Compléments d'algèbre linéaire

I

Bases en dimension quelconque

I.1 Combinaisons linéaires

1. On considère un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$, qui peut être égal à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{C}$.

2. Familles presque nulles

2.1 ✍ *Le* **support** *d'une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est l'ensemble $\{i \in I : x_i \neq 0_E\}$.*

2.2 ✍ *Une famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ est une* **famille presque nulle** *lorsque son support est fini.*

2.3 On définit de la même manière les familles presque nulles de scalaires.

2.4 Toute famille finie est presque nulle.

2.5 ✍ *Soit $(x_i)_{i\in I}$, une famille presque nulle de vecteurs, dont le support est noté $I_0 \subset I$. La* **somme** *de la famille $(x_i)_{i\in I}$ est le vecteur*

$$\sum_{i\in I_0} x_i.$$

Elle est notée $\sum_{i\in I} x_i$.

2.6 Pour tout sous-index J, *fini ou non*, tel que $I_0 \subset J \subset I$,

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in J} x_i.$$

3. Combinaisons linéaires

L'opération fondamentale des espaces vectoriels est la combinaison linéaire. C'est le résultat d'un nombre *fini* d'additions de vecteurs et de multiplications d'un vecteur par un scalaire.

3.1 ✍ *Un vecteur $y \in E$ est une* **combinaison linéaire** *des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ de E si, et seulement si, il existe une famille de scalaires $(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{K}^n$ telle que*

$$y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k.$$

3.2 ✍ *Un vecteur $y \in E$ est une* **combinaison linéaire** *de la famille $(x_i)_{i\in I}$ si, et seulement si, il existe un ensemble* fini *$J \subset I$ d'indices et une famille de scalaires $(\lambda_k)_{k\in J}$ tels que*

$$y = \sum_{k\in J} \lambda_k \cdot x_k.$$

3.3 Le vecteur y est une combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{i\in I}$ si, et seulement si, il existe une famille presque nulle de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I}$ telle que

$$y = \sum_{i\in I} \lambda_i \cdot x_i.$$

4. Sous-espace engendré

4.1 ➙ *L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de la famille $(x_i)_{i\in I}$ est un sous-espace vectoriel de E.*

4.2 ✍ *L'***espace vectoriel engendré** *par la famille $(x_i)_{i\in I}$ est l'ensemble, noté $\mathrm{Vect}(x_i,\ i \in I)$, des combinaisons linéaires des vecteurs de la famille $(x_i)_{i\in I}$.*

4.3 ✍ *La famille $(x_i)_{i\in I}$ est une* **famille génératrice** *de E, ou* **engendre l'espace vectoriel** *E, lorsque*

$$\mathrm{Vect}(x_i,\ i \in I) = E.$$

4.4 Si la famille $(x_i)_{i\in I}$ engendre l'espace E et si l'application $f : E \to F$ est linéaire, alors la famille $\big(f(x_i)\big)_{i\in I}$ engendre le sous-espace $\mathrm{Im}\, f \subset F$.

I.2 Familles libres, familles liées

5. Relations de liaison

Soit $(x_i)_{i\in I}$, une famille de vecteurs de l'espace vectoriel E.

5.1 ✍ *Une* **relation de liaison** *entre les vecteurs de la famille $(x_i)_{i\in I}$ est une égalité de la forme*

$$\sum_{i\in I} \alpha_i x_i = 0_E$$

où $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une famille presque nulle de scalaires.

5.2 Les seules relations de liaison intéressantes, dites ***relations de liaison non triviales***, sont celles pour lesquelles la famille de scalaires $(\alpha_i)_{i\in I}$ n'est pas la famille identiquement nulles.

5.3 ✍ *Une famille de vecteurs est* **liée** *lorsqu'il existe une relation de liaison non triviale entre les vecteurs de cette famille.*
Une famille de vecteurs est **libre** *lorsqu'elle n'est pas liée.*

5.4 Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

5.5 ✍ *Un espace vectoriel E est un* **espace de dimension infinie** *lorsqu'il existe une famille libre de vecteurs de E dont le cardinal est infini.*

6. Méthodes

6.1 ➙ *La famille* finie *$(x_i)_{i\in I}$ est libre si, et seulement si, la seule famille presque nulle de scalaires $(\alpha_i)_{i\in I}$ telle que*

$$\sum_{i\in I} \alpha_i \cdot x_i = 0_E$$

est la famille nulle.

6.2 Une famille *quelconque* $(x_i)_{i\in I}$ est libre si, et seulement si, toute sous-famille finie $(x_{i_k})_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre.

6.3 ➙ *Une famille $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre si, et seulement si, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la sous-famille $(u_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre.*

7. Exemples de familles libres

7.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note δ_n, la suite dont tous les termes sont nuls, sauf le terme d'indice n qui est égal à 1. La famille $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre et engendre le sous-espace des suites nulles à partir d'un certain rang.

7.2 Les exemples suivants utilisent des arguments d'Analyse pour démontrer l'absence de relation de liaison autre que la relation triviale.

1. Une combinaison linéaire de fonctions continues est une fonction continue, donc la famille $\big(\mathbb{1}_{[a,+\infty[}\big)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.
2. Une combinaison linéaire de fonctions dérivables est dérivable, donc la famille $\big([t \mapsto |t-a|]\big)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.
3. Il arrive qu'on puisse, par dérivation ou par comparaison des ordres de grandeur, déduire d'une relation de liaison non triviale une autre relation de liaison sur un plus petit nombre de vecteurs.
   - 3.a La famille $\big([t \mapsto \exp(at)]\big)_{a\in\mathbb{C}}$ est libre.
   - 3.b La famille $\big([t \mapsto \cos(at)]\big)_{a\in\mathbb{R}_+}$ est libre.
   - 3.c La famille $\big([n \mapsto q^n]\big)_{q\in\mathbb{R}}$ est libre.

I.3 Bases

8. ✍ *Une* **base** *de l'espace vectoriel E est une famille libre de vecteurs de E qui engendre l'espace E.*

9. Coordonnées relatives à une base

9.1 Soit $(u_i)_{i\in I}$, une base de E. Pour tout $x \in E$, il existe une, et une seule, famille presque nulle $(\alpha_i)_{i\in I}$ de scalaires telle que

$$x = \sum_{i\in I} \alpha_i \cdot u_i.$$

9.2 ✍ *Soit $\mathscr{B} = (u_i)_{i\in I}$, une base de E. La famille des* **coordonnées relatives à la base** *$\mathscr{B}$ d'un vecteur $x \in E$ est la famille presque nulle de scalaires notée $\big(u_i^*(x)\big)_{i\in I}$ et caractérisée par*

$$x = \sum_{i\in I} u_i^*(x)\cdot u_i.$$

9.3 ✍ *Les applications $u_i^* : E \to \mathbb{K}$ ainsi définies pour tout $i \in I$ sont appelées* **formes coordonnées relatives à $\mathscr{B}$**.

9.4 ➞ *Les formes coordonnées relatives à une base $\mathscr{B}$ de E sont des formes linéaires sur E.*

9.5
$$\forall\,(i,j)\in I\times I,\quad u_i^*(u_j) = \delta_{i,j}$$

10. Théorème de la base incomplète

Soit E, un espace vectoriel de dimension finie, égale à $d \in \mathbb{N}$.

10.1 Le cardinal de toute famille libre de vecteurs de E est inférieur à d.

10.2 Le cardinal de toute famille génératrice de E est supérieur à d.

10.3 Le cardinal de toute base de E est égal à d.

10.4 Une famille libre de vecteurs de E est une base de E si, et seulement si, son cardinal est égal à la dimension de E.

10.5 Une famille génératrice de E est une base de E si, et seulement si, son cardinal est égal à la dimension de E.

10.6 ➞ *Soit $(u_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$, une famille libre de vecteurs de E. Alors il existe des vecteurs $u_{r+1}, \dots, u_d$ tels que*

$$\mathscr{B} = (u_1,\dots,u_r,u_{r+1},\dots,u_d)$$

soit une base de E.

10.7 ➞ *Soit $(u_i)_{i\in I}$, une famille génératrice de E. Alors on peut en extraire une sous-famille*

$$\mathscr{B} = (u_{\psi(1)},\dots,u_{\psi(d)})$$

qui soit une base de E.

11. ➞ Caractérisation d'une application linéaire

Soient $(e_i)_{i\in I}$, une base de E et $(f_i)_{i\in I}$, une famille de vecteurs de F.

