Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une famille sommable. On considère une bijection

$$[n \mapsto r_n]$$

de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q} \cap [0, 1[$ et les "intervalles rationnels" I_p définis par

$$\forall 0 < p < 1, \quad I_p = \mathbb{Q} \cap]p, 1[.$$

Étudier la limite de

$$s(p) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ r_n \in I_p}} a_n$$

lorsque p tend vers 1.

Si les vecteurs a_n appartiennent à un espace vectoriel E de dimension finie normé par $\|\cdot\|$, alors la famille de terme général

$$\alpha_n = \|a_n\|$$

est une famille sommable de réels positifs.

↳ La notion de familles sommables a un sens pour des familles de nombres réels ou complexes, des familles de vecteurs dans un espace vectoriel de dimension finie et plus généralement des familles de vecteurs dans un espace vectoriel normé complet.

Dans un espace qui n'est pas complet (= lorsque la convergence absolue d'une série n'entraîne pas la convergence la série), il n'est pas possible de définir la somme d'une famille sommable.

• Toute sous-famille d'une famille sommable est elle-même sommable, donc la somme $s(p)$ est bien définie, quel que soit $0 < p < 1$.

• L'ensemble $I_0 = \mathbb{Q} \cap [0, 1[$ est dénombrable, donc il existe bien une énumération $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de cet ensemble.

Puisqu'une énumération de I_0 est une bijection de $\mathbb{N}$ sur I_0 , pour tout rationnel $q \in I_0$, il existe un, et un seul, entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $r_n = q$. Posons alors

$$\forall q \in I_0, \quad \beta_q = \alpha_n.$$

La famille $(\beta_q)_{q \in I_0}$ est donc une famille sommable de réels positifs et, on l'a déjà rappelé, toute sous-famille d'une famille sommable est elle aussi sommable.

Pour tout $0 < p < 1$, nous noterons

$$\sigma(p) = \sum_{q \in I_p} \beta_q.$$

Par inégalité triangulaire,

$$\forall 0 < p < 1, \quad \|s(p)\| \leq \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ r_n \in I_p}} \|a_n\| = \sum_{q \in I_p} \beta_q = \sigma(p). \quad (*)$$

• Quels que soient $0 < p \leq p' < 1$, l'intervalle rationnel $I_{p'}$ est contenu dans I_p et comme les β_q sont positifs, on en déduit que la fonction σ est décroissante et positive :

$$\forall 0 < p \leq p' < 1, \quad 0 \leq \sigma(p') = \sum_{q \in I_{p'}} \beta_q \leq \sum_{q \in I_p} \beta_q = \sigma(p).$$

Par conséquent, la fonction σ tend vers une limite positive (finie).

↳ À ce stade, il faut avoir compris que la somme $\sigma(p)$ est une sorte de "reste" et on doit se souvenir qu'un reste tend vers 0 (qu'il s'agisse du reste d'une série convergente ou du reste d'une intégrale convergente).

• Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(\beta_q)_{q \in I_0}$ est une famille sommable de réels positifs, il existe un sous-index fini $J_\varepsilon \subset I_0$ tel que

$$0 \leq \sum_{q \in I_0 \setminus J_\varepsilon} \beta_q \leq \varepsilon.$$

Comme J_ε est un ensemble fini de réels, il a un plus grand élément et comme $1 \notin I_0$, ce plus grand élément est strictement inférieur à 1. Par conséquent, pour $0 < p < 1$ assez grand, on a

$$J_\varepsilon \subset [0, p]$$

et donc

$$I_p = \mathbb{Q} \cap]p, 1[\subset I_0 \setminus J_\varepsilon.$$

Comme les β_q sont *positifs*, on en déduit que

$$0 \leq \sigma(p) = \sum_{q \in I_p} \beta_q \leq \sum_{q \in I_0 \setminus J_\varepsilon} \beta_q \leq \varepsilon.$$

Nous venons de démontrer que la fonction σ tend vers 0 au voisinage gauche de 1.

• On déduit alors de (*) que

$$\lim_{p \rightarrow 1} s(p) = 0_E$$

par encadrement.

• Le résultat est valable indépendamment de l'énumération choisie pour l'index I_0 .

• **Variante.** Si on remplace l'intervalle rationnel $I_p = \mathbb{Q} \cap]p, 1[$ par $F_p = \mathbb{Q} \cap]p, 1]$, alors

$$s(p) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ r_n \in I_p}} a_n$$

est remplacé par

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ r_n \in F_p}} a_n = s(p) + a_{n_1}$$

où n_1 est l'unique entier tel que $r_{n_1} = 1$. Dans ces conditions,

$$\lim_{p \rightarrow 1} \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ r_n \in F_p}} a_n = 0_E + a_{n_1} = a_{n_1}$$

et, cette fois, la limite dépend de l'énumération choisie.