Index des démonstrations rédigées

Chapitre 4 — Compléments d'algèbre linéaire

[7.2] 01-01
[30] 01-05
[43] 01-08
[44] 01-07
[60] 01-02
[67] 01-06
[71] 01-12
[73] rms130-768
[77] 01-11
[88.1] 01-03
[89] 01-04
[94] 01-10
[97] 01-09

Chapitre 5 — Calcul matriciel par blocs

[11] 02-05
[19] rms132-1142
[20] rms132-1152
[22] 02-07
[23] rms132-1145
[60] 02-06
[64] 02-02
[66] 02-01
[86] rms130-1146
[91] rms120-830

Exercice 1 — Exemples de familles libres

1. Une combinaison linéaire de fonctions continues est une fonction continue, donc la famille $\left(\mathbb{1}_{[a,+\infty[}\right)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.

2. Une combinaison linéaire de fonctions dérivables est dérivable, donc la famille $\left([t\mapsto|t-a|]\right)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.

3. Il arrive qu'on puisse, par dérivation ou par comparaison des ordres de grandeur, déduire d'une relation de liaison non triviale une autre relation de liaison sur un plus petit nombre de vecteurs.

3. a. La famille $\left([t\mapsto\exp(at)]\right)_{a\in\mathbb{C}}$ est libre.

3. b. La famille $\left([t\mapsto\cos(at)]\right)_{a\in\mathbb{R}_+}$ est libre.

3. c. La famille $\left([n\mapsto q^n]\right)_{q\in\mathbb{R}}$ est libre.

Exercice 2

1. Le sous-espace des polynômes qui admettent 0 et 1 pour racines est un sous-espace de codimension 2 dans $\mathbb{K}[X]$.

2. L'espace $\mathbb{K}[X^2]$ des polynômes pairs n'est pas un sous-espace de codimension finie dans $\mathbb{K}[X]$.

3. L'espace $c_0(\mathbb{R})$ des suites de limite nulle est un sous-espace de codimension finie de l'espace $c(\mathbb{R})$ des suites réelles convergentes.

4. L'espace $c(\mathbb{R})$ des suites réelles convergentes n'est pas un sous-espace de codimension finie dans l'espace $\ell^0(\mathbb{R})$ des suites réelles.

Exercice 3

On suppose connue une décomposition en somme directe de E :

$$E=\bigoplus_{i\in I}E_i$$

où l'ensemble d'indices I est fini.

Pour tout $i\in I$, la projection p_i sur E_i parallèlement au sous-espace

$$F_i=\bigoplus_{j\neq i}E_j$$

est bien définie. Cet endomorphisme de E vérifie :

$$\operatorname{Im}p_i=E_i,\qquad \operatorname{Ker}p_i=F_i.$$

Exercice 4

Les sous-espaces vectoriels

$$E_1=\operatorname{Vect}((1,0,1,0),(1,0,-1,0)),$$
$$E_2=\mathbb{R}\cdot(0,1,0,3)\quad\text{et}\quad E_3=\mathbb{R}\cdot(1,2,1,1)$$

définissent une décomposition de $E=\mathbb{R}^4$ en somme directe.

Pour tout $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4$,

$$p_2(x)=\frac{-x_2+2x_4}{5}\cdot(0,1,0,3),\quad p_3(x)=\frac{3x_2-x_4}{5}\cdot(1,2,1,1)$$

et la matrice de p_1 relative à la base canonique est

$$P_1=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5&-3&0&1\\0&0&0&0\\0&-3&5&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Exercice 5 — Commutant d'un endomorphisme cyclique

Soient E, un espace vectoriel et f, un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe un vecteur $x_0\in E$ tel que la famille

$$\left(x_0,f(x_0),\dots,f^{n-1}(x_0)\right)$$

soit une base de E et on note $\mathscr{C}$, l'ensemble des endomorphismes g de E qui commutent à f :

$$g\in\mathscr{C}\iff f\circ g=g\circ f.$$

1. La dimension de E est égale à n et le rang de f est supérieur à $(n-1)$.

2. Si $g\in\mathscr{C}$, alors il existe une famille de scalaires $(\alpha_k)_{0\leqslant k<n}$ telle que

$$g(x_0)=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k\cdot f^k(x_0)$$

et, pour tout vecteur x de E,

$$g(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k\cdot f^k(x).$$

Le commutant $\mathscr{C}$ de f est égal à $\operatorname{Vect}_{\mathbb{K}}(I_E,f,\dots,f^{n-1})$, c'est-à-dire au sous-espace $\mathbb{K}[f]$ des polynômes en f.

3. Donner un exemple d'un tel endomorphisme f dont le rang soit égal à $(n-1)$.

Exercice 6 — Caractérisation des formes linéaires non proportionnelles

Soient H_1 et H_2, deux hyperplans d'un espace vectoriel E.

1. Si $H_1\subset H_2$, alors les deux hyperplans H_1 et H_2 sont égaux.

2. Soient ε et η, deux formes linéaires (non identiquement nulles) qui ne sont pas proportionnelles. Alors il existe deux vecteurs u et v de E tels que

$$\varepsilon(u)=\eta(v)=1\quad\text{et}\quad\varepsilon(v)=\eta(u)=0.$$

3. Soient ε et η, deux formes linéaires sur E. L'application

$$\varphi=[(x,y)\mapsto\varepsilon(x)\eta(y)]$$

est une forme bilinéaire sur E. Elle est symétrique :

$$\forall\,(x,y)\in E\times E,\qquad\varepsilon(x)\eta(y)=\varepsilon(y)\eta(x)$$

si, et seulement si, les formes linéaires ε et η sont proportionnelles.

Exercice 7

Soient $(\varphi_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$, une famille de formes linéaires sur E et $u \in L(E, \mathbb{K}^r)$, l'application définie par

$$\forall\, x \in E, \quad u(x) = \big(\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x)\big).$$

1. Si la famille $(\varphi_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$ est libre, alors il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que

$$\operatorname{Ker} u = \operatorname{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$$

et u est surjective.
2. Si la famille $(\varphi_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$ est liée, alors il existe une forme linéaire non nulle

$$\Psi = [(y_1, \dots, y_r) \mapsto a_1 y_1 + \cdots + a_r y_r]$$

telle que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} \Psi$. Que peut-on en déduire si u est surjective ?

Exercice 8

Soient ε_1, …, ε_n, des formes linéaires sur E.
1. La famille $(\varepsilon_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est libre si, et seulement si, l'application

$$\varphi = \big[x \mapsto \big(\varepsilon_1(x), \dots, \varepsilon_n(x)\big)\big] \,:\, E \to \mathbb{K}^n$$

est surjective.
2. La famille $(\varepsilon_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est libre si, et seulement si, il existe une famille $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de vecteurs de E telle que

$$\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant n, \quad \varepsilon_i(x_j) = \delta_{i,j}.$$

Exercice 9

Soient f_1, …, f_n, des formes linéaires sur E, espace de dimension n.

Si l'espace vectoriel V des solutions du système linéaire homogène

$$\big\{f_k(x) = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n\big\}$$

n'est pas réduit au vecteur nul, alors la famille $\mathscr{F} = (f_1, \dots, f_n)$ est liée dans E^*.

Exercice 10

On suppose que $E = F_1 \oplus F_2 = G_1 \oplus G_2$, que $F_1 \subset G_2$ et que $G_1 \subset F_2$. Alors $E = F_1 \oplus G_1 \oplus (F_2 \cap G_2)$.

Exercice 11

Soit E, un espace vectoriel (de dimension quelconque) admetttant deux décompositions en somme directe :

$$E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_d = F_1 \oplus \cdots \oplus F_d.$$

On peut identifier les sous-espaces deux à deux :

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant d, \qquad E_i = F_i$$

si, et seulement si, $E_i \subset F_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$.

Exercice 12

1. Soient u et v, deux vecteurs linéairement indépendants de E, espace vectoriel réel de dimension finie.
1. a. Il existe deux formes linéaires φ et ψ sur E telles que

$$\begin{cases} \varphi(u) = 1 \\ \varphi(v) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \psi(u) = 0 \\ \psi(v) = 1 \end{cases}.$$

1. b. Il existe une forme linéaire θ sur E qui telle que

$$\theta(v) < 0 < \theta(u).$$

On dit que l'hyperplan $\operatorname{Ker}\theta$ **sépare** les vecteurs u et v.
2. Soient f et g, deux applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, non proportionnelles. On considère les formes linéaires sur $E = \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ définies par

$$\forall\, h \in E, \quad \varphi_f(h) = \int_a^b f(t)h(t)dt \quad \text{et} \quad \varphi_g(h) = \int_a^b g(t)h(t)dt.$$

2. a. Les formes linéaires φ_f et φ_g ne sont pas proportionnelles.
2. b. Il existe une forme linéaire θ sur E telle que

$$\theta(g) < 0 < \theta(f).$$

Exercice 13

Soient $(e_1, \dots, e_p)$, une famille libre de vecteurs de E, espace vectoriel de dimension finie. Pour tout vecteur $a \in E$, on pose

$$F_a = \operatorname{Vect}(e_1 + a,\ e_2 + a, \dots, e_p + a)$$

et on note G, un supplémentaire de F_0 dans E.
1. Pour tout $a \in G$, les sous-espaces F_a et G sont supplémentaires dans E.
2. Si a et b sont deux vecteurs distincts de G, alors $F_a \neq F_b$. Illustrer par une figure quand G est une droite du plan E.

Exercice 14 — JBX25-S1

Soient E, un espace de dimension finie, égale à $d \in \mathbb{N}^*$, et $(p_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$, une famille d'endomorphismes de E. On suppose que

$$\sum_{k=1}^{r} p_k = I_E$$

et que

$$\sum_{k=1}^{r} \operatorname{rg} p_k = d = \dim E.$$

1. Vérifier que les sous-espaces $\operatorname{Im} p_k$, $1 \leqslant k \leqslant r$, sont en somme directe.
2. En déduire que les endomorphismes p_k, $1 \leqslant k \leqslant r$, sont des projecteurs.

Exercice 15 — VT25-S1

Soient E, un espace vectoriel de dimension finie ; F et G, deux sous-espaces vectoriels de E. Condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un endomorphisme $u \in L(E)$ tel que $\operatorname{Im} u = F$ et $\operatorname{Ker} u = G$?

Exercice 16

Soient E et F, deux espaces vectoriels de dimension finie. Démontrer que toute application linéaire $u \in L(E,F)$ de rang r peut se décomposer en une somme de r applications linéaires de rang 1.

Exercice 17 VT25-S1

Soit E, un espace vectoriel de dimension finie.

1. Soient a et b, deux vecteurs de E. On suppose que $a \neq 0_E$. Démontrer qu'il existe un endomorphisme $u \in L(E)$ tel que $u(a) = b$.