11.1 *L'application définie par*

$$\forall\,x\in E,\quad \varphi(x) = \sum_{i\in I} e_i^*(x)\cdot f_i$$

est l'unique application linéaire $\varphi : E \to F$, telle que

$$\forall\,i\in I,\quad \varphi(e_i) = f_i.$$

11.2 *L'application φ est injective si, et seulement si, la famille $(f_i)_{i\in I}$ est libre.*

11.3 *L'application φ est surjective si, et seulement si, la famille $(f_i)_{i\in I}$ engendre F.*

11.4 *L'application φ est bijective si, et seulement si, la famille $(f_i)_{i\in I}$ est une base de F.*

I.4 Applications

12. Dans ce paragraphe, sauf exception claire, les espaces vectoriels considérés sont des espaces *de dimension finie*.

Base duale

13. ✍ *Pour tout espace vectoriel E, l'espace vectoriel $\mathrm{L}(E,\mathbb{K})$ des formes linéaires sur E est appelé* **espace dual** *de E et noté E^*.*

14. On considère une base $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_d)$ de E et on note $e_1^*, \dots, e_d^*$, les formes coordonnées associées à cette base [**9.2**]. Par définition,

$$\forall\,x\in E,\qquad x = \sum_{k=1}^{d} e_k^*(x)\cdot e_k. \tag{1}$$

14.1 Un vecteur $x \in E$ est nul si, et seulement si, $\varphi(x) = 0$ pour toute forme linéaire $\varphi \in E^*$.

14.2 ➞ *Pour tout vecteur $x \neq 0_E$, il existe une forme linéaire $\varphi_0 \in E^*$ telle que $\varphi_0(x) = 1$.*

14.3 Pour tout vecteur $x \in E$,

$$x\in \mathrm{Vect}(e_k,\,1\leqslant k\leqslant r) \iff \forall\,r<k\leqslant d,\quad e_k^*(x) = 0.$$

15.1 Caractérisation des formes coordonnées

$$\forall\,1\leqslant i,j\leqslant d,\quad e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}. \tag{2}$$

15.2 Décomposition des formes linéaires

$$\forall\,\varphi\in E^*,\quad \varphi = \sum_{k=1}^{d}\varphi(e_k)\cdot e_k^*. \tag{3}$$

15.3 Pour toute forme linéaire f sur E,

$$f\in \mathrm{Vect}(e_k^*,\,1\leqslant k\leqslant r) \iff \forall\,r<k\leqslant d,\quad f(e_k) = 0.$$

15.4 ➞ *La famille des formes coordonnées $(e_k^*)_{1\leqslant k\leqslant d}$ associées à une base $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant d}$ de E est une base de E^* et*

$$\dim E^* = \dim E.$$

15.5 ✍ *La* **base duale** *d'une base*

$$\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_d)$$

de E est la famille

$$\mathscr{B}^* = (e_1^*,\dots,e_d^*)$$

des formes linéaires coordonnées associées à cette base.

16. Méthode

Soient $\mathscr{B} = (e_k)_{1\leqslant k\leqslant d}$ et $\mathscr{C} = (\varepsilon_k)_{1\leqslant k\leqslant d}$, deux bases de E et P, la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{C}$.

Pour tout vecteur x de E,

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}(x) = P^{-1}.\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(x).$$

La matrice P^{-1} représente la base duale $\mathscr{C}^* = (\varepsilon_i^*)_{1\leqslant i\leqslant d}$ relativement à la base $\mathscr{B}$ au sens où

$$P^{-1} = \big(\varepsilon_i^*(e_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant d}.$$

17. Base antéduale

On a coutume de rapporter l'espace E à une base de vecteurs et à décomposer les vecteurs de E dans cette base. Nous allons voir maintenant comment on peut remplacer l'usage d'une base de vecteurs de E par un *système de coordonnées* sur E, c'est-à-dire une base $(\varphi_k)_{1\leqslant k\leqslant d}$ de E^*.

17.1 L'application $\Phi : E \to \mathbb{K}^d$ définie par

$$\forall\,x\in E,\quad \Phi(x) = \big(\varphi_1(x),\dots,\varphi_d(x)\big)$$

est un isomorphisme.

17.2 La famille $(e_1,\dots,e_d)$ est une base de E qui admet la famille $(\varphi_k)_{1\leqslant k\leqslant d}$ pour base duale si, et seulement si, la famille

$$\big(\Phi(e_1),\dots,\Phi(e_d)\big)$$

est la base canonique de $\mathbb{K}^d$.

17.3 ✍ *Soit $\mathscr{C}^* = (\varphi_k)_{1\leqslant k\leqslant d}$, une base de E^*. L'unique base de E qui admet $\mathscr{C}^*$ pour base duale est* **la base antéduale** *de $\mathscr{C}^*$.*

Polynômes interpolateurs de Lagrange

18. Interpoler une famille de points

$$\big((x_k, y_k)\big)_{0\leqslant k\leqslant n}$$

consiste à relier ces points entre eux par une courbe, c'est-à-dire à trouver une fonction f telle que

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad y_k = f(x_k).$$

On parle d'***interpolation affine*** lorsque on relie deux points consécutifs par un segment de droite.

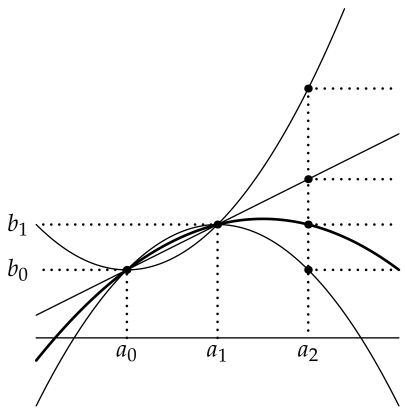
19. ✍ *Étant donnée une famille finie de points*

$$\big((a_k, b_k)\big)_{0\leqslant k\leqslant n} \in (\mathbb{C}\times\mathbb{C})^{n+1},$$

on appelle **polynôme interpolateur** *tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que*

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad P(a_k) = b_k.$$

20. Par deux points (a_0, b_0) et (a_1, b_1) d'abscisses distinctes passent une seule droite et une infinité de paraboles.
Par trois points non alignés d'abscisses distinctes passe une seule parabole.



21. Étant donnés $(n+1)$ scalaires $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ *deux à deux distincts*, on définit $(n+1)$ formes linéaires sur $\mathbb{K}[X]$ en posant

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n,\ \forall\, P \in \mathbb{K}[X], \quad \varphi_k(P) = P(a_k)$$

et une application $u : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}^{n+1}$ par

$$\forall\, P \in \mathbb{K}[X], \quad u(P) = \big(P(a_k)\big)_{0\leqslant k\leqslant n} = \big(\varphi_k(P)\big)_{0\leqslant k\leqslant n}.$$

21.1 Le polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme interpolateur de la famille de points $\big((a_k, b_k)\big)_{0\leqslant k\leqslant n}$ si, et seulement si,

$$u(P) = (b_0, \dots, b_n).$$

21.2 L'application u est linéaire et son noyau est l'ensemble des multiples du polynôme

$$Q_0 = \prod_{k=0}^{n} (X - a_k).$$

Elle induit un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$.
21.3 ➙ *Si les scalaires $a_0, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts, alors les formes linéaires $\varphi_k = [P \mapsto P(a_k)]$, $0 \leqslant k \leqslant n$, sont linéairement indépendantes dans $(\mathbb{K}[X])^*$.*

21.4 ✍ *Soit $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$, une famille de scalaires deux à deux distincts. Pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, le polynôme défini par*

$$L_k = \prod_{\substack{0\leqslant j\leqslant n\\ j\neq k}} \frac{X - a_j}{a_k - a_j}$$

est le k-ième **polynôme interpolateur de Lagrange** *associé aux abscisses $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$.*
21.5

$$\forall\, 0 \leqslant i, j \leqslant n, \quad \varphi_j(L_i) = \delta_{i,j}$$

22. ➙ *Soit $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$, une famille de scalaires deux à deux distincts.*
22.1 *La famille $(L_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ des polynômes interpolateurs de Lagrange associés à cette famille est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et la famille des formes linéaires $([P \mapsto P(a_k)])_{0\leqslant k\leqslant n}$ est sa base duale.*
22.2 *L'unique polynôme interpolateur de degré inférieur à n des points $\big((a_k, b_k)\big)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est le polynôme*

$$P_0 = \sum_{k=0}^{n} b_k L_k.$$

23. Systèmes de Vandermonde
Relativement aux bases canoniques de $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}^{n+1}$, l'équation

$$\big(P(a_0), \dots, P(a_n)\big) = (b_0, \dots, b_n)$$

d'inconnue

$$P = c_0 + c_1 X + c_2 X^2 + \dots + c_j X^j + \dots + c_n X^n \in \mathbb{K}_n[X]$$

se traduit matriciellement par une matrice de Vandermonde :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^j & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^j & \cdots & a_1^n \\ & & \vdots & & \vdots & \\ 1 & a_i & \cdots & a_i^j & \cdots & a_i^n \\ & & \vdots & & \vdots & \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^j & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}}_{V(a_0, a_1, \dots, a_n)} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_j \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Entraînement

24. Questions pour réfléchir

1. Si le vecteur y est une combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{i\in I}$, existe-t-il *une seule* famille de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I}$ telle que

$$y = \sum_{i\in I} \lambda_i \cdot x_i \quad ?$$

2. Une famille (x), constituée d'un seul vecteur, peut-elle être liée ?
3. Si la famille $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ est liée, le vecteur x_{n+1} appartient-il au sous-espace $\operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n)$?
4. Les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$\forall\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{aligned} f_1(x, y, z) &= (x, 0, 0), \\ f_2(x, y, z) &= (y, 0, 0), \\ f_3(x, y, z) &= (z, 0, 0) \end{aligned}$$

sont linéairement indépendants alors que la famille

$$\big(f_1(u), f_2(u), f_3(u)\big)$$

est liée pour tout $u \in \mathbb{R}^3$.

