). La suite v_n appartient à l'espace E (en tant que combinaison linéaire de deux suites de E) et

$$\|v_n - u_0\| = 2^n \alpha \|\sigma_n\| = \alpha$$

(par absolue homogénéité de la norme $\|\cdot\|$ et **[15.]**).

La norme $\|\cdot\|_\infty$ est elle aussi absolument homogène, donc

$$\|v_n - u_0\|_\infty = 2^n \alpha.$$

Si on choisit l'entier n assez grand (en fonction de α, qui a déjà été fixé), alors $\|v_n - u_0\|_\infty > 2$ et donc

$$\|v_n\|_\infty \geqslant \|v_n - u_0\|_\infty - \|u_0\|_\infty > 2 - 1$$

par inégalité triangulaire.

On en déduit que, si n est choisi assez grand, alors

$$\|v_n - u_0\| \leqslant \alpha \quad \text{tandis que} \quad v_n \notin K.$$

Nous venons ainsi de démontrer que K n'est pas un voisinage de u_0 pour $\|\cdot\|$, quel que soit $u_0 \in K$.

Autrement dit, pour la norme $\|\cdot\|$, l'intérieur de K est l'ensemble vide. Comme l'ensemble vide est fermé, l'adhérence de l'intérieur de K est vide elle aussi et donc distincte de K.

> *En résumé :*
> *Pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, la partie K est fermée et bornée mais non compacte et son intérieur est dense dans K.*
> *Pour la norme $\|\cdot\|$, la partie K est fermée, bornée, compacte et d'intérieur vide.*