2. Soient f et g, deux endomorphismes de E. On suppose que

$$\forall\, u \in L(E), \quad f \circ u \circ g = \omega_E.$$

Démontrer que $f = \omega_E$ ou $g = \omega_E$.

Exercice 18

Soit u, l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Le sous-espace $G = [x - 3y + 2z = 0]$ est stable par u. La droite $F = \mathbb{R} \cdot (0,1,1)$ est stable par u. Les sous-espaces F et G sont supplémentaires dans E.

2. Soit (e_2, e_3), une base de G. Il existe un vecteur $e_1 \in E$ tel que $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$ soit une base de E pour laquelle

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

On peut choisir les vecteurs e_2 et e_3 de telle sorte que la matrice $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}(u)$ soit triangulaire.

Exercice 19

1. Soit $u \in GL(E)$. Si F est un sous-espace de dimension finie de E qui est stable par u, alors $u_F \in GL(F)$. De plus, le sous-espace F est stable par u^{-1} et

$$(u^{-1})_F = (u_F)^{-1}.$$

2. Il existe un automorphisme u de $E = \mathbb{K}[X]$ qui stabilise le sous-espace $F = \mathbb{K}[X^2]$ tel que l'endomorphisme de F induit par restriction de u ne soit pas un automorphisme de F.

Exercice 20 Lemme d'Hadamard

Si $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice à **diagonale fortement dominante** :

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|,$$

alors elle est inversible.

Exercice 21

Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$.

Si $\det A = 1$, alors il existe des matrices de transvections $(P_k)_{1 \leqslant k \leqslant N}$ telles que

$$A = P_1 P_2 \cdots P_N.$$

Dans le cas général, il existe des matrices de transvections $(P_k)_{1 \leqslant k \leqslant N}$ et une matrice de dilatation D telles que

$$A = P_1 P_2 \cdots P_N D.$$

Exercice 22

Soient $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et

$$B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}.$$

1. Calculer B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2. On suppose qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifie $P(A) = 0$. Expliciter un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(B) = 0$.

Exercice 23

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes.

— La matrice A n'est pas inversible.

— Il existe une matrice $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $AB = BA = 0_n$.

Exercice 24

Soient n, un entier supérieur à 2, et a, b, deux réels distincts. Démontrer qu'il existe une, et une seule, forme linéaire φ sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ telle que $\varphi(1) = 1$, $\varphi(X) = 0$ et que $\varphi(P) = 0$ pour tout polynôme $P \in E$ tel que $P(a) = P(b) = 0$.

(On considérera une base de E échelonnée en degré adaptée à l'énoncé.)

Exercice 25

Soient p et q, deux projecteurs d'un espace vectoriel E. On suppose que p et q commutent : $p \circ q = q \circ p$.

1. Démontrer que $r = p \circ q$ est un projecteur.

2. Déterminer le noyau et l'image de r en fonction de p et q.

Exercice 26 **rms130-768**

Soient E, un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et f, un endomorphisme de E.

1. Pour tout endomorphisme $g \in L(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f$, les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par g.

2. Soit $p \in L(E)$, un projecteur. Démontrer que p et f commutent si, et seulement si, $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par f.

Exercice 27 **rms 130 - 1146**

On suppose que $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont tous strictement positifs et que $B = \mathfrak{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

1. La matrice

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & 0 \end{pmatrix}$$

est symétrique et

$$\det M = \det A.\det(-B^\top.A^{-1}.B).$$

2. Si le rang du bloc B est égal à m, alors le noyau de la matrice $B^\top.A^{-1}.B$ est réduit à la colonne nulle et la matrice M est inversible.

Exercice 28 **rms132-1142**

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. La dimension du noyau de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0_n & A \\ A & 0_n \end{pmatrix}$$

est égale à $2\dim \operatorname{Ker} A$. Calculer B^2.

Exercice 29 **132 – 1145**

Soient A et B, deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent : $AB = BA$. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & A \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{C}).$$

1. Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, exprimer $P(M)$ en fonction de $P(A)$, $P'(A)$ et B.

2. Démontrer que M est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable et $B = 0$.

Exercice 30 **132 – 1152**

Soient $C \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -C^\top \\ C & I_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

1. Calculer $M^\top.M$. En déduire que M est inversible.

2. Démontrer que la matrice $M^{-1}M^\top$ est orthogonale.

Algèbre linéaire (Solutions)

Solution 1

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note f_a, la fonction $\mathbb{1}_{[a,+\infty[}$ (fonction de Heavyside).

❧ On travaille donc dans l'espace vectoriel $\mathscr{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

✍ *D'après le cours, la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre si, et seulement si, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, toute sous-famille de n fonctions*

$$(f_{a_1}, f_{a_2}, \dots, f_{a_n})$$

est libre.

❧ Fixons un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et choisissons n réels quelconques :

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n.$$

Partons d'une relation de liaison entre les fonctions f_{a_k} : supposons qu'il existe n scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_{a_k} = 0_{\mathscr{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})}.$$

On a donc

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \lambda_k f_{a_k} = \sum_{\substack{1\leqslant \ell \leqslant n \\ \ell \neq k}} (-\lambda_\ell) f_{a_\ell}. \tag{$\star$}$$

Chaque fonction f_{a_i} est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{a_i\}$ et discontinue au point a_i (la limite à gauche en a_i est nulle alors que la limite à droite en a_i est égale à 1).

Le second membre de l'égalité $(\star)$ est donc une fonction continue au point a_k, en tant que combinaison linéaire de fonctions qui sont toutes continues en a_k (la fonction f_{a_ℓ} est discontinue en a_ℓ, donc elle est continue en $a_k \neq a_\ell$).

Le premier membre de $(\star)$ est donc une fonction continue au point a_k également. Comme f_{a_k} n'est pas continue en a_k, la seule possibilité est donc que $\lambda_k = 0$.

On a ainsi démontré que la sous-famille $(f_{a_k})_{1\leqslant k\leqslant n}$ était libre.

Cela vaut pour toute sous-famille finie de $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ (quel que soit le nombre d'éléments de cette famille), donc la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.

2. On utilise la même méthode en considérant cette fois les fonctions définies par

$$\forall\, a \in \mathbb{R},\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f_a(t) = |t - a|.$$

Comme précédemment, on arrive à la relation $(\star)$.

Cette fois, chaque fonction f_{a_i} est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ sauf en $t = a_i$. Le second membre de $(\star)$ est donc dérivable au point $t = a_k$ (en tant que combinaison linéaire de fonctions dérivables en ce point). Par conséquent, le premier membre de $(\star)$ est lui aussi dérivable en $t = a_k$ et comme la fonction f_{a_k} n'est pas dérivable en ce point, il faut que $\lambda_k = 0$.

On conclut comme plus haut.

3. a. On commence toujours de la même manière, en considérant les fonctions définies par

$$\forall\, a \in \mathbb{C},\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f_a(t) = \exp(at)$$

et on arrive une nouvelle fois à la relation

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_{a_k}(t) = 0. \tag{$\dagger$}$$

Comme les fonctions f_{a_k} sont indéfiniment dérivables, on peut dériver cette relation :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_{a_k}^{(p)}(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k^p \exp(a_k t) = 0$$

et comme ces relations sont établies pour tout $t \in \mathbb{R}$, on peut par exemple choisir $t = 0$:

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k^p \lambda_k = 0.$$

(L'équation pour $p = 0$ découle de (†) avec $t = 0$.)

On reconnaît ici un système homogène de Vandermonde associé aux scalaires $a_1, \dots, a_n$ qui sont deux à deux distincts. Il s'agit donc d'un système de Cramer et son unique solution est donc connue :

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

On conclut une nouvelle fois de la même manière.

3. b. On commence toujours de la même manière, en considérant les fonctions définies par

$$\forall\, a \in \mathbb{C},\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f_a(t) = \cos at$$

et on arrive une nouvelle fois à la relation (†) où les a_k sont des réels positifs deux à deux distincts.

Les fonctions f_a sont encore indéfiniment dérivables mais il faut dériver un nombre pair de fois pour obtenir une relation exploitable :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad 0 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_{a_k}^{(2p)}(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (-1)^p a_k^{2p} \cos a_k t$$

et on conclut comme plus haut en évaluant en $t = 0$:

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{n} (-a_k^2)^p \lambda_k = 0.$$

Il s'agit à nouveau d'un système homogène de Vandermonde, associé aux scalaires $-a_1^2, \dots, -a_n^2$ qui sont deux à deux distincts (puisque les a_k sont des réels *positifs* deux à deux distincts).

3. c.

✍ *On considère cette fois des fonctions dont la variable est notée n — autrement dit, nos vecteurs sont ici des suites : nous allons travailler dans l'espace $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles et, pour tout $q \in \mathbb{R}$, nous noterons g_q, la suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$.*

Bien entendu, la méthode est toujours la même : on considère une famille finie de paramètres q_k deux à deux distincts. On choisit donc un entier $N \in \mathbb{N}^*$ et des réels $q_1, q_2, \dots, q_N$ deux à deux distincts et tels que

$$|q_1| \leqslant |q_2| \leqslant \cdots \leqslant |q_N|.$$

❧ *Comme les q_k sont deux à deux distincts, si $|q_k| = |q_{k+1}|$, alors il faut que $q_k = -q_{k+1}$.*
Dans cette succession d'inégalités larges, il ne peut pas y avoir deux égalités consécutives.
Si on se restreignait aux paramètres $q \in \mathbb{R}_+$ (au lieu de $q \in \mathbb{R}$), on pourrait supposer que $0 \leqslant q_1 < q_2 < \cdots < q_N$.

On suppose comme d'habitude qu'il existe des scalaires (réels) $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ tels que

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_k g_{q_k} = 0_E$$

(où le second membre désigne la suite nulle), c'est-à-dire

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{N} \lambda_k q_k^n = 0 \tag{‡}$$

et, comme toujours, nous cherchons à démontrer que tous les réels λ_k sont nuls.

Première méthode - par récurrence

Initialisation. Si $N = 1$, la relation (‡) se réduit à

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \lambda_1 q_1^n = 0.$$

En particulier, pour $n = 0$, il reste $\lambda_1 = 0$.

HR. On suppose qu'il existe un entier $N \geqslant 1$ pour lequel la propriété (‡) implique que les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ soient tous nuls.

Hérédité. On suppose que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{N+1} \lambda_k q_k^n = 0. \tag{♣}$$

On sait que $0 \leqslant |q_1| \leqslant \cdots \leqslant |q_{N+1}|$ et que les q_k sont deux à deux distincts. Comme $N \geqslant 1$, on a $N \geqslant 2$, donc :

— si $q_1 = 0$, alors $q_{N+1} \neq 0$ et $|q_{N+1}| > 0$;
— si $q_1 \neq 0$, alors $|q_{N+1}| \geqslant |q_1| > 0$.

On peut donc diviser la somme par un terme prépondérant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \left[\sum_{k=1}^{N} \lambda_k \left(\frac{q_k}{q_{N+1}}\right)^n\right] + \lambda_{N+1} = 0. \tag{♠}$$

— Premier cas. — Si $|q_N| < |q_{N+1}|$, alors

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant N, \quad \left|\frac{q_k}{q_{N+1}}\right| < 1$$

et par conséquent

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant N, \quad \lim_{n\to+\infty} \lambda_k \left(\frac{q_k}{q_{N+1}}\right)^n = 0.$$

On déduit alors de (♠) que $\lambda_{N+1} = 0$ (en faisant tendre n vers $+\infty$), puis de (♣) que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{N} \lambda_k q_k^n = 0,$$

ce qui permet de conclure en invoquant l'Hypothèse de récurrence.

— Deuxième cas. — Si $|q_N| = |q_{N+1}|$, alors $q_{N+1} = -q_N$ et

$$\forall\, 1 \leqslant k < N, \quad |q_k| < |q_N|.$$

✍ *On ne peut plus passer à la limite dans (♠) puis qu'on vient de faire apparaître la suite de terme général $(-1)^n$, qui est divergente.*
Qu'à cela ne tienne, nous allons recourir aux ordres de grandeur !

Lorsque n tend vers $+\infty$, on déduit de (♠) que

$$\lambda_{N+1} + (-1)^n \lambda_N + o(1) \underset{n\to+\infty}{=} 0.$$

On en déduit que

$$\lambda_{N+1} + \lambda_N = \lambda_{N+1} - \lambda_N = 0$$

et donc que $\lambda_{N+1} = \lambda_N$.

✍ *On fait tendre n vers $+\infty$ en se restreignant d'abord aux valeurs paires de n, puis aux valeurs impaires de n.*
On ne peut pas passer à la limite quand une suite diverge. Mais s'il existe des suites extraites convergentes, on peut passer à la limite sur ces suites extraites.

Comme dans le premier cas, on déduit alors de (♣) que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{N} \lambda_k q_k^n = 0,$$

ce qui permet encore de conclure en invoquant l'Hypothèse de récurrence.

✍ *Attention à ne pas rater la dernière marche ! Le raisonnement sur les ordres de grandeur pourrait nous inciter à écrire que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{N-1} \lambda_k q_k^n = 0$$

(puisque λ_N et λ_{N+1} sont nuls), mais nous ne pourrions pas appliquer notre hypothèse de récurrence...
On pourrait s'en tirer au moyen d'une hypothèse de récurrence forte — mais j'ai préféré "oublier" l'information $\lambda_N = 0$.

Autre méthode

Nous allons raisonner par l'absurde, ce qui nous évitera de raisonner par récurrence.
Nous repartons de (‡) :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{N} \lambda_k q_k^n = 0$$

toujours en supposant que

$$|q_1| \leqslant |q_2| \leqslant \cdots \leqslant |q_N|$$

et en supposant en outre qu'il existe au moins un indice $1 \leqslant k \leqslant N$ tel que $\lambda_k \neq 0$.

✍ *On suppose donc que la famille $(g_{q_k})_{1\leqslant k\leqslant N}$ est une famille liée et nous cherchons à en déduire une contradiction.*

D'après notre hypothèse, l'ensemble

$$\Omega = \{1 \leqslant k \leqslant N \ : \ \lambda_k \neq 0\}$$

est une partie finie non vide de $\mathbb{N}$, donc l'ensemble Ω admet un plus grand élément que nous noterons m.

Par définition du plus grand élément, $m \in \Omega$ et $k \notin \Omega$ pour tout $m < k \leqslant N$, donc

$$\lambda_m \neq 0 \quad \text{et} \quad \lambda_{m+1} = \cdots = \lambda_N = 0$$

ce qui permet de simplifier la relation $(\ddagger)$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k^n = 0.$$

Premier cas. Si $q_m = 0$, alors $m = 1$ et pour $n = 0$, il reste $\lambda_1 = \lambda_m = 0$, ce qui contredit la définition de l'indice m.

Deuxième cas. Si $|q_m| > |q_{m-1}|$, alors on peut diviser par q_m :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k \Big(\frac{q_k}{q_m}\Big)^n + \lambda_m = 0$$

et comme $|{}^{q_k}/_{q_m}| < 1$ pour tout $1 \leqslant k < m$, on peut faire tendre n vers $+\infty$: il reste $\lambda_m = 0$, ce qui contredit la définition de l'indice m.

Troisième cas. Si $|q_m| = |q_{m-1}|$, alors on peut diviser par q_m :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{m-2} \lambda_k \Big(\frac{q_k}{q_m}\Big)^n + \lambda_{m-1}(-1)^n + \lambda_m = 0.$$

On en déduit que

$$\lambda_{m-1}(-1)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\lambda_m$$

(puisque tous les quotients sont *strictement* inférieurs à 1 en module). Comme la suite de terme général $(-1)^n$ est divergente, on en déduit que $\lambda_{m-1} = 0$ et donc que $\lambda_m = 0$. Dans ce dernier cas aussi, la définition de l'indice m est contredite.

Conclusion. En supposant que l'ensemble Ω n'était pas vide, nous sommes arrivés à une contradiction. On en déduit que $\Omega = \varnothing$, donc que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant N, \quad \lambda_k = 0$$

et donc que toute sous-famille finie de la famille $(g_q)_{q\in\mathbb{R}}$ des suites géométriques est libre.

Solution 2

1. Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ admet 0 et 1 pour racine si, et seulement si, il est divisible par $X(X-1)$. L'ensemble de ces polynômes est donc le sous-espace vectoriel

$$F = \big\{X(X-1)Q,\ Q \in \mathbb{K}[X]\big\}.$$

Comme le polynôme $X(X-1)$ n'est pas le polynôme nul, on peut diviser n'importe quel polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ par $X(X-1)$: il existe donc un unique couple (Q, R) de polynômes tels que

$$P = X(X-1)Q + R$$

avec $\deg R < 2$, c'est-à-dire $R \in \mathbb{K}_1[X]$.

On a ainsi démontré que

$$\mathbb{K}[X] = F \oplus \mathbb{K}_1[X]$$

et en particulier que la codimension de F est égale à $\dim \mathbb{K}_1[X] = 2$.

2. Comme la base canonique $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ (!), le cours nous dit que

$$\mathbb{K}[X] = \mathrm{Vect}(X^{2p},\ p \in \mathbb{N}) \oplus \mathrm{Vect}(X^{2p+1},\ p \in \mathbb{N}).$$

On connaît donc un supplémentaire de $\mathbb{K}[X^2] = \text{Vect}(X^{2p},\, p \in \mathbb{N})$ et ce supplémentaire est un sous-espace de dimension infinie.

Donc le sous-espace $\mathbb{K}[X^2]$ des polynômes pairs n'est pas un sous-espace de codimension finie.

3. Toute suite réelle convergente possède une, et une seule, limite réelle (par définition !). Il existe donc une application $L : c(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c(\mathbb{R}), \qquad L(u) = \lim_{n\to+\infty} u_n.$$

Par linéarité de la limite, cette application L est une forme linéaire sur $c(\mathbb{R})$ et le sous-espace $c_0(\mathbb{R})$ des suites réelles de limite nulle est le noyau de cette forme linéaire L.

La forme linéaire L n'est pas identiquement nulle (la limite de la suite constante égale à 1 n'est pas nulle), donc $c_0(\mathbb{R})$ est un hyperplan, c'est-à-dire un sous-espace de codimension 1.

✍ *L'Astuce taupinale nous donne une décomposition simple d'une suite convergente comme somme d'une suite constante et d'une suite de limite nulle.*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = L(u) + \big(u_n - L(u)\big)$$

La droite vectorielle des suites constantes est donc un supplémentaire de l'hyperplan des suites de limite nulle dans l'espace des suites convergentes.

Bien évidemment, ce n'est pas le seul supplémentaire possible, mais il est clair que c'est le plus simple de tous les supplémentaires possibles !

4. Pour tout entier $k \geqslant 2$, on note g_k, la suite géométrique $(k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ (qui diverge vers $+\infty$).

Supposons que le sous-espace $c(\mathbb{R})$ des suites réelles convergentes admette un supplémentaire G et notons p (resp. q), la projection sur $c(\mathbb{R})$ parallèlement à G (resp. sur G parallèlement à $c(\mathbb{R})$).

Comme les suites g_k sont d'ordres de grandeur différents et que toute suite convergente est bornée, la famille $\big(q(g_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est *libre*.

✍ *À rédiger ! C'est déjà un exercice un peu compliqué !*

Attention ! *Comme toutes les projections distinctes de l'Identité, l'application q n'est pas injective. La famille des suites géométriques $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre, mais cela ne suffit pas pour en déduire que son image $\big(q(g_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre elle aussi.*

Le sous-espace G contient donc une famille libre de cardinal infini, donc c'est un espace de dimension infinie.

Par conséquent, l'espace des suites convergentes n'est pas un sous-espace de codimension finie dans l'espace $\ell^0(\mathbb{R})$ des suites réelles.

Solution 3

L'indice $i \in I$ est fixé.

❧ Soit $x \in E$. Par hypothèse, il existe une famille $(x_j)_{j\in I}$ de vecteurs tels que

$$\forall\, j \in I, \quad x_j \in E_j \quad \text{et} \quad x = \sum_{j\in I} x_j.$$

En isolant le terme d'indice i, on en déduit que

$$x = \underbrace{x_i}_{\in E_i} + \underbrace{\sum_{j\neq i} x_j}_{\in F_i}$$

par définition du sous-espace F_i.

On a ainsi démontré que $E \subset E_i + F_i$ et en fait que $E = E_i + F_i$ (puisque l'inclusion réciproque est évidente).

❧ Pour démontrer que la somme $E_i + F_i$ est directe, considérons deux vecteurs $x_i \in E_i$ et $y_i \in F_i$ tels que

$$x_i + y_i = 0_E.$$

Par définition de F_i, il existe une famille $(x_j)_{j\neq i}$ de vecteurs tels que

$$\forall\, j \neq i, \quad x_j \in E_j \quad \text{et} \quad y_i = \sum_{j\neq i} x_j.$$

On obtient ainsi

$$\sum_{j\in I} x_j = 0_E$$

où $x_j \in E_j$ pour tout $j \in I$ (que l'indice j soit différent de i ou égal à i).

Comme les sous-espaces vectoriels $(E_j)_{j\in I}$ sont en somme directe, on en déduit que

$$\forall j \in I, \qquad x_j = 0_E$$

et en particulier que $x_i = y_i = 0_E$. CQFD

❧ On a ainsi démontré que

$$\forall\, i \in I, \quad E = E_i \oplus F_i.$$

Solution 4

Les sous-espaces E_1, E_2 et E_3 définissent une décomposition en somme directe de E si, et seulement si, pour tout vecteur $\boldsymbol{x} \in E$, il existe un unique triplet

$$(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{wv}, \boldsymbol{w}) \in E_1 \times E_2 \times E_3$$

tel que

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}.$$

Or, par construction, on connaît un vecteur directeur de E_2 (et donc une base de E_2), un vecteur directeur de E_3 (même remarque) et une famille génératrice de E_1. Comme les deux vecteurs qui engendrent E_1 ne sont pas proportionnels, ils sont linéairement indépendants et forment donc une base de E_1. Par conséquent, les trois sous-espaces vectoriels définissent une décomposition de E en somme directe si, et seulement si, pour tout vecteur $\boldsymbol{x} \in E$, il existe un unique quadruplet $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\boldsymbol{x} = \underbrace{\alpha \cdot (1,0,1,0) + \beta \cdot (1,0,-1,0)}_{=\boldsymbol{u}} + \underbrace{\gamma \cdot (0,1,0,3)}_{=\boldsymbol{v}} + \underbrace{\delta \cdot (1,2,1,1)}_{=\boldsymbol{w}}.$$

Cela revient à dire que les quatre vecteurs

$$(1,0,1,0), \quad (1,0,-1,0), \quad (0,1,0,3), \quad (1,2,1,1)$$

forment une base de $\mathbb{R}^4$ ou encore que la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible.

Comme les opérations de pivot conservent le rang,

$$\operatorname{rg} P = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = 4$$

en effectuant d'abord $C_2 \leftarrow C_2 + C_1$ et $C_4 \leftarrow C_4 - C_1 - 2C_3$, puis $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2$.

On a ainsi démontré que les trois sous-espaces vectoriels définissaient bien une décomposition de E en somme directe.

❧ En particulier, il existe trois projections p_1, p_2 et p_3 associées à cette décomposition au sens où

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in E, \quad \boldsymbol{x} = \underbrace{p_1(\boldsymbol{x})}_{\in E_1} + \underbrace{p_2(\boldsymbol{x})}_{\in E_2} + \underbrace{p_3(\boldsymbol{x})}_{\in E_3}.$$

Comme les sous-espaces sont en somme directe, la décomposition du vecteur $\boldsymbol{x}$ est unique, donc

$$\begin{aligned} p_1(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{u} = \alpha \cdot (1,0,1,0) + \beta \cdot (1,0,-1,0), \\ p_2(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{v} = \gamma \cdot (0,1,0,3), \\ p_3(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{w} = \delta \cdot (1,2,1,1). \end{aligned}$$

Pour exprimer les projections p_1, p_2 et p_3, il faut donc résoudre le système

$$\begin{cases} \alpha + \beta \phantom{{}+ 2\delta} + \delta = x_1 \\ \gamma + 2\delta = x_2 \\ \alpha - \beta \phantom{{}+ 2\delta} + \delta = x_3 \\ 3\gamma + \delta = x_4 \end{cases}$$

d'inconnues α, β, γ et δ, c'est-à-dire inverser la matrice P.

✍ *Il n'était pas nécessaire d'inverser P pour prouver que les trois sous-espaces vectoriels définissaient une décomposition de E en somme directe. Il ne suffit pas de justifier que P est inversible quand on cherche à exprimer les projections associées à la décomposition en somme directe. Il est donc important de bien formuler le problème à résoudre avant de se lancer dans les calculs...*

On arrive après quelques efforts à

$$P^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 & -6 & 5 & 2 \\ 5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

donc à

$$\alpha = \frac{5x_1 - 6x_2 + 5x_3 + 2x_4}{10}, \quad \beta = \frac{5x_1 - 5x_3}{10},$$
$$\gamma = \frac{-x_2 + 2x_4}{5}, \quad \delta = \frac{3x_2 - x_4}{5}$$

et enfin à

$$\begin{aligned} p_1(\mathbf{x}) &= \frac{5x_1 - 6x_2 + 5x_3 + 2x_4}{10} \cdot (1,0,1,0) + \frac{5x_1 - 5x_3}{10} \cdot (1,0,-1,0) \\ &= \frac{5x_1 - 3x_2 + x_4}{5} \cdot (1,0,0,0) + \frac{3x_2 + 5x_3 + x_4}{5} \cdot (0,0,1,0) \\ p_2(\mathbf{x}) &= \frac{-x_2 + 2x_4}{5} \cdot (0,1,0,3) \\ p_3(\mathbf{x}) &= \frac{3x_2 - x_4}{5} \cdot (1,2,1,1). \end{aligned}$$

La matrice de p_1 relative à la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est donc bien la matrice P_1.

✍ *(Spécial paresseux) Du fait que $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$, on pouvait se contenter de calculer*

$$P_1 X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5x_1 - 3x_2 + x_4 \\ 0 \\ 3x_2 + 5x_3 + x_4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(calcul matriciel sans difficulté) ; de vérifier ensuite que

$$\frac{5x_1 - 3x_2 + x_4}{5} \cdot (1,0,0,0) + \frac{3x_2 + 5x_3 + x_4}{5} \cdot (0,0,1,0) \in E_1 \qquad \text{(facile)}$$
$$\frac{-x_2 + 2x_4}{5} \cdot (0,1,0,3) \in E_2 \qquad \text{(évident)}$$
$$\frac{3x_2 - x_4}{5} \cdot (1,2,1,1) \in E_3 \qquad \text{(évident)}$$

et de vérifier enfin que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5x_1 - 3x_2 + x_4 \\ 0 \\ 3x_2 + 5x_3 + x_4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{-x_2 + 2x_4}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{3x_2 - x_4}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(pas drôle à cause des fractions, mais sans vraie difficulté) pour conclure que les expressions de l'énoncé donnait une *décomposition de $\mathbf{x}$ dans la somme directe $E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$. Comme cette décomposition est* unique *(somme directe !), on peut en déduire que cette décomposition est* la *décomposition cherchée et qu'il s'agit donc des trois projections cherchées.*
(C'est toujours plus facile quand la réponse est donnée dans l'énoncé !)

Solution 5

1. Comme la famille

$$\mathscr{B}_0 = \left(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\right)$$

de cardinal n est une base de E, la dimension de E est égale à n.

Comme la famille
$$\big(f(x_0),\dots,f^{n-1}(x_0)\big)$$
est une famille libre (en tant que sous-famille d'une famille libre) de cardinal $(n-1)$ de vecteurs de $\operatorname{Im} f$, alors le rang de f est au moins égal à $(n-1)$. (On verra plus loin qu'il peut être égal à $(n-1)$.)

2. On *sait* que tout polynôme en f commute à f, donc
$$\operatorname{Vect}_{\mathbb{K}}(I_E, f,\dots,f^{n-1}) \subset \mathbb{K}[f] \subset \mathscr{C}. \tag{1}$$
Réciproquement, soit $g \in \mathscr{C}$. Comme $g(x_0)$ est un vecteur de E, il existe des scalaires $(\alpha_k)_{0\leqslant k<n}$ tels que
$$g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \cdot f^k(x_0).$$
On en déduit que, pour tout $1 \leqslant i < n$,
$$\begin{aligned} g\big(f^i(x_0)\big) = f^i\big(g(x_0)\big) &= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \cdot f^{k+i}(x_0) \\ &= \Big(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \cdot f^k\Big)\big(f^k(x_0)\big). \end{aligned}$$
Par conséquent, g et
$$P(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \cdot f^k$$
sont deux endomorphismes de E qui coïncident sur la base $\mathscr{B}_0$: ils sont donc égaux sur E, ce qui signifie que
$$g = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \cdot f^k \in \operatorname{Vect}_{\mathbb{K}}(I_E, f,\dots,f^{n-1})$$
et donc que
$$\mathscr{C} \subset \operatorname{Vect}_{\mathbb{K}}(I_E, f,\dots,f^{n-1}) \subset \mathbb{K}[f]. \tag{2}$$
De (1) et (2) on déduit que
$$\mathscr{C} = \operatorname{Vect}_{\mathbb{K}}(I_E, f,\dots,f^{n-1}) = \mathbb{K}[f]. \tag{3}$$
D'après (3), $\dim \mathscr{C} = \dim \mathbb{K}[f] = n$.

✍ *Dans le cas $f = I_E$, le sous-espace $\mathbb{K}[f]$ est aussi petit que possible (de dimension 1) tandis que $\mathscr{C}$ est aussi grand que possible ($\mathscr{C} = L(E)$).*

Dans le cas d'un endomorphisme cyclique, on est en quelque sorte aux antipodes puisque l'égalité $\mathbb{K}[f] = \mathscr{C}$ signifie que $\mathscr{C}$ est aussi petit que possible : seuls les polynômes en f commutent à f !

3. Si f est nilpotent d'indice n, alors $f^{n-1} \neq \omega$, donc il existe un vecteur x_0 tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$.
Si la famille
$$\mathscr{B}_0 = \big(x_0, f(x_0),\dots,f^{n-1}(x_0)\big)$$
est liée, alors il existe une famille $(\alpha_k)_{0\leqslant k<n}$ de scalaires *non tous nuls* tels que
$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \cdot f^k(x_0) = 0_E. \tag{4}$$
On note $0 \leqslant k_0 < n$, le plus petit indice k tel que $\alpha_k \neq 0$: un tel indice existe puisque la famille $(\alpha_k) 0 \leqslant k < n$ n'est pas identiquement nulle. Alors
$$n_0 = n - k_0 - 1 \geqslant 0$$
et on peut appliquer f^{n_0} à (4) :
$$\sum_{0\leqslant k<k_0} \underbrace{\alpha_k}_{=0} \cdot f^{n_0+k}(x_0) + \alpha_{k_0} \cdot f^{n_0+k_0}(x_0) + \sum_{k_0<k<n} \alpha_k \cdot f^{n_0+k}(x_0) = 0_E$$
par linéarité de f^{n_0}. Or, dans la dernière somme,
$$n_0 + k > n_0 + k_0 = n - 1,$$

donc $f^{n_0+k} = \omega$ et $f^{n_0+k}(x_0) = 0_E$, et il ne reste donc que

$$\underbrace{\alpha_{k_0}}_{\neq 0} \cdot \underbrace{f^{n_0+k_0}(x_0)}_{=f^{n-1}(x_0)\neq 0_E} = 0_E,$$

ce qui établit la contradiction cherchée.

Ainsi, la famille $\mathscr{B}_0$ est une famille libre de cardinal n dans un espace vectoriel de dimension n : c'est une base.

❧ Le rang d'un endomorphisme nilpotent d'indice n est égal à $(n-1)$, ce qui prouve que le rang d'un endomorphisme cyclique peut être égal à $(n-1)$.

✍ *Les endomorphismes nilpotents d'indice n ne sont pas les seuls endomorphismes cycliques. Si un endomorphisme possède n valeurs propres deux à deux distinctes et non nulles, alors c'est un endomorphisme cyclique dont le rang est égal à n.*

Solution 6

1. Comme H_1 est un hyperplan de E, alors il existe un vecteur $u_0 \neq 0_E$ tel que

$$E = H_1 \oplus \mathbb{K} \cdot u_0.$$

Supposons qu'il existe un vecteur $u \in H_2 \setminus H_1$. Il existe un vecteur $v \in H_1$ et un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ tels que

$$u = v + \alpha \cdot u_0$$

et comme $u \notin H_1$, le scalaire α n'est pas nul. Par conséquent,

$$u_0 = \frac{1}{\alpha} \cdot (-v) + \frac{1}{\alpha} \cdot u \in H_2$$

(puisque $v \in H_1 \subset H_2$ et $u \in H_2$). On en déduit que

$$E = H_1 \oplus \mathbb{K} \cdot u_0 \subset H_2$$

et donc que $H_2 = E$, ce qui est absurde.

On a ainsi démontré que $H_2 \subset H_1$ et donc que $H_1 = H_2$.

✍ *On a ainsi (re)démontré que : si H est un hyperplan, alors*

$$\forall\, u \in E \setminus H, \quad E = H \oplus \mathbb{K} \cdot u.$$

(On aurait pu se contenter d'appliquer ce théorème pour établir le résultat voulu.)

2. Comme les formes linéaires ε et η ne sont pas identiquement nulles, alors leurs noyaux

$$H_1 = \operatorname{Ker} \varepsilon \quad \text{et} \quad H_2 = \operatorname{Ker} \eta$$

sont des hyperplans de E.

✍ *On rappelle que : deux formes linéaires non identiquement nulles sont proportionnelles si, et seulement si, leurs noyaux sont égaux.*

Comme elles ne sont pas proportionnelles, les hyperplans H_1 et H_2 sont distincts. D'après la question précédente, H_1 n'est pas contenu dans H_2 et, symétriquement, H_2 n'est pas contenu dans H_1. Ainsi, il existe deux vecteurs u_0 et v_0 tels que

$$\varepsilon(v_0) = \eta(u_0) = 0, \quad \varepsilon(u_0) \neq 0 \quad \text{et} \quad \eta(v_0) \neq 0.$$

En posant

$$u = \frac{1}{\varepsilon(u_0)} \cdot u_0 \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{\eta(v_0)} \cdot v_0,$$

on obtient deux vecteurs tels que

$$\varepsilon(u) = \eta(v) = 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon(v) = \eta(u) = 0.$$

3. Il est clair que φ est une forme bilinéaire sur E.

❧ Si les formes ε et η (non identiquement nulles) sont proportionnelles, alors il existe un scalaire α tel que

$$\forall\, x \in E, \quad \eta(x) = \alpha \cdot \varepsilon(x)$$

et par conséquent, quels que soient x et y dans E,

$$\varepsilon(x)\eta(y) = \alpha \cdot \varepsilon(x)\varepsilon(y)$$

et il est alors clair que la forme bilinéaire φ est symétrique.

❧ Réciproquement, si ε et η ne sont pas proportionnelles, on déduit de la question précédente que

$$\varphi(u, v) = \varepsilon(u)\eta(v) = 1 \neq 0 = \varepsilon(v)\eta(u) = \varphi(v, u).$$

La forme bilinéaire φ n'est donc pas symétrique.

Solution 7

1. On sait que l'espace dual $E^* = L(E, \mathbb{K})$ a même dimension que E.

❧ Si la famille $(\varphi_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$ est libre, alors (Théorème de la base incomplète) il existe une base de E^* de la forme

$$\mathscr{B}^* = (\varphi_1, \dots, \varphi_r, \varphi_{r+1}, \dots, \varphi_n).$$

Considérons alors la base antéduale

$$\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$$

de $\mathscr{B}^*$: il s'agit de la base de E telle que

$$\forall\, x \in E, \quad x = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) \cdot e_k \tag{$\star$}$$

ou, c'est équivalent, telle que

$$\forall\, f \in E^*, \quad f = \sum_{k=1}^{n} f(e_k) \cdot \varphi_k. \tag{$\ddagger$}$$

❧ Si le vecteur x appartient au noyau de u, alors

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant r, \quad \varphi_k(x) = 0$$

et donc

$$x = \sum_{k=r+1}^{n} \varphi_k(x) \cdot e_k \in \mathrm{Vect}(e_k,\ r+1 \leqslant k \leqslant n).$$

Réciproquement, si $x \in \mathrm{Vect}(e_k,\ r+1 \leqslant k \leqslant n)$, alors il existe des scalaires $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ tels que

$$x = \sum_{k=r+1}^{n} \lambda_k \cdot e_k = 0 \cdot e_1 + \cdots + 0 \cdot e_r + \lambda_{r+1} \cdot e_{r+1} + \cdots + \lambda_n \cdot e_n.$$

Comme le vecteur x admet <u>une seule</u> décomposition dans la base $\mathscr{B}$, on peut identifier terme à terme avec $(\star)$ et en déduire que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant r, \quad \varphi_k(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, r < k \leqslant n \quad \varphi_k(x) = \lambda_k.$$

En particulier, $u(x) = 0_{\mathbb{K}^r}$.

❧ D'autre part, pour tout $1 \leqslant k \leqslant r$,

$$u(e_k) = (\delta_{1,k}, \dots, \delta_{k,k}, \dots, \delta_{r,k})$$

donc l'image par u de la famille $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^r$, ce qui prouve que u est surjective.

2. Supposons que la famille $(\varphi_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$ soit liée. Il existe donc une famille $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$ de scalaires, différente de la famille $(0, \dots, 0)$, telle que

$$\sum_{k=1}^{r} a_k \cdot \varphi_k = \omega_E.$$

Par conséquent,

$$\forall\, x \in E, \quad \sum_{k=1}^{r} a_k \cdot \varphi_k(x) = 0,$$

ce qui signifie que, pour tout $x \in E$, le vecteur $u(x)$ appartient au noyau de la forme linéaire

$$\Psi = [(y_1, \dots, y_r) \mapsto a_1 y_1 + \cdots + a_r y_r]$$

et donc que

$$\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, \Psi.$$

Comme les scalaires a_k ne sont pas tous nuls, il existe au moins un indice $1 \leqslant k_0 \leqslant r$ tel que $a_{k_0} \neq 0$ et par conséquent,

$$\Psi(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) = a_{k_0} \neq 0.$$

La forme linéaire Ψ n'est donc pas la forme linéaire identiquement nulle.

❧ Géométriquement parlant, on a démontré que : si la famille des formes linéaires $(\varphi_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$ est liée, alors l'image de l'application linéaire u est contenue dans un hyperplan (le noyau de Ψ).

Si l'application u est surjective, son image est égale à E et ne peut donc pas être contenue dans un hyperplan de E (= un sous-espace *strict* de E). Par contraposée, la famille $(\varphi_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$ est donc libre.

Solution 8

1. Il est clair que l'application φ est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}^n$.

❧ Supposons que la famille $(\varepsilon_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ soit liée. Il existe donc des scalaires $a_1, \ldots, a_n$ non tous nuls tels que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \varepsilon_k = 0_{E^*}$$

c'est-à-dire

$$\forall\, x \in E, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k \varepsilon_k(x) = 0.$$

Cette identité signifie que, pour tout $x \in E$, le vecteur

$$\varphi(x) = \big(\varepsilon_1(x), \ldots, \varepsilon_n(x)\big) \in \mathbb{K}^n$$

est contenu dans l'hyperplan d'équation

$$\big[a_1 y_1 + \cdots + a_n y_n = 0\big]$$

et donc que l'image de φ est un sous-espace strict de E : l'application linéaire φ n'est donc pas surjective.

❧ Réciproquement, si l'application φ n'est pas surjective, alors son image est un sous-espace strict de $\mathbb{K}^n$ et tout sous-espace strict de $\mathbb{K}^n$ est contenu dans un hyperplan H convenablement choisi (Théorème de la base incomplète). Il existe alors une forme linéaire η non identiquement nulle sur $\mathbb{K}^n$ telle que

$$\operatorname{Im}\varphi \subset H = \operatorname{Ker}\eta.$$

Il existe des scalaires $a_1, \ldots, a_n$ tels que

$$\forall\, (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \eta(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k y_k$$

et par conséquent

$$\forall\, x \in E, \quad 0 = \eta\big(\varphi(x)\big) = \eta\big(\varepsilon_1(x), \ldots, \varepsilon_n(x)\big) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varepsilon_k(x)$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \varepsilon_k = 0_{E^*}.$$

Comme η n'est pas identiquement nulle, les scalaires a_k ne sont pas tous nuls et on vient de prouver que la famille $(\varepsilon_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est liée.

❧ On a ainsi prouvé l'équivalence voulue (par contraposée et inverse).

2. Supposons que la famille $(\varepsilon_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ soit libre. D'après la question précédente, l'application φ est surjective. En particulier, chaque vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ (= l'espace d'arrivée) admet au moins un antécédent par φ dans E. Il existe donc une famille $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de vecteurs de E telle que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \varphi(x_i) = \big(\varepsilon_1(x_i), \ldots, \varepsilon_i(x_i), \ldots, \varepsilon_n(x_i)\big) = (0, \ldots, 1, \ldots, 0).$$

❧ Considérons alors une relation de liaison entre les vecteurs x_k :

$$\sum_{k=1}^{n} b_k x_k = 0_E.$$

Par linéarité de φ, on en déduit que

$$0_{\mathbb{K}^n} = \varphi\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k x_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} b_k \varphi(x_k) = (b_1, \ldots, b_n).$$

Comme tous les b_k sont nuls, cela signifie que la famille $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est libre.

❧ Réciproquement, supposons qu'il existe une famille de vecteurs $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ telle que

$$\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant n, \quad \varepsilon_i(x_j) = \delta_{i,j}$$

et considérons une relation de liaison entre les formes linéaires ε_k :

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \varepsilon_k = 0_{E^*}.$$

On en déduit que

$$\forall\, x \in E, \quad \sum_{k=1}^{n} c_k \varepsilon_k(x) = 0$$

et en particulier que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad 0 = \sum_{k=1}^{n} c_k \varepsilon_k(x_i) = c_i.$$

Comme tous les scalaires c_k sont nuls, la famille $(\varepsilon_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est libre.

✍ *Si E est un espace de dimension finie, on peut proposer une démonstration plus simple (mais pas moins savante). En effet, on sait alors que l'espace dual $E^* = L(E, \mathbb{K})$ est aussi un espace vectoriel de dimension finie et $\dim E^* = \dim E$.*

Connaissant une famille libre $(\varepsilon_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de vecteurs de E^*, on peut la compléter pour obtenir une base $(\varepsilon_k)_{1\leqslant k\leqslant d}$ de E^* (Théorème de la base incomplète). On sait alors qu'il existe une (et une seule) base $(u_k)_{1\leqslant k\leqslant d}$ de E telle que

$$\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant d, \quad \varepsilon_i(u_j) = \delta_{i,j},$$

*il s'agit de la **base antéduale** (ou **préduale**) de $(\varepsilon_k)_{1\leqslant k\leqslant d}$, qui est l'antécédent de la base duale de $\mathbb{K}^d$ par l'isomorphisme*

$$\big[x \mapsto \big(\varepsilon_1(x), \dots, \varepsilon_d(x)\big)\big] \ : \ E \to \mathbb{K}^d.$$

Solution 9

On procède par contraposée.

❧ Si la famille $\mathscr{F} = (f_1, \dots, f_n)$ est libre dans l'espace dual $E^* = L(E, \mathbb{K})$, alors c'est une base de E^*. (En effet, comme E est un espace vectoriel de dimension n, son dual E^* est également un espace vectoriel de dimension n.)

Il existe donc une base $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E dont $\mathscr{F}$ est la base duale (*base antéduale* de $\mathscr{F}$) et

$$\forall\, x \in E, \quad x = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \cdot \varepsilon_k.$$

Dans ces conditions, si tous les scalaires $f_k(x)$ sont nuls, alors le vecteur x est le vecteur nul de E.

❧ En interprétant matriciellement l'énoncé, on peut en donner une démonstration qui paraîtra beaucoup plus familière.

On considère ici un système homogène de n équations linéaires :

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad f_k(x) = 0.$$

Une base de E étant choisie, l'inconnue x est représentée par la liste de ses n coordonnées.

On a donc un système homogène de n équations en n inconnues, représenté par une matrice carrée $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Si ce système homogène admet au moins une solution non nulle, alors ses colonnes forment une famille liée et le rang de la famille $(C_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ des *colonnes* de A est strictement inférieur à n.

Comme le rang de A est égal au rang de sa transposée $A^\top$, on en déduit que le rang de la famille $(L_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ des *lignes* de A est strictement inférieur à n et donc que la famille $(L_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est liée.

✍ *La propriété $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^\top$ nous dit aussi qu'*il existe un isomorphisme *entre le noyau de A (= le sous-espace des solutions de l'équation homogène, c'est-à-dire l'ensemble des relations de liaison entre les colonnes de A) et le noyau de $A^\top$ (c'est-à-dire l'ensemble des relations de liaison entre les lignes de A).*

Mais il n'y a pas de moyen simple d'expliciter un tel endomorphisme : il faut prendre la peine de poser les calculs !

Solution 10

Soit $x \in E$.

Comme F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E, il existe un couple (u, v) tel que

$$x = u + v \qquad \text{avec} \qquad u \in F_1 \quad \text{et} \quad v \in F_2.$$

Comme G_1 et G_2 sont supplémentaires dans F, il existe un couple (v_1, v_2) tel que

$$v = v_1 + v_2 \qquad \text{avec} \qquad v_1 \in G_1 \quad \text{et} \quad v_2 \in G_2.$$

De plus,

$$v_2 = v - v_1$$

où $v \in F_2$ et $v_1 \in G_1 \subset F_2$, donc $v_2 \in F_2$.

On a donc

$$x = \underbrace{u}_{\in F_1} + \underbrace{v_1}_{\in G_1} + \underbrace{v_2}_{\in F_2 \cap G_2}$$

et on a démontré que $E = F_1 + G_1 + (F_2 \cap G_2)$.

✍ *On n'a pas démontré l'inclusion $\supset$, car elle est évidente.*

❧ Considérons trois vecteurs $u \in F_1$, $v \in G_1$ et $w \in F_2 \cap G_2$ tels que

$$u + v + w = 0_E.$$

Comme $G_1 \subset F_2$ et que F_2 est un sous-espace vectoriel, on a en fait

$$\underbrace{u}_{\in F_1} + \underbrace{(v + w)}_{\in F_2} = 0_E.$$

Comme les sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 sont en somme directe, alors $u = v + w = 0_E$.

De plus, $v \in G_1$ et $w \in G_2$. Comme les sous-espaces vectoriels G_1 et G_2 sont en somme directe, alors $v = w = 0_E$.

Donc $u = v = w = 0_E$ et les trois sous-espaces vectoriels F_1, G_1 et $(F_2 \cap G_2)$ sont en somme directe.

❧ On a démontré que

$$E = F_1 \oplus G_1 \oplus (F_2 \cap G_2).$$

Solution 11

Il est évident que : si $E_i = F_i$, alors $E_i \subset F_i$.

❧ Réciproquement, supposons que $E_i \subset F_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et que

$$E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_d = F_1 \oplus \cdots \oplus F_d.$$

Pour démontrer que $E_i = F_i$, on considère un vecteur $x_i \in F_i$.

Ce vecteur admet une décomposition :

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} u_j \qquad \text{où} \qquad \forall\, 1 \leqslant j \leqslant n, \quad u_j \in E_i.$$

Comme $E_i \subset F_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on a donc

$$x_i = \underbrace{u_1}_{\in F_1} + \cdots + \underbrace{u_i}_{\in F_i} + \cdots + \underbrace{u_n}_{\in F_n}$$

mais aussi, de façon évidente,

$$x_i = \underbrace{0_E}_{\in F_1} + \cdots + \underbrace{x_i}_{\in F_i} + \cdots + \underbrace{0_E}_{\in F_n}.$$

Or la décomposition d'un vecteur de E dans les sous-espaces vectoriels F_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, est unique (par hypothèse), donc on peut identifier terme à terme :

$$u_i = x_i \qquad \text{et} \qquad \forall\, j \neq i, \quad u_j = 0_E.$$

On en déduit que

$$x_i = 0_E + \cdots + u_i + \cdots + 0_E = u_i \in E_i,$$

cqfd.

Solution 12

1. a. Comme (u, v) est une famille *libre* dans un espace vectoriel de dimension finie, il existe une base

$$\mathscr{B} = (u, v, e_3, \dots, e_d)$$

de E (Théorème de la base incomplète).

On peut alors considérer les formes linéaires φ et ψ suivantes définies par leurs matrices relatives à la base $\mathscr{B}$.

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

✍ *En considérant la base duale de $\mathscr{B}$:*

$$\mathscr{B}^* = (u^*, v^*, e_3^*, \dots, e_d^*)$$

on a en fait choisi $\varphi = u^*$ et $\psi = v^*$.

1. b. La forme linéaire $\theta = \varphi - \psi$ convient.

2. a. S'il existe un réel α tel que $\varphi_g = \alpha\varphi_f$, alors

$$0 = (\varphi_g - \alpha\varphi_f)(g - \alpha f) = \int_a^b \big[g(t) - \alpha f(t)\big]^2 \, dt,$$

ce qui est impossible (Théorème de nullité de l'intégrale).

✍ *Si on est plus savant, on connaît le produit scalaire "naturel" sur E défini par*

$$\langle x \,|\, y \rangle = \int_a^b x(t)y(t) \, dt$$

et on sait (unicité dans le Théorème de Riesz) que l'application

$$[x \mapsto \varphi_x = \langle x \,|\, \cdot \rangle]$$

est une application linéaire injective de E dans $L(E, \mathbb{R})$.

Par conséquent, l'image (φ_f, φ_g) de la famille libre (f, g) est encore une famille libre.

2. b. Comme les fonctions f et g ne sont pas proportionnelles, elles constituent une base $\mathscr{B}$ du sous-espace $F = \mathrm{Vect}(f, g)$ de E et l'espace dual $L(F, \mathbb{R})$ est un plan.

L'application

$$\begin{array}{ccc} L(F, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \varphi & \longmapsto & \big(\varphi(f), \varphi(g)\big) \end{array}$$

est une application linéaire injective.

✍ *Si une forme linéaire est nulle sur une base de F, alors elle est nulle sur l'espace F tout entier.*

D'après le Théorème du rang, cette application est donc un isomorphisme et en particulier, il existe une forme linéaire $\theta \in L(F, \mathbb{R})$ telle que

$$\big(\theta(f), \theta(g)\big) = (1, -1).$$

✍ *On peut appliquer le Théorème du rang car l'espace de départ et l'espace d'arrivée ont même dimension et que cette dimension est finie.*

❧ *On a reproduit la démonstration qui établit l'existence d'une base duale pour tout espace vectoriel de dimension finie.*

❧ On a démontré que (φ_f, φ_g) était une famille libre de $L(E, \mathbb{R})$. En relisant la démonstration qu'on a donnée, on peut se rendre compte que les restrictions φ_f° et φ_g° de ces deux formes linéaires au sous-espace F sont aussi linéairement indépendantes.

Comme $\dim L(F, \mathbb{R}) = 2$ et que $(\varphi_f^\circ, \varphi_g^\circ)$ est une famille libre de $L(F, \mathbb{R})$, ce couple est en fait une base de $L(F, \mathbb{R})$. Par conséquent, il existe deux scalaires α et β tels que

$$\theta = \alpha\varphi_f^\circ + \beta\varphi_g^\circ.$$

On peut prolonger la forme linéaire $\theta \in L(F, \mathbb{R})$ en une forme linéaire sur E en posant :

$$\forall\, x \in E, \qquad \theta(x) = \alpha\varphi_f(x) + \beta\varphi_g(x).$$

✍ *Autrement dit, en posant $H = \alpha f + \beta g \in E$, on a trouvé une forme linéaire, $\varphi_H \in L(E, \mathbb{R})$, qui sépare les vecteurs f et g.*

Solution 13

1. La réponse sera plus générale que la question, nous allons donner une condition nécessaire et suffisante sur $a \in E$ pour que les sous-espaces vectoriels F_a et G soient supplémentaires dans E.

❧ Soit $a \in E$. Comme F et G sont supplémentaires dans E, il existe une famille de scalaires $(\alpha_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ et un vecteur $g_0 \in G$ tels que

$$a = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{p} \alpha_k \cdot e_k\right)}_{\in F} + g_0. \tag{$\star$}$$

Comme $g_0 \in G$, que $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et que F et G sont en somme directe,

— ou bien $g_0 \in F \cap G$ et dans ce cas $g_0 = 0_E$;

— ou bien $g_0 \notin F$ et dans ce cas la famille $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p, g_0)$ est libre.

❧ On sait que F et G sont supplémentaires. Pour que F_a et G soient supplémentaires, il faut donc que $\dim F = \dim F_a$ et comme la famille $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ est libre, il faut que la famille $(a + e_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ soit libre elle aussi.

Considérons une famille de scalaires $(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ telle que

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot (a + e_k) = 0_E \qquad \text{et posons} \qquad \Lambda = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k. \tag{$\dagger$}$$

On déduit alors de $(\star)$ et de $(\dagger)$ que

$$\sum_{k=1}^{p} (\lambda_k + \Lambda.\alpha_k) \cdot e_k + \Lambda \cdot g_0 = 0_E.$$

❧ [250] Si $g_0 \neq 0_E$ (c'est-à-dire si $a \notin F$), alors la famille $(e_1, \dots, e_p, g_0)$ est libre et il faut $\Lambda = 0$ et

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant p, \quad 0 = \lambda_k + \Lambda.\alpha_k = \lambda_k.$$

On en déduit que la famille $(e_1 + a, \dots, e_p + a)$ est libre.

❧ [250] Si $g_0 = 0_E$ (c'est-à-dire pour $a \in F$), alors la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est libre et il faut que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant p, \quad \lambda_k + \Lambda.\alpha_k = 0. \tag{$\ddagger$}$$

En sommant ces égalités, on obtient

$$\Lambda\left(1 + \sum_{k=1}^{p} \alpha_k\right) = 0.$$

Si la somme $A = \alpha_1 + \cdots + \alpha_p$ est différente de -1, on en déduit que $\Lambda = 0$ et donc $(\ddagger)$ que $\lambda_k = 0$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$.

❧ [250] En revanche, si $g_0 = 0_E$ et si $A = -1$, alors

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_k \cdot (e_k + a) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \cdot e_k + A \cdot a = a - a = 0_E$$

et il existe au moins un scalaire α_k non nul (puisque leur somme n'est pas nulle !). Dans ce cas, la famille $(e_1 + a, \dots, e_p + a)$ est liée, donc $\dim F_a < \dim F$ et il est impossible que F_a et G soient supplémentaires dans E.

✍ *Dans la suite, on supposera donc que $g_0 \neq 0_E$ ou que $A \neq -1$ et donc que la famille $(e_1 + a, \dots, e_p + a)$ est libre. (L'énoncé supposait que les α_k étaient tous nuls et donc que $A = 0$.)*

Sous ces hypothèses, nous savons que

$$\dim F_a + \dim G = \dim F + \dim G = \dim E,$$

donc il suffit de vérifier que $F_a \cap G = \{0_E\}$ pour conclure.

❧ Considérons un vecteur $x \in F_a \cap G$. Il existe donc une famille de scalaires $(\xi_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ tels que

$$x = \sum_{k=1}^{p} \xi_k \cdot (e_k + a) \overset{(\star)}{=} \sum_{k=1}^{p} \xi_k \cdot e_k + \Xi \cdot \left(\sum_{k=1}^{p} \alpha_k \cdot e_k + g_0\right) = \sum_{k=1}^{p} (\xi_k + \Xi\alpha_k) \cdot e_k + g_0$$

où on a posé $\Xi = \xi_1 + \cdots + \xi_p$. Comme x et g_0 appartiennent au sous-espace G, on en déduit que

$$G \ni x - g_0 = \sum_{k=1}^{p} (\xi_k + \Xi\alpha_k) \cdot e_k.$$

Mais $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et G sont en somme directe, donc il faut que $x - g_0 = 0_E$ et comme la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est libre, il faut que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant p, \quad \xi_k + \Xi\alpha_k = 0.$$

En sommant ces égalités, on en déduit que

$$\Xi + \Xi A = 0.$$

Or, par hypothèse, $A \neq -1$, donc $\Xi = 0$. Par conséquent,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant p, \quad \xi_k = -\Xi\alpha_k = 0 \quad \text{et finalement} \quad x = \sum_{k=1}^{p} \xi_k \cdot (e_k + a) = 0_E.$$

On a ainsi démontré que $F_a \cap G = \{0_E\}$ et on peut enfin conclure que F_a et G sont supplémentaires dans E.

2. Soient a et b, deux vecteurs de G. On suppose que $F_a = F_b$. En particulier, le vecteur

$$\sum_{k=1}^{p} (e_k + a) = \underbrace{\Big(\sum_{k=1}^{p} e_k\Big)}_{\in F} + p \cdot a$$

appartient à F_b, donc il existe des scalaires $(\beta_1, \dots, \beta_p)$ tels que

$$\Big(\sum_{k=1}^{p} e_k\Big) + p \cdot a = \sum_{k=1}^{p} \beta_k \cdot (e_k + b) = \sum_{k=1}^{p} \beta_k \cdot e_k + B \cdot b \quad \text{où} \quad B = \sum_{k=1}^{p} \beta_k.$$

On en déduit que

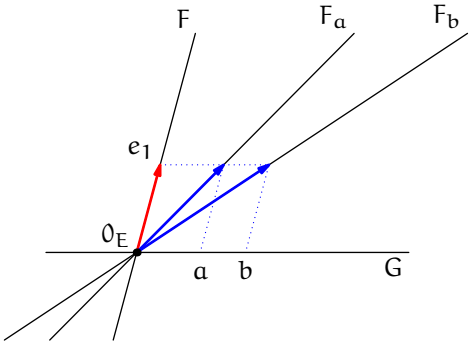
$$F \ni \sum_{k=1}^{p} (1 - \beta_k) \cdot e_k = -p \cdot a + B \cdot b \in G$$

et comme F et G sont en somme directe et que la famille $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ est libre,

$$-p \cdot a + B \cdot b = 0_E \qquad \text{et} \qquad \forall\, 1 \leqslant k \leqslant p, \quad \beta_k = 1.$$

Mais alors $B = p$ et finalement $a = b$.

Par contraposée, si a et b sont deux vecteurs distincts choisis dans le sous-espace G, alors les deux sous-espaces vectoriels F_a et F_b sont distincts.



Solution 14

1.

✍ *On rappelle que : des sous-espaces vectoriels $E_1, \dots, E_r$ de dimension finie sont en somme directe dans E si, et seulement si,*

$$\dim\Big(\sum_{k=1}^{r} E_k\Big) = \sum_{k=1}^{r} \dim E_k.$$

On rappelle aussi qu'on peut reformuler cette équivalence : des sous-espaces vectoriels $E_1, \dots, E_r$ de dimension finie sont en somme directe dans E si, et seulement si,

$$\dim\Big(\sum_{k=1}^{r} E_k\Big) \geqslant \sum_{k=1}^{r} \dim E_k.$$

Pour tout $x \in E$,

$$x = I_E(x) = \sum_{k=1}^{r} p_k(x).$$

Pour tout $1 \leqslant k \leqslant r$, le vecteur $p_k(x)$ appartient évidemment à $\operatorname{Im} p_k$, donc on a démontré que

$$E \subset \sum_{k=1}^{r} \operatorname{Im} p_k$$

et comme l'inclusion réciproque est évidente, on en déduit que

$$E = \sum_{k=1}^{r} \operatorname{Im} p_k.$$

En particulier,

$$\dim\Big(\sum_{k=1}^{r} \operatorname{Im} p_k\Big) = \dim E$$

et par hypothèse

$$\dim E \geqslant \sum_{k=1}^{r} \dim \operatorname{Im} p_k.$$

On a donc démontré que

$$\dim\Big(\sum_{k=1}^{r} \operatorname{Im} p_k\Big) \geqslant \sum_{k=1}^{r} \dim \operatorname{Im} p_k$$

et cela prouve (cf rappel de cours) que les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im} p_k$, $1 \leqslant k \leqslant r$, sont en somme directe.

✍ *On a en fait démontré une propriété plus forte, puisque la somme de ces sous-espaces est égale à E. On connaît donc une décomposition de E en somme directe :*

$$E = \bigoplus_{k=1}^{r} \operatorname{Im} p_k.$$

2. Soient $1 \leqslant k \leqslant r$ et $x \in E$. D'après les hypothèses de l'énoncé,

$$p_k(x) = I_E\big(p_k(x)\big) = \sum_{j=1}^{r} (p_j \circ p_k)(x).$$

Dans un éclair de lucidité, on se rend compte qu'on a décomposé un même vecteur de deux manières dans une somme directe !

$$\begin{aligned} p_k(x) &= \quad p_k(x) \quad + \sum_{j \neq k} \quad 0_E \\ &= \underbrace{p_k\big(p_k(x)\big)}_{\in \operatorname{Im} p_k} + \sum_{j \neq k} \underbrace{p_j\big(p_k(x)\big)}_{\in \operatorname{Im} p_j} \end{aligned}$$

Or (c'est le **principe** d'une somme directe) un vecteur admet *au plus une* décomposition dans une somme directe, ce qui permet d'identifier terme à terme :

$$\begin{aligned} p_k\big(p_k(x)\big) &= p_k(x) \\ \forall\, j \neq k, \quad p_j\big(p_k(x)\big) &= 0_E. \end{aligned}$$

Nous avons ainsi démontré que les p_k étaient des projecteurs :

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant r,\ \forall\, x \in E, \quad p_k(x) = (p_k \circ p_k)(x).$$

✍ *On a aussi démontré que*

$$\forall\, j \neq k, \quad p_k \circ p_j = \omega_E.$$

Solution 15

✍ *Cet exercice est simple quand on comprend qu'il illustre le théorème **[90]**, généralisation du célèbre théorème de caractérisation par une base **[11]**.*
*Mais puisque nous sommes ici en dimension finie, nous allons utiliser le théorème de caractérisation **[11]**. Travailler en dimension finie sans utiliser de bases, ce n'est pas plus simple !*

❧ S'il existe un endomorphisme $u \in L(E)$ tel que $\operatorname{Im} u = F$ et $\operatorname{Ker} u = G$, alors le Théorème du rang nous assure que

$$\dim F + \dim G = \operatorname{rg} u + \dim \operatorname{Ker} u = \dim E.$$

Nous tenons donc une condition nécessaire pour qu'un tel endomorphisme u existe.
Nous allons démontrer que cette condition est en fait suffisante.

✍ *Le raisonnement qui suit va montrer qu'il existe nombre d'endomorphismes u vérifiant les deux conditions imposées. Comme il n'y a pas unicité, l'analyse du problème posé ne peut nous conduire à expliciter le seul endomorphisme possible !*
Nous nous retrouvons donc dans une situation où l'analyse n'a pas vraiment résolu le problème, où la synthèse ne se résume pas à une simple vérification...

❧ Notons d, la dimension de E (espace de dimension finie par hypothèse) ; r, la dimension de F et supposons que $\dim G = d - r$.
Il existe donc une base $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ de F et une base

$$\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_d)$$

de E adaptée à G au sens où la sous-famille

$$\mathscr{B}_G = (e_{r+1}, \dots, e_d)$$

est une base de G.
Comme $\mathscr{B}$ est une base de E et que

$$\mathscr{C}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, 0_E, \dots, 0_E)$$

est une famille de vecteurs de E de même cardinal que $\mathscr{B}$, il existe un, et un seul, endomorphisme $u \in L(E)$ tel que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant r, \quad u(e_k) = \varepsilon_k \quad \text{et} \quad \forall\, r < k \leqslant d, \quad u(e_k) = 0_E.$$

Il est clair sur cette définition que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant r, \quad \varepsilon_k \in \operatorname{Im} u \quad \text{et} \quad \forall\, r < k \leqslant d, \quad e_k \in \operatorname{Ker} u.$$

Comme $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont des sous-espaces vectoriels, on en déduit que

$$F = \operatorname{Vect}(\varepsilon_k,\ 1 \leqslant k \leqslant r) \subset \operatorname{Im} u \quad \text{et} \quad G = \operatorname{Vect}(e_k,\ r < k \leqslant n) \subset \operatorname{Ker} u.$$

Comme les familles $(\varepsilon_k)_{1 \leqslant k \leqslant r}$ et $(e_k)_{r < k \leqslant d}$ sont libres, on en déduit que

$$\dim \operatorname{Im} u \geqslant r \quad \text{et} \quad \dim \operatorname{Ker} u \geqslant d - r$$

et comme le Théorème du rang nous assure que

$$\dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Ker} u = d,$$

on en déduit que

$$\dim \operatorname{Im} u = r \quad \text{et} \quad \dim \operatorname{Ker} u = d - r.$$

Ayant prouvé une inclusion et l'égalité des dimensions (dans chacun des deux cas), on a en fait démontré que

$$\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(\varepsilon_k,\ 1 \leqslant k \leqslant r) = F \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} u = \operatorname{Vect}(e_k,\ r < k \leqslant n) = G.$$

✍ *Il y a à peu près autant d'endomorphismes u possibles que de bases de F et de G...*
En revanche, dès que les bases sont choisies, il n'y a plus qu'un seul endomorphisme possible !

Solution 16

✍ *Puisque nous sommes en dimension finie, nous allons commencer par proposer une solution purement matricielle. Une solution vectorielle suivra, ce sera un peu plus abstrait...*

Version matricielle

On pose $\dim E = p$ et $\dim F = n$.

❧ Comme le rang de u est égal à r, il existe une base $\mathscr{B}$ de E et une base $\mathscr{C}$ de F telles que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix} \overset{\text{not.}}{=} J_r.$$

✍ *Ce théorème figure dans le cours de MPSI — peut-être sous une autre forme.*
Quelles que soient les bases $\mathscr{B}_0$ de E et $\mathscr{C}_0$ de F, la matrice $A = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0,\mathscr{C}_0}(u)$ est une matrice de rang r et toute matrice de rang r est équivalente à la matrice J_r ci-dessus : il existe donc deux matrices inversibles $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que

$$Q^{-1}AP = J_r.$$

La matrice P est la matrice de passage de $\mathscr{B}_0$ à $\mathscr{B}$ (changement de base dans l'espace de départ) ; la matrice Q est la matrice de passage de $\mathscr{C}_0$ à $\mathscr{C}$ (changement de base dans l'espace d'arrivée).

La matrice J_r peut se décomposer en somme de r matrices de rang 1 à l'aide de la base canonique de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

$$J_r = \sum_{k=1}^{r} E_{k,k}$$

et, pour tout $1 \leqslant k \leqslant r$, il existe une, et une seule, application linéaire $u_k \in L(E,F)$ telle que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u_k) = E_{k,k}.$$

Le rang de u_k est bien entendu égal à 1 (c'est le rang de $E_{k,k}$) et comme

$$\sum_{k=1}^{r} \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u_k) = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u),$$

on a bien

$$\sum_{k=1}^{r} u_k = u.$$

✍ *Cerise sur le gâteau : ces r endomorphismes u_k sont linéairement indépendants dans $L(E,F)$ (puisque leurs matrices relatives aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ forment une sous-famille de la base canonique).*

✍ *Il n'y a pas unicité de la décomposition !*
D'une part, on ne voit pas bien pourquoi il n'y aurait qu'un seul couple $(\mathscr{B},\mathscr{C})$ de bases qui conviendrait.
D'autre part, une fois le couple $(\mathscr{B},\mathscr{C})$ fixé, on a choisi la décomposition la plus simple de J_r, mais ce n'est pas la seule décomposition possible en somme de r matrices de rang 1 — je vous laisse faire travailler votre imagination.

Version vectorielle

Comme $\operatorname{Im} u$ est un espace vectoriel de dimension finie, égale à r, il existe une base $\mathscr{B}_u = (\varepsilon_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$ de $\operatorname{Im} u$.
Comme dans le cours, on note $(\varepsilon_k^*)_{1\leqslant k\leqslant r}$, la base duale de $\mathscr{B}_u$. Par construction, on a donc

$$\forall\, y \in \operatorname{Im} u, \quad y = \sum_{k=1}^{r} \varepsilon_k^*(y) \cdot \varepsilon_k.$$

On en déduit que

$$\forall\, x \in E, \quad u(x) = \sum_{k=1}^{r} \varepsilon_k^*\big(u(x)\big) \cdot \varepsilon_k.$$

Pour tout $1 \leqslant k \leqslant r$, la composée $\varphi_k = \varepsilon_k^* \circ u$ est une forme linéaire sur E. Comme $\varepsilon_k \in \operatorname{Im} u$, il existe un vecteur $e_k \in E$ tel que $\varepsilon_k = u(e_k)$ et donc tel que

$$\varphi_k(e_k) = \varepsilon_k^*(\varepsilon_k) = 1.$$

La forme linéaire φ_k n'est donc pas identiquement nulle !

L'application $u_k : E \to F$ définie par

$$\forall x \in E, \quad u_k(x) = \varphi_k(x) \cdot \varepsilon_k$$

est linéaire (puisque φ_k est linéaire) ; son image est évidemment contenue dans la droite vectorielle $\mathbb{R} \cdot \varepsilon_k$ et comme la forme linéaire φ_k n'est pas identiquement nulle, l'image de u_k est égale à la droite $\mathbb{R} \cdot \varepsilon_k$, donc le rang de u_k est égal à 1.

Il est clair, par construction, que

$$\forall x \in E, \quad u(x) = \sum_{k=1}^{r} u_k(x),$$

donc on a bien décomposé u en somme de r applications linéaires de rang 1.

✍ *À retenir absolument sur les matrices de rang 1 !*

Le rang d'une matrice $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est égal à 1 si, et seulement si, il existe deux colonnes $U \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $V \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ non nulles telles que

$$A = U.V^\top.$$

(Les colonnes de A sont toutes proportionnelles à U et les lignes de A sont toutes proportionnelles à $V^\top$.)

L'image de A est la droite dirigée par U et le noyau de A est caractérisé par l'équation $V^\top.X = 0$.

Cette factorisation n'est pas unique : quel que soit $\alpha \in \mathbb{K}^*$,

$$A = (\alpha U).\left(\frac{1}{\alpha}V^\top\right).$$

Néanmoins, cette factorisation est presque unique...

✍ *La même chose d'un point de vue vectoriel :*

Le rang d'une application linéaire $u \in L(E,F)$ est égal à 1 si, et seulement si, il existe un vecteur $y_0 \in F$, non nul, et une forme linéaire $\varphi \in E^*$, non identiquement nulle, tels que

$$\forall x \in E, \quad u(x) = \varphi(x) \cdot y_0.$$

L'image de u est la droite dirigée par y_0 ; le noyau de u est l'hyperplan $\operatorname{Ker}\varphi$.

Solution 17

✍ *Nouvelle illustration d'un grand principe : en dimension finie, on a très souvent intérêt à raisonner sur des bases !*

On pose $d = \dim E$.

1. Comme le vecteur a n'est pas nul, il est à lui seul une famille libre et, d'après le Théorème de la base incomplète, il existe une base de E de la forme

$$\mathscr{B} = (a, e_2, \dots, e_d).$$

On choisit ensuite une famille de d vecteurs de E de la forme

$$\mathscr{C} = (b, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_d)$$

où les vecteurs ε_k sont absolument quelconques (c'est sans aucune importance).

D'après le Théorème de caractérisation des applications linéaires **[11]**, il existe alors un, et un seul, endomorphisme $u \in L(E)$ tel que

$$u(a) = b \quad \text{et} \quad \forall\, 2 \leqslant k \leqslant d, \quad u(e_k) = \varepsilon_k.$$

Il y a donc pléthore d'endomorphismes $u \in L(E)$ tels que $u(a) = b$ (sauf si $\dim E = 1$, bien entendu).

2. On raisonne par contraposée en supposant que $f \neq \omega_E$ et que $g \neq \omega_E$. Il existe donc un vecteur $x_0 \in E$ tel que

$$a = g(x_0) \neq 0_E$$

et un vecteur $b \in E$ tel que

$$f(b) \neq 0_E.$$

D'après la question précédente, il existe au moins un endomorphisme $u_0 \in L(E)$ tel que

$$b = u_0(a).$$

Il existe donc un endomorphisme u_0 et un vecteur x_0 tels que

$$f\big[u_0\big(g(x_0)\big)\big] \neq 0_E,$$

ce qui exprime le contraire de l'hypothèse initiale ($f \circ u \circ g = \omega_E$ pour tout $u \in L(E)$).

Solution 18

1. Comme

$$A\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = C_2 + C_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$

le vecteur $\mathbf{e}_1 = (0,1,1)$ qui dirige F est un vecteur propre de u, donc la droite F est bien stable par u.

❧ Les vecteurs $\mathbf{f}_1 = (3,1,0)$ et $\mathbf{f}_2 = (-2,0,1)$ ne sont pas proportionnels, donc le couple $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ est une famille libre. Ces deux vecteurs vérifient l'équation du plan G, donc le couple $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ est une base de G (famille libre de deux vecteurs dans un espace de dimension deux).

On calcule dans la base canonique :

$$A\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\2\\0\end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\-1\\1\end{pmatrix}$$

et on constate que les deux vecteurs $u(\mathbf{f}_1)$ et $u(\mathbf{f}_2)$ vérifient l'équation de G. Par conséquent, l'image par u d'une base de G est contenue dans G, ce qui prouve que G est stable par u.

✍ *On a suivi une méthode élémentaire pour vérifier que G était stable par u. Comme G est un hyperplan, on peut être plus intelligent.*

Remarquons pour commencer que la colonne

$$X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

représente un vecteur $\mathbf{x}$ de G dans la base canonique si, et seulement si,

$$x - 3y + 2z = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\end{pmatrix}}_{L_0} \cdot X = 0.$$

Prenons alors $\mathbf{x} \in G$ et posons $\mathbf{y} = u(\mathbf{x})$. Dans la base canonique, ces vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont représentés par les colonnes X et AX. On sait par hypothèse que $L_0X = 0$ et on constate alors que

$$L_0(AX) = (L_0A)X = \begin{pmatrix}1 & -3 & 2\end{pmatrix} X = L_0X = 0$$

ce qui signifie que $\mathbf{y} \in G$ et donc que G est stable par u.

Si on prend un peu de recul en essayant de voir ce que le calcul précédent a de général, on constate que : si la colonne ${}^tL_0$ est un vecteur propre de la transposée ${}^tA$, alors il existe λ tel que $L_0A = \lambda L_0$ et, dans ces conditions,

$$L_0X = 0 \implies L_0(AX) = 0$$

ou, autrement dit, l'hyperplan d