5. Pourquoi ne peut-on parler de *la* base d'un espace vectoriel ?

6. Soient φ, une forme linéaire sur E et $\mathscr{B}$, une base de E. Quelle est la taille de $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$? Quels sont ses coefficients ?
7. Pourquoi, en cherchant à interpoler des points, doit-on supposer les abscisses deux à deux distinctes ? (Donner une explication géométrique.)
8. Comparer l'interpolation affine avec l'interpolation polynomiale.

25. Si $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ sont deux familles presque nulles de vecteurs de E, alors, quel que soit le scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$, la famille

$$(\alpha x_i + y_i)_{i\in I}$$

est presque nulle et

$$\sum_{i\in I}(\alpha x_i + y_i) = \alpha \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i.$$

26. Soient $\varphi : E \to F$, une application linéaire et $(x_i)_{i\in I}$, une famille presque nulle. Alors la famille $\big(\varphi(x_i)\big)_{i\in I}$ est presque nulle et

$$\varphi\Big(\sum_{i\in I} x_i\Big) = \sum_{i\in I} \varphi(x_i).$$

27. Si $f \in \mathrm{L}(E,F)$ est une application injective et si la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre, alors son image $\big(f(x_i)\big)_{i\in I}$ est une famille libre.

28. Si $f \in \mathrm{L}(E,F)$ et si la famille $\big(f(x_i)\big)_{i\in I}$ est libre, alors la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre.

29. Si $f \in \mathrm{L}(E,F)$ est une application surjective et si la famille $(x_i)_{i\in I}$ engendre l'espace E, alors son image $\big(f(x_i)\big)_{i\in I}$ engendre l'espace F.

30. Commutant d'un endomorphisme cyclique
Soient E, un espace vectoriel et f, un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que la famille

$$\big(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\big)$$

soit une base de E et on note $\mathscr{C}$, l'ensemble des endomorphismes g de E qui commutent à f :

$$g \in \mathscr{C} \iff f\circ g = g \circ f.$$

30.1 La dimension de E est égale à n et le rang de f est supérieur à $(n-1)$.
30.2 Le commutant $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{L}(E)$, qui contient le sous-espace $\mathbb{K}[f]$ des polynômes en f.
30.3 Il existe une famille de scalaires $(a_k)_{0\leqslant k<n}$ telle que

$$f^n(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot f^k(x_0)$$

et, pour tout vecteur x de E,

$$f^n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot f^k(x).$$

Par récurrence, tout polynôme en f appartient au sous-espace $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(I_E, f, \dots, f^{n-1})$.
30.4 Si $g \in \mathscr{C}$, alors il existe une famille de scalaires $(\alpha_k)_{0\leqslant k<n}$ telle que

$$g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \cdot f^k(x_0)$$

et, pour tout vecteur x de E,

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \cdot f^k(x).$$

Le commutant $\mathscr{C}$ de f est égal à $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(I_E, f, \dots, f^{n-1})$, c'est-à-dire au sous-espace $\mathbb{K}[f]$ des polynômes en f.

30.5 Donner un exemple d'un tel endomorphisme f dont le rang soit égal à $(n-1)$. →[102]

31. La famille de formes linéaires $\big([P \mapsto P(a)]\big)_{a\in\mathbb{K}}$ est une famille libre de l'espace dual de $\mathbb{K}[X]$.

32. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, on note φ_λ la fonction $[x \mapsto x^\lambda]$.
1. On considère les φ_λ comme des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Elles ont des ordres de grandeur différents au voisinage de l'origine, donc la famille $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}_+}$ est une famille libre.
2. De même, les fonctions φ_λ, considérées comme des fonctions de $[1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ ont des ordres de grandeur différents au voisinage de l'infini, donc la famille $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}_+}$ est une famille libre.
3. Quel que soit l'intervalle I de longueur strictement positive, les fonctions φ_λ considérées comme des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ sont linéairement indépendantes.

33. Soient $(u_i)_{i\in I}$, une base de E et φ, une application linéaire de E dans F.
Pour tout $x \in E$, l'ensemble $\{i \in I : u_i^*(x) \neq 0\}$ est fini et

$$\forall\, x \in E, \quad \varphi(x) = \sum_{i\in I} u_i^*(x)\cdot\varphi(u_i)$$

34. Soient φ_1 et φ_2, deux applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
1. Condition pour que l'application

$$\varphi = \big[(x,y) \mapsto \big(\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y)\big)\big]$$

soit un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$?
2. On suppose que $\varphi \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^2)$. Alors φ est surjective si, et seulement si, (φ_1, φ_2) est une famille libre du dual de $\mathbb{R}^2$.

35. Caractérisation de la trace
Une forme linéaire φ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall\,(A,B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})\times\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \qquad \varphi(AB) = \varphi(BA)$$

est proportionnelle à la trace sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

36. Représentation des formes linéaires sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$
36.1 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Si $\mathrm{tr}(A.\bar{A}^\top) = 0$, alors A est la matrice nulle.
36.2 Pour toute forme linéaire φ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une, et une seule, matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad \varphi(M) = \mathrm{tr}(AM).$$

37. Soient A et B, deux matrices de tailles quelconques. Si les produits AB et BA sont des matrices carrées, alors leurs traces sont égales.

38. Soient $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Alors :

$$AX = 0 \iff \forall\, Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad Y^\top.AX = 0.$$

Base duale, base antéduale

39. On considère une base $\mathscr{B} = (e_k)_{1\leqslant k\leqslant d}$ de E et une famille $\mathscr{C}^* = (\varphi_k)_{1\leqslant k\leqslant d}$ de E^* telles que

$$\forall\, 1 \leqslant i,j \leqslant d, \quad \varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}.$$

Alors la famille $\mathscr{C}^*$ est la base duale de $\mathscr{B}$:

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant d, \quad \varphi_k = e_k^*.$$

40. Soient $(f_k)_{1\leqslant k\leqslant d}$ et $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant d}$, deux bases de E telles que $f_k^* = e_k^*$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant d$. Comparer e_k et f_k en calculant

$$\sum_{j=1}^{d} e_j^*(f_k)\cdot e_j.$$

41. On considère une base $\mathscr{B}^* = (\varphi_k)_{1\leqslant k\leqslant d}$ de E^* et une famille $\mathscr{C} = (e_k)_{1\leqslant k\leqslant d}$ de vecteurs de E telle que

$$\forall\, 1 \leqslant i,j \leqslant d, \quad \varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}.$$

La famille $\mathscr{C}$ est une base de E, antéduale de la base $\mathscr{B}^*$.

42. La famille
$$\left(\frac{(X-\alpha)^n}{n!}\right)_{0\leqslant n\leqslant d}$$
est une base de $\mathbb{K}_d[X]$. Quelle est sa base duale ?

43. Soient $f_1, \dots, f_n$, des formes linéaires sur E, espace de dimension n.
Si l'espace vectoriel V des solutions du système linéaire homogène
$$\{f_k(x) = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n\}$$
n'est pas réduit au vecteur nul, alors la famille $\mathscr{F} = (f_1, \dots, f_n)$ est liée dans E^*.

44. Soient $(\varphi_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$, une famille de formes linéaires sur E et $u \in L(E, \mathbb{K}^r)$, l'application définie par
$$\forall\, x \in E, \quad u(x) = \big(\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x)\big).$$
1. Si la famille $(\varphi_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$ est libre, alors il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que
$$\operatorname{Ker} u = \operatorname{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$$
et u est surjective.
2. Si la famille $(\varphi_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$ est liée, alors il existe une forme linéaire non nulle
$$\Psi = [(y_1, \dots, y_r) \mapsto a_1 y_1 + \cdots + a_r y_r]$$
telle que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} \Psi$. Que peut-on en déduire si u est surjective ?

45. Faisceaux de plans
Soit $E = \mathbb{R}^3$.
1. L'intersection D de deux plans vectoriels distincts
$$F_1 = [a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0] \quad \text{et} \quad F_2 = [a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0]$$
est une droite vectorielle.
2. Un plan vectoriel P contient la droite D si, et seulement si, il existe un couple de scalaires $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ tel que
$$P = \big[\alpha(a_1 x + b_1 y + c_1 z) + \beta(a_2 x + b_2 y + c_2 z) = 0\big].$$
(Appliquer [**15.2**] à une base de $\mathbb{R}^3$ bien choisie.)

Interpolation de Lagrange

46. *Suite de* [**21**] – Calculer l'image par u du polynôme
$$P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k L_k$$
en fonction de $(\alpha_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{K}^{n+1}$.

47. Déduire de [**22**] les polynômes interpolateurs de la liste de points $\big((a_k, b_k)\big)_{0\leqslant k\leqslant n}$.

48. Interpolation polynomiale d'un polynôme
Soient $d \in \mathbb{N}$ et $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$, une famille de scalaires deux à deux distincts. En considérant le nuage de points
$$(a_k, a_k^d)_{0\leqslant k\leqslant n},$$
comparer les polynômes
$$X^d \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k^d L_k.$$
À quelle condition ces polynômes sont-ils égaux ?

49. Soient $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$, une famille de scalaires deux à deux distincts et deux familles de matrices $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$ et $(B_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$ telles que
$$\forall\, q \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{r} a_k^q A_k = \sum_{k=1}^{r} a_k^q B_k.$$
Alors $A_k = B_k$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant r$.

50. La matrice $V(a_0, \dots, a_n)$ [**23**] est inversible si, et seulement si, les scalaires $a_0, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts.

51. On considère des scalaires $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ deux à deux distincts et la famille $(L_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ des polynômes interpolateurs de Lagrange associés à ces scalaires.
1. La matrice de passage de la base de Lagrange $(L_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ à la base canonique $(X^k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de $\mathbb{K}_n[X]$ est la matrice de Vandermonde $V(a_0, a_1, \dots, a_n)$ [**23**].
2. En déduire un moyen simple de calculer l'inverse de la matrice suivante.
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

II

Projections

52. Soient F et G, deux sous-espaces vectoriels de E.
52.1 On dit qu'un vecteur $x \in E$ admet une décomposition sur F et G lorsqu'il existe au moins un couple $(y, z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$.
52.2 Le vecteur nul admet au moins la décomposition évidente suivante : $0_E = 0_E + 0_E$.
52.3 Chaque vecteur $x \in E$ admet au plus une décomposition si, et seulement si, la décomposition évidente est la seule décomposition possible du vecteur nul.
52.4 Cette remarque sera généralisée en [**79.1**].

II.1 Sous-espaces supplémentaires

53. La notion de *sous-espaces supplémentaires* généralise les systèmes d'axes du plan.
53.1 ✍ *Soit E, un espace vectoriel. Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dits* **supplémentaires (dans** E**)** *si, et seulement si, pour tout vecteur $x \in E$, il existe un, et un seul, couple $(y, z) \in F \times G$ tel que*
$$x = y + z.$$
Cette propriété est notée : $E = F \oplus G$.
53.2 Méthode en dimension finie
Si E est un espace vectoriel *de dimension finie*, alors deux sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E si, et seulement si, le vecteur nul admet une seule décomposition :
$$\left\{\begin{array}{c} y + z = 0_E \\ (y, z) \in F \times G \end{array}\right\} \implies y = z = 0_E$$
et si
$$\dim E = \dim F + \dim G.$$
53.3 Puisque chaque vecteur $x \in E$ se décompose de manière unique en somme de deux termes, deux applications sont naturellement définies.
53.4 ✍ *Soient F et G, deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. Les applications*
$$p : E \to E \quad \text{et} \quad q : E \to E$$
définies par
$$\forall\, x \in E, \qquad x = \underbrace{p(x)}_{\in F} + \underbrace{q(x)}_{\in G}$$
sont les **projections associées à la décomposition** $E = F \oplus G$.

53.5 Plus précisément, l'application p est la ***projection sur*** F ***parallèlement à*** G et l'application q, la ***projection sur*** G ***parallèlement à*** F.

53.6 En particulier, si $x \in F$, alors l'unique décomposition de x est

$$x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$$

et $p(x) = x$, $q(x) = 0_E$.

53.7 ➞ *Les projections p et q associées à la décomposition $E = F \oplus G$ sont des endomorphismes de E qui vérifient*

$$p \circ p = p \quad \textit{et} \quad q \circ q = q.$$

De plus,

$$\operatorname{Ker} p = \operatorname{Im} q = G, \qquad \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker} q = F.$$

54. Symétries

54.1 La représentation cartésienne des nombres complexes

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad z = \mathfrak{Re}(z) + i\,\mathfrak{Im}(z)$$

est associée à une décomposition de $\mathbb{C}$ en somme directe.

54.2 La décomposition des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

est associée à une décomposition de $\mathscr{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ en somme directe.

54.3 La décomposition des matrices carrées en somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique :

$$M = \frac{M + M^\top}{2} + \frac{M - M^\top}{2}$$

est associée à une décomposition de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ en somme directe.

54.4 ➞ *Si $s \in \mathrm{L}(E)$ est une symétrie (c'est-à-dire $s \circ s = I_E$), alors une décomposition de E en somme directe est associée à s*

$$E = \operatorname{Ker}(s - I_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + I_E).$$

De plus,

$$\forall\, x \in E, \quad x = \frac{x + s(x)}{2} + \frac{x - s(x)}{2}$$

donc la projection p sur le sous-espace $F = \operatorname{Ker}(s - I_E)$ parallèlement au sous-espace $G = \operatorname{Ker}(s + I_E)$ est définie par

$$p = \frac{1}{2} \cdot (I_E + s)$$

et la projection q sur G parallèlement à F est définie par

$$q = \frac{1}{2} \cdot (I_E - s) = I_E - p.$$

55. Bases adaptées

On considère un espace vectoriel E *de dimension finie*, égale à d.

55.1 ➞ *Si $\mathscr{B} = (e_k)_{1 \leqslant k \leqslant d}$ est une base de E, alors les sous-espaces vectoriels*

$$F = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_r) \quad \textit{et} \quad G = \operatorname{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_d)$$

sont supplémentaires dans E (quel que soit l'entier $0 \leqslant r \leqslant d$).

55.2 En notant $(e_k^*)_{1 \leqslant k \leqslant d}$, la base duale de $\mathscr{B}$ [**15.4**], la projection sur F parallèlement à G est l'endomorphisme p défini par

$$\forall\, x \in E, \quad p(x) = \sum_{k=1}^{r} e_k^*(x) \cdot e_k.$$

55.3 Supposons que $E = F \oplus G$ et considérons

— une famille libre $(\varepsilon_k)_{1 \leqslant k < p}$ constituée de vecteurs de F ;

— une famille libre $(\varepsilon_k)_{p \leqslant k < q}$ constituée de vecteurs de G.

La concaténation de ces deux familles libres :

$$\mathscr{F} = (\varepsilon_k)_{1 \leqslant k < q}$$

est encore une famille libre.

55.4 ➞ *Si $E = F \oplus G$ est un espace de dimension finie où* $\dim F = r$, *alors il existe une base*

$$\mathscr{B} = (e_k)_{1 \leqslant k \leqslant d}$$

de E telle que la sous-famille $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant r}$ soit une base de F et que la sous-famille $(e_k)_{r < k \leqslant d}$ soit une base de G.

55.5 ✍ *Une telle base de E est dite* **adaptée à la décomposition en somme directe** *$E = F \oplus G$.*

56. Projecteurs

Les *projections* sont définies, deux par deux, à partir d'une décomposition de E en sous-espaces supplémentaires. Les projecteurs sont définies algébriquement, en ne retenant qu'une propriété des projections.

56.1 ✍ *Une application $p : E \to E$ est un* **projecteur** *si, et seulement si, p est un endomorphisme de E tel que*

$$p \circ p = p.$$

56.2 Toute projection est un projecteur.

56.3 ➞ *Si p est un projecteur, alors les sous-espaces vectoriels*

$$F = \operatorname{Im} p \quad \textit{et} \quad G = \operatorname{Ker} p$$

sont supplémentaires dans E et

$$\forall\, x \in E, \qquad x = \underbrace{p(x)}_{\in F} + \underbrace{\big(x - p(x)\big)}_{\in G}.$$

56.4 Pour tout projecteur p, les projections associées à la décomposition

$$E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$$

sont p et $I_E - p$. En particulier, tout projecteur est aussi une projection.

57. ➞ *Soit $p \in \mathrm{L}(E)$, un projecteur. Alors $x \in \operatorname{Im} p$ si, et seulement si, $x = p(x)$.*

II.2 Codimension

58. Cas de la dimension finie

Soient E, un espace vectoriel de dimension finie, égale à d, et F, un sous-espace de E de dimension $1 \leqslant r < d$.

58.1 Existence

Il existe une base

$$\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_d)$$

de E telle que la sous-famille $\mathscr{B}_F = (e_k)_{1 \leqslant k \leqslant r}$ soit une base de F. En posant $G = \operatorname{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_d)$, on obtient une décomposition de E en sous-espaces supplémentaires :

$$E = F \oplus G.$$

58.2 Dimension

Quel que soit le sous-espace H tel que $E = F \oplus H$, la dimension de H est toujours la même :

$$\dim H = \dim E - \dim F.$$

59. Lorsque E est un espace de dimension infinie, rien ne prouve qu'un sous-espace F admet nécessairement un supplémentaire dans E.

59.1 ➞ **Théorème du rang**
Soit $u \in L(E, V)$. On suppose qu'il existe un sous-espace G de E tel que

$$E = \operatorname{Ker} u \oplus G.$$

Alors l'application $v : G \to \operatorname{Im} u$ définie par

$$\forall\, x \in G, \quad v(x) = u(x)$$

est un isomorphisme.
59.2 Si $E = F \oplus G_1 = F \oplus G_2$, alors la projection sur G_2 parallèlement à F induit un isomorphisme de G_1 sur G_2.
59.3 ➞ *Les supplémentaires d'un sous-espace (s'il en existe) sont tous isomorphes.*
59.4 ✍ *Soit F, un sous-espace vectoriel de E admettant au moins un supplémentaire G dans E. La* **codimension** *de F, notée $\operatorname{codim} F$, est la dimension commune à tous les supplémentaires de F.*
59.5 ✍ *Un sous-espace F de E est un* **sous-espace de codimension finie** *lorsque F admet un supplémentaire de dimension finie dans E.*
59.6 Si E est un espace de dimension finie, alors tout sous-espace F de E est un espace de dimension finie et de codimension finie. De plus,

$$\dim E = \dim F + \operatorname{codim} F.$$

60. Exemples et contre-exemples
60.1 Le sous-espace des polynômes qui admettent 0 et 1 pour racines est un sous-espace de codimension 2 dans $\mathbb{K}[X]$.
60.2 L'espace $\mathbb{K}[X^2]$ des polynômes pairs n'est pas un sous-espace de codimension finie dans $\mathbb{K}[X]$.
60.3 L'espace $c_0(\mathbb{R})$ des suites de limite nulle est un sous-espace de codimension finie de l'espace $c(\mathbb{R})$ des suites réelles convergentes.
60.4 L'espace $c(\mathbb{R})$ des suites réelles convergentes n'est pas un sous-espace de codimension finie dans l'espace $\ell^0(\mathbb{R})$ des suites réelles.

II.3 Hyperplans

61. La notion d'*hyperplan* dans un espace vectoriel quelconque généralise celle de *plan* dans l'espace $\mathbb{R}^3$: comme on le sait, tout plan de $\mathbb{R}^3$ est représenté par une équation cartésienne

$$ax + by + cz = 0$$

avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et deux équations cartésiennes représentent un même plan si, et seulement si, elles sont proportionnelles.
62. Soit E, un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (de dimension quelconque).
62.1 Soit f, une forme linéaire non identiquement nulle sur E. Le noyau $H = \operatorname{Ker} f$ de cette forme linéaire est un sous-espace vectoriel strict de E.
62.2 ✍ *Un sous-espace H de E est un* **hyperplan (de E)** *si, et seulement si, il existe une forme linéaire f non identiquement nulle sur E telle que*

$$H = \operatorname{Ker} f.$$

62.3 Pour tout scalaire $\alpha \neq 0$, le noyau de la forme linéaire $\alpha \cdot f$ est aussi égal à H.
62.4 Tout hyperplan est un espace de codimension 1. Plus précisément : quel que soit $x_0 \notin H = \operatorname{Ker} f$,

$$E = H \oplus (\mathbb{K} \cdot x_0).$$

62.5 Soit g, une forme linéaire sur E telle que $H = \operatorname{Ker} g$. Alors il existe un scalaire $\alpha \neq 0$ tel que $g = \alpha \cdot f$.
62.6 ➞ *Deux formes linéaires sur E ont même noyau si, et seulement si, elles sont proportionnelles.*
63. Soient E, un espace vectoriel (de dimension quelconque) et H, un sous-espace vectoriel de E.
63.1 S'il existe un vecteur $x_0 \neq 0_E$ tel que

$$E = H \oplus (\mathbb{K} \cdot x_0),$$

alors il existe une forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{K}$ définie par

$$\forall\, x \in E, \quad x = p(x) + \varphi(x) \cdot x_0$$

où p est la projection sur H parallèlement à $\mathbb{K} \cdot x_0$, et le sous-espace H est le noyau de φ.
63.2 ➞ *Un sous-espace H de E est un hyperplan si, et seulement si, c'est un sous-espace de codimension égale à 1.*
63.3 Soient H_1 et H_2, deux hyperplans de E tels que $H_1 \subset H_2$. Alors $H_1 = H_2$.

Entraînement

64. Questions pour réfléchir

1. Si p et q sont les projections associées à la décomposition $E = F \oplus G$, alors
$$p \circ q = q \circ p = 0.$$
2. Chaque fonction continue par morceaux est somme d'une fonction continue et d'une fonction en escalier. L'espace des fonctions continues et l'espace des fonctions en escalier sont-ils supplémentaires dans l'espace des fonctions continues par morceaux ?
3. Soit I, un segment. Toute fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ est somme d'une fonction continue et positive et d'une fonction continue et négative et cette décomposition est unique. Cette propriété peut-elle se traduire par une décomposition en somme directe de $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$?
4. Si p est un projecteur et si $q = \mathrm{I}_E - p$, alors
$$E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$$
et les projections associées à cette décomposition en somme directe sont p et q.
5. Soit P, le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $ax + by + cz = 0$. Quelles sont les formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$ qui admettent P pour noyau ?
6. Soit f, une forme linéaire non nulle sur E. Il existe un vecteur $u \in E$ tel que $f(u) = 1$ et, pour tout vecteur $x \in E$, il existe un vecteur $p(x) \in \operatorname{Ker} f$ tel que
$$x = p(x) + f(x) \cdot u.$$
7. Soit H, un hyperplan de E. Si D est une droite telle que $D \not\subset H$, alors $E = H \oplus D$.
8. Tout sous-espace strict de E, espace de dimension finie, est contenu dans un hyperplan de E.
9. Exemple d'endomorphismes φ et ψ de même noyau et qui ne sont pas proportionnels ?

65. Un endomorphisme u de E tel que

$$E = \operatorname{Ker}\big(u \circ (u - \mathrm{I}_E)\big) \oplus \operatorname{Ker}\big(u \circ (u + \mathrm{I}_E)\big)$$

est injectif : c'est une symétrie.
66. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que

$$M = A + \operatorname{tr}(M) I_n.$$

Que vaut $\operatorname{tr}(M)$? Que vaut M ?
67. Caractérisation des formes linéaires non proportionnelles
67.1 Soit H, un hyperplan de E. Pour tout vecteur $u \in E \setminus H$,

$$E = H \oplus \mathbb{K} \cdot u.$$

67.2 Si H_1 et H_2 sont deux hyperplans distincts de E, alors il existe un vecteur $u \in H_1 \setminus H_2$ et un vecteur $v \in H_2 \setminus H_1$.

67.3 Soient ε et η, deux formes linéaires sur E.

1. Si ε et η sont proportionnelles, alors

$$\forall\,(x,y)\in E\times E,\quad \varepsilon(x)\eta(y)=\varepsilon(y)\eta(x).$$

2. Si ε et η ne sont pas proportionnelles, alors

$$\exists\,(u,v)\in E\times E,\quad \varepsilon(u)\eta(v)\neq 0\quad\text{et}\quad \varepsilon(v)=\eta(u)=0.$$

3. La forme bilinéaire $[(x,y)\mapsto\varepsilon(x)\eta(y)]$ est symétrique si, et seulement si, les formes linéaires ε et η sont proportionnelles.

68. Soit $f\in L(E)$. Si les sous-espaces $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires dans E, alors $\operatorname{Ker} f^2=\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f^2=\operatorname{Im} f$.

69. Soient E, un espace vectoriel *de dimension finie* et f, un endomorphisme de E.
Les sous-espaces $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires dans E si, et seulement si, leur intersection est réduite au vecteur nul.
NB : Cette propriété est fausse si E est un espace de dimension infinie.

70. Soit E, l'espace vectoriel des applications $\mathscr{C}^\infty$ et périodiques, de période 1, de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$. Pour l'endomorphisme

$$u=\big[f\mapsto f'\big],$$

on a $E=\operatorname{Ker} u\oplus\operatorname{Im} u$.

71. Soient $(e_1,\dots,e_p)$, une famille libre de vecteurs de E, espace vectoriel de dimension finie. Pour tout vecteur $a\in E$, on pose

$$F_a=\operatorname{Vect}(e_1+a,\ e_2+a,\dots,e_p+a)$$

et on note G, un supplémentaire de F_0 dans E.

1. Pour tout $a\in G$, les sous-espaces F_a et G sont supplémentaires dans E.
2. Si a et b sont deux vecteurs distincts de G, alors $F_a\neq F_b$.

Illustrer par une figure quand G est une droite du plan E.

72. Soit E, un espace de dimension finie.

72.1 Si f et g sont deux endomorphismes tels que

$$E=\operatorname{Im} f+\operatorname{Im} g=\operatorname{Ker} f+\operatorname{Ker} g,$$

alors ces deux sommes sont directes.

72.2 Si $(f+g)\in GL(E)$ et si $g\circ f=0$, alors

$$\operatorname{rg} f+\operatorname{rg} g=\dim E\qquad\text{et}\qquad E=\operatorname{Ker} f\oplus\operatorname{Im} f.$$

73. Soient E, un espace vectoriel de dimension finie ; f et g, deux endomorphismes de E.

1. Si f et g commutent : $f\circ g=g\circ f$, alors les sous-espaces $\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} g$ sont stables par f :

$$\forall\,x\in\operatorname{Ker} g,\quad f(x)\in\operatorname{Ker} g\quad\text{et}\quad\forall\,x\in\operatorname{Im} g,\quad f(x)\in\operatorname{Im} g.$$

2. On suppose que $\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} g$ sont stables par f et de plus que g est un projecteur. Comme

$$\forall\,x\in E,\quad f(x)=f\big(g(x)\big)+f\big(x-g(x)\big),$$

alors f et g commutent.

74. Soient p et q, deux projecteurs de E. On suppose que la somme

$$u=p+q$$

est un projecteur.

1. Alors $p\circ q+q\circ p=0$. On en déduit que $p\circ q=-q\circ p$, puis que

$$p\circ q=p\circ q\circ q=q\circ p=0.$$

2.a Si $x\in\operatorname{Im} p\cap\operatorname{Im} q$, alors $x=p(x)=q(x)$.

2.b Quels que soient y et z dans E,

$$p(y)+q(z)=u\big(p(y)+q(z)\big).$$

2.c Les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Im} q$ sont supplémentaires dans $\operatorname{Im} u$:

$$\operatorname{Im} u=\operatorname{Im} p\oplus\operatorname{Im} q.$$

3.

$$\operatorname{Ker} u=\operatorname{Ker} p\cap\operatorname{Ker} q$$

75. Soient p et q, deux projecteurs de E qui commutent :

$$p\circ q=q\circ p.$$

Les endomorphismes

$$u=p\circ q\quad\text{et}\quad v=p+q-p\circ q$$

sont des projecteurs et

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} u&=\operatorname{Ker} p+\operatorname{Ker} q &\qquad \operatorname{Im} u&=\operatorname{Im} p\cap\operatorname{Im} q,\\ \operatorname{Ker} v&=\operatorname{Ker} p\cap\operatorname{Ker} q &\qquad \operatorname{Im} v&=\operatorname{Im} p+\operatorname{Im} q.\end{aligned}$$

Étudier le cas particulier $q=I_E-p$.

76. Soient E, un espace vectoriel de dimension finie ; f et g, deux formes linéaires non nulles sur E. Nous allons prouver de deux manières qu'il existe un vecteur $u\in E$ tel que

$$E=\operatorname{Ker} f\oplus(\mathbb{R}\cdot u)=\operatorname{Ker} g\oplus(\mathbb{R}\cdot u).$$

1.a Si $\operatorname{Ker} f\neq\operatorname{Ker} g$, alors [**63.3**] il existe deux vecteurs

$$y_0\in\operatorname{Ker} f\setminus\operatorname{Ker} g\quad\text{et}\quad z_0\in\operatorname{Ker} g\setminus\operatorname{Ker} f.$$

1.b Calculer $f(x_1)$ et $g(x_1)$ avec $x_1=\frac{y_0}{g(y_0)}+\frac{z_0}{f(z_0)}$.

2. Il existe deux vecteurs y_1 et z_1 tels que

$$f(y_1)=g(z_1)=1.$$

En choisissant convenablement $t\in\mathbb{K}$, il existe un vecteur

$$x=y_1+t\cdot z_1\in E$$

tel que $f(x)g(x)\neq 0$.

77.

1. Soient u et v, deux vecteurs linéairement indépendants de E, espace vectoriel réel de dimension finie.

1.a Il existe deux formes linéaires φ et ψ sur E telles que

$$\begin{cases}\varphi(u)=1\\ \varphi(v)=0\end{cases}\quad\text{et}\quad\begin{cases}\psi(u)=0\\ \psi(v)=1\end{cases}.$$

1.b Il existe une forme linéaire θ sur E qui telle que

$$\theta(v)<0<\theta(u).$$

On dit que l'hyperplan $\operatorname{Ker}\theta$ **sépare** les vecteurs u et v.

2. Soient f et g, deux applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, non proportionnelles. On considère les formes linéaires sur $E=\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ définies par

$$\forall\,h\in E,\quad\varphi_f(h)=\int_a^b f(t)h(t)\,\mathrm{d}t\quad\text{et}\quad\varphi_g(h)=\int_a^b g(t)h(t)\,\mathrm{d}t.$$

2.a Les formes linéaires φ_f et φ_g ne sont pas proportionnelles.

2.b Il existe une forme linéaire θ sur E telle que

$$\theta(g)<0<\theta(f).$$

III

Sommes de sous-espaces vectoriels

78. Étant donnés des sous-espaces vectoriels $E_1, E_2, \dots, E_r$ de E, on considère l'application

$$S = \Big[(x_1, \dots, x_r) \mapsto \sum_{k=1}^{r} x_k\Big]$$

de l'espace vectoriel produit $E_1 \times \cdots \times E_r$ dans E.
78.1 L'application S est linéaire de $E_1 \times \cdots \times E_r$ dans E.
78.2 ✍ *Soient E_1, …, E_r, des sous-espaces vectoriels de E. La* **somme** *des sous-espaces $E_1, \dots, E_r$, notée*

$$E_1 + \cdots + E_r \qquad ou \qquad \sum_{k=1}^{r} E_k,$$

est l'ensemble des vecteurs $x \in E$ pour lesquels il existe $x_1 \in E_1$, …, $x_r \in E_r$ tels que

$$x = x_1 + \cdots + x_r.$$

78.3 La somme des sous-espaces $E_1, \dots, E_r$ est un sous-espace vectoriel de E, égal à l'image de l'application S.
78.4 ➙ *Si $E_1, \dots, E_r$ sont des sous-espaces vectoriels de dimension finie, alors*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant r} \dim E_k \leqslant \dim\Big(\sum_{k=1}^{r} E_k\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{r} \dim E_k.$$

III.1 Sous-espaces en somme directe

79.1 ✍ *Les sous-espaces E_1, …, E_r sont* **en somme directe** *si, et seulement si, l'équation $x_1 + \cdots + x_r = 0_E$ d'inconnue*

$$(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_r$$

admet $(0_E, \dots, 0_E)$ pour unique *solution.*
Dans ce cas, la somme des sous-espaces vectoriels $E_1, \dots, E_r$ est notée

$$\bigoplus_{k=1}^{r} E_k.$$

79.2 Les sous-espaces $E_1, \dots, E_r$ sont en somme directe si, et seulement si, l'application [**78**]

$$S : \prod_{k=1}^{r} E_k \to E$$

est injective.
80. Exemples
80.1 Si deux sous-espaces sont supplémentaires dans E, alors ils sont en somme directe.
80.2 Deux sous-espaces F et G sont en somme directe si, et seulement si, $F \cap G$ est réduit au vecteur nul.
80.3 Si $P_0 \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme de degré d, alors le sous-espace $\mathbb{K}_{d-1}[X]$ et le sous-espace des multiples de P_0 sont supplémentaires dans $\mathbb{K}[X]$.
81. ➙ **Somme directe et familles libres**
Soient E_1, …, E_r, des sous-espaces en somme directe dans E. Étant donnée une famille $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de vecteurs de E, on suppose qu'il existe des indices

$$0 = k_0 < k_1 < \cdots < k_r = n$$

tels que, pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, la famille $(x_k)_{k_{i-1}<k\leqslant k_i}$ soit une famille libre de vecteurs de E_i.
Alors la famille $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une famille libre.

82. Somme directe et dimension
Les sous-espaces vectoriels $E_1, \dots, E_r$ sont en somme directe si, et seulement si, l'application [**78**]

$$S : E_1 \times \cdots \times E_r \to E_1 + \cdots + E_r$$

est un isomorphisme.
82.1 ➙ *Si E est un espace de* dimension finie *et si les sous-espaces E_1, …, E_r sont en somme directe, alors*

$$\dim\Big(\bigoplus_{k=1}^{r} E_k\Big) = \sum_{k=1}^{r} \dim E_k.$$

82.2 ➙ *Si E est un espace de dimension finie et si*

$$\dim\Big(\sum_{k=1}^{r} E_k\Big) = \sum_{k=1}^{r} \dim E_k,$$

alors les sous-espaces vectoriels $E_1, \dots, E_r$ sont en somme directe.

III.2 Décomposition en somme directe

83. ✍ *Une* **décomposition de E en somme directe** *est une famille $(E_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$ de sous-espaces vectoriels de E en somme directe, dont la somme est égale à E lui-même :*

$$E = \bigoplus_{k=1}^{r} E_k.$$

84. ➙ *L'espace E admet une décomposition en somme directe :*

$$E = \bigoplus_{k=1}^{r} E_k$$

si, et seulement si, tout vecteur $x \in E$ admet une, et une seule, décomposition adaptée à cette somme : il existe une, et une seule famille de vecteurs

$$(x_1, \dots, x_r) \in E_1 \times \cdots \times E_r$$

telle que

$$x = x_1 + \cdots + x_r.$$

85. ➙ **Critère de décomposition en somme directe**
Un espace E de dimension finie *est somme directe des sous-espaces E_1, …, E_d si, et seulement si,*

- *les sous-espaces $E_1, \dots, E_d$ sont en somme directe*
- *et la dimension de E est égale à la somme des dimensions des sous-espaces E_i :*

$$\dim E = \sum_{i=1}^{d} \dim E_i.$$

86. ➙ *Soient $\mathscr{B} = (e_k)_{1\leqslant k\leqslant d}$, une base de E, et $(k_i)_{0\leqslant i\leqslant r}$, une famille d'indices entiers tels que*

$$0 = k_0 < k_1 < \cdots < k_r = d.$$

La famille des sous-espaces vectoriels

$$E_i = \mathrm{Vect}(e_{k_{i-1}+1}, \dots, e_{k_i})$$

est une décomposition de E en somme directe :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i.$$

87. ➙ *Soit E, un espace vectoriel de dimension finie. On suppose connues une décomposition de E en somme directe :*

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$$

et une base $\mathscr{B}_i$ de chaque sous-espace vectoriel. Alors la famille obtenue en concaténant ces bases :

$$\mathscr{B} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathscr{B}_i$$

est une base de E, dite **base adaptée à la décomposition en somme directe**.

Projections et décompositions en somme directe

88. On suppose connue une décomposition en somme directe de E :

$$E = \bigoplus_{i\in I} E_i \tag{4}$$

où l'ensemble d'indices I est fini.

88.1 Pour tout $i \in I$, la projection p_i sur E_i parallèlement au sous-espace

$$F_i = \bigoplus_{j\neq i} E_j$$

est bien définie. Cet endomorphisme de E vérifie :

$$\operatorname{Im} p_i = E_i, \qquad \operatorname{Ker} p_i = F_i.$$

88.2 ✍ *La famille $(p_i)_{i\in I}$ est la famille des* **projections associées à la décomposition de E en somme directe**.

88.3 Pour tout $x \in E$, la décomposition de x adaptée à la décomposition (4) de E est

$$x = \sum_{i\in I} p_i(x).$$

88.4

$$x \neq 0_E \iff \exists\, i \in I, \quad p_i(x) \neq 0_E$$

88.5 La famille $(p_i)_{i\in I}$ des projections associées à la décomposition de E en somme directe vérifie :

$$\forall\, i \neq j, \quad p_i \circ p_j = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i\in I} p_i = \mathrm{I}_E\,.$$

89. Exemple

Les sous-espaces vectoriels

$$E_1 = \operatorname{Vect}\big((1,0,1,0),(1,0,-1,0)\big),$$
$$E_2 = \mathbb{R}\cdot(0,1,0,3) \quad \text{et} \quad E_3 = \mathbb{R}\cdot(1,2,1,1)$$

définissent une décomposition de $E = \mathbb{R}^4$ en somme directe.

Pour tout $x = (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4$,

$$p_2(x) = \frac{-x_2+2x_4}{5}\cdot(0,1,0,3), \quad p_3(x) = \frac{3x_2-x_4}{5}\cdot(1,2,1,1)$$

et la matrice de p_1 relative à la base canonique est

$$P_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

90. Étude réciproque

On suppose connue une famille finie $(p_i)_{i\in I}$ d'endomorphismes de E tels que

$$\forall\, i \neq j, \quad p_i \circ p_j = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i\in I} p_i = \mathrm{I}_E\,.$$

90.1 Pour tout $i \in I$, l'endomorphisme p_i est un projecteur.

90.2 L'espace E admet une décomposition en somme directe :

$$E = \bigoplus_{i\in I} \operatorname{Im} p_i \tag{5}$$

et les endomorphismes $(p_i)_{i\in I}$ sont les projections associées à cette décomposition de E.

$$\forall\, i \in I, \quad \operatorname{Ker} p_i = \bigoplus_{j\neq i} \operatorname{Im} p_j$$

Applications linéaires définies "par morceaux"

91. On suppose connue une décomposition de E en somme directe :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i.$$

Nous allons généraliser le théorème [**11**].

91.1 ➙ *Quelle que soit la famille d'applications $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ avec*

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant r, \quad u_i \in \mathrm{L}(E_i, F),$$

l'application

$$\Big[x \mapsto \sum_{i=1}^{r} u_i\big(p_i(x)\big)\Big]$$

est l'unique application linéaire $u \in \mathrm{L}(E,F)$ telle que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant r,\ \forall\, x \in E_i, \quad u(x) = u_i(x).$$

91.2 Étant données une base $\mathscr{C}$ de F et une base

$$\mathscr{B} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathscr{B}_i$$

adaptée à la décomposition en somme directe de E, on peut lire les matrices des différentes applications u_i sur la matrice de u :

$$A = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_i & \cdots A_r\end{pmatrix}$$

avec

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant r, \quad A_i = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_i,\mathscr{C}}(u_i).$$

Entraînement

92. Questions pour réfléchir

1. Soient F et G, deux sous-espaces de E. Un sous-espace de E qui contient $F \cup G$ contient aussi la somme $F + G$.
2. Soient F et G, deux sous-espaces de E. Identifier le noyau de l'application $S : F \times G \to E$ définie par

$$\forall\, (x,y) \in F \times G, \quad S(x,y) = x + y.$$

3. Soient F, G et H, trois sous-espaces vectoriels de E.
3.a Comparer $F \cap (G+H)$ et $(F\cap G) + (F \cap H)$.
3.b Comparer $F + (G\cap H)$ et $(F+G) \cap (F+H)$.
4. Comparer [**78.4**] avec la formule de Grassmann :

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F\cap G)$$

où F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace E de dimension finie.

5. Si la famille de vecteurs $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est libre, alors les droites vectorielles $E_k = \operatorname{Vect}(x_k)$ sont en somme directe. Étudier la réciproque.
6. Si les sous-espaces E_1, …, E_r sont en somme directe, alors pour tout $1 \leqslant k \leqslant r$, les sous-espaces E_1, …, E_k sont en somme directe.
7. Soient E_1, …, E_r, des sous-espaces en somme directe et F, un sous-espace de E. Alors les sous-espaces $(F\cap E_r)$, …, $(F \cap E_r)$ sont en somme directe.

8. On suppose que $E = F \oplus G \oplus H$ et que $\dim E = 2$. Qu'en penser ?

9. *Suite de* [**88.5**] – On suppose que E est un espace de dimension finie et on considère une base $\mathscr{B}$ adaptée à la décomposition de E en somme directe. Les matrices des projections p_i relatives à la base $\mathscr{B}$ sont diagonales et leurs coefficients diagonaux sont égaux à 0 ou à 1.

10. Soient $(P_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, une famille de matrices de $\mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$ telles que

$$\forall\, i \neq j, \quad P_i P_j = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i \in I} P_i = I_d.$$

Il existe [**90**] une matrice inversible Q telle que toutes les matrices $Q^{-1} P_i Q$ soient diagonales.

93. *Suite de* [**88**] – Quels que soient les vecteurs

$$x_1 \in E_1, \quad x_2 \in E_2, \ldots, \quad x_r \in E_r,$$

il existe un, et un seul, vecteur $x \in E$ tel que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant r, \qquad p_i(x) = x_i.$$

94. Soit E, un espace vectoriel (de dimension quelconque) admetttant deux décompositions en somme directe :

$$E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_d = F_1 \oplus \cdots \oplus F_d.$$

On peut identifier les sous-espaces deux à deux :

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant d, \qquad E_i = F_i$$

si, et seulement si, $E_i \subset F_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$.

95. Une famille $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant d}$ de vecteurs non nuls est une base de E si, et seulement si,

$$E = \bigoplus_{k=1}^{d} \operatorname{Vect}(x_k).$$

96. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$, on note F_i, l'ensemble des polynômes $P \in E$ tels que $P(j) = 0$ pour tout entier $0 \leqslant j \leqslant n$ distinct de i. Alors $E = F_0 \oplus F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$.

97. On suppose que $E = F_1 \oplus F_2 = G_1 \oplus G_2$, que $F_1 \subset G_2$ et que $G_1 \subset F_2$. Alors $E = F_1 \oplus G_1 \oplus (F_2 \cap G_2)$.

98. *Suite de* [**91**] –

1. Les sous-espaces $\operatorname{Ker} u_i$ sont en somme directe et

$$\bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker} u_i \subset \operatorname{Ker} u.$$

2. L'image de u est la somme des images des u_i.
3. L'application u est injective si, et seulement si, chaque application u_i est injective et si les sous-espaces $\operatorname{Im} u_i$, $i \in I$, sont en somme directe.

Questions, exercices & problèmes

99. Soit $f : \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ telle que $f(0_n) = 0$, $f(I_n) = 1$ et que

$$\forall\, A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad f(AB) = f(A) f(B).$$

1. Si A est inversible, alors $f(A) \neq 0$ et

$$f(A^{-1}) = \big[f(A)\big]^{-1}.$$

2. Si A est nilpotente, alors $f(A) = 0$.

3.a Une matrice triangulaire supérieure stricte est nilpotente.

3.b Toute matrice singulière (= non inversible) est équivalente à une matrice nilpotente.

3.c Si $f(A) \neq 0$, alors la matrice A est inversible.

100. Orthogonal au sens de la dualité

Soit E, un espace vectoriel de dimension finie, égale à d.

100.1 ✍ *L'***orthogonal** *d'un sous-espace F de E est défini par*

$$F^\circ = \big\{ \varphi \in E^* \,:\, \forall\, x \in F, \quad \varphi(x) = 0 \big\}.$$

100.2 Si $\mathscr{B} = (e_k)_{1 \leqslant k \leqslant d}$ est une base de E, alors

$$\big[\operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_p)\big]^\circ = \operatorname{Vect}(e_k^*,\ p+1 \leqslant k \leqslant d).$$

100.3 Si $\dim F = p$, alors $\dim F^\circ = d - p$.

101. Relation de liaison minimale

Soit $(x_i)_{i \in I}$, une famille liée.

Il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe une sous-famille liée $(x_i)_{i \in J_0}$ de cardinal n_0 et que toute sous-famille $(x_i)_{i \in J}$ de cardinal strictement inférieur à n_0 soit libre.

Discuter l'unicité de l'entier n_0 ; de l'ensemble J_0.

102. Indice de nilpotence d'un endomorphisme

Soient E, un espace vectoriel de dimension $d \geqslant 1$ et f, un endomorphisme nilpotent non nul de E, d'indice de nilpotence d :

$$\forall\, k < d, \quad f^k \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \geqslant d, \quad f^k = 0.$$

102.1 Majoration de l'indice de nilpotence

1. Par définition de d, il existe au moins un vecteur x_0 tel que $f^{d-1}(x_0) \neq 0_E$ et pour *tout* vecteur $x \in E$ tel que

$$f^{d-1}(x) \neq 0_E,$$

la famille

$$\big(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{d-1}(x)\big)$$

est libre.

2. L'indice de nilpotence de $f \in L(E)$ est inférieur à $\dim E$.

102.2 Cas d'égalité

3. La dimension m de $\operatorname{Ker} f$ est supérieure à 1.
4. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, \ldots, e_{d_k})$, une base de $\operatorname{Ker} f^k$.

4.a Il existe des vecteurs $e_{d_k+1}, \ldots, e_{d_{k+1}}$ tels que

$$(e_1, \ldots, e_{d_k}, e_{d_k+1}, \ldots, e_{d_{k+1}})$$

soit une base de $\operatorname{Ker} f^{k+1}$.

4.b Les vecteurs $f^k(e_{d_k+1}), \ldots, f^k(e_{d_{k+1}})$ sont des vecteurs linéairement indépendants de $\operatorname{Ker} f$.

5. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$k \leqslant \dim(\operatorname{Ker} f^k) \leqslant k \dim(\operatorname{Ker} f)$$

et l'indice de nilpotence d de u vérifie l'encadrement suivant.

$$\frac{\dim E}{\dim(\operatorname{Ker} f)} \leqslant d \leqslant \dim E.$$

En particulier, $d = \dim E$ si, et seulement si, $\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$.

103. Soient p et q, deux projecteurs de E. On suppose que

$$p \circ q = 0.$$

103.1 L'endomorphisme $r = p + q - q \circ p$ est un projecteur.
103.2 Les sous-espaces $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Im} q$ sont en somme directe.
103.3 Pour tout $x \in E$, il existe deux vecteurs x_1 et x_2 tels que

$$x = x_1 + x_2, \quad p(x_1) = x_1 \quad \text{et} \quad p(x_2) = 0_E.$$

En particulier, si $x \in \operatorname{Ker} r$, alors

$$x_1 + q(x_2) = 0_E.$$

On en déduit que $x = x_2 \in \operatorname{Ker} p$, puis que

$$\operatorname{Ker} r = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q.$$

103.4 Quels que soient x et y dans E,

$$r\big(p(x) + q(y)\big) = p(x) + q(y).$$

On en déduit que

$$\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q.$$

104. Sur l'espace E des suites réelles convergentes, on considère les formes linéaires

$$\varphi = [u \mapsto \lim u] \quad \text{et} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \varphi_k = [u \mapsto u_k]\,.$$

La famille $(\varphi, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k, \dots)$ est une famille libre de E^*.

105. Les formes linéaires définies par

$$\varphi_1 = [(x, y) \mapsto 3x + y] \quad \text{et} \quad \varphi_2 = [(x, y) \mapsto x - 2z]$$

forment une base du dual de $\mathbb{R}^2$.
Identifier la base antéduale (u_1, u_2) [**17.3**].
Quel est l'orthogonal [**100**] de la droite $\mathbb{R} \cdot u_1$?

106. Représentations cartésiennes d'un sous-espace

Un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^d$ peut être caractérisé par la donnée d'une base ou représenté par un système d'équations homogènes. Un tel système caractérise le sous-espace F au moyen d'une famille génératrice de son orthogonal F° [**100**].

106.1 Si $(\varphi_k)_{1 \leqslant k \leqslant d}$ est une base de E^* et si $\mathscr{B} = (e_k)_{1 \leqslant k \leqslant d}$ est sa base antéduale, alors

$$\bigcap_{k=1}^{r} \operatorname{Ker} \varphi_k = \operatorname{Vect}(e_k,\ r < k \leqslant d).$$

106.2 Soit $(\varphi_k)_{1 \leqslant k \leqslant r}$, une famille *libre* de formes linéaires sur E. Alors le sous-espace

$$F = \bigcap_{k=1}^{r} \operatorname{Ker} \varphi_k$$

est un espace de codimension r et, pour toute forme linéaire φ,

$$F \subset \operatorname{Ker} \varphi \iff \varphi \in \operatorname{Vect}(\varphi_k,\ 1 \leqslant k \leqslant r).$$

106.3 Les sous-espaces vectoriels définis par la donnée de r équations cartésiennes indépendantes sont les sous-espaces vectoriels de codimension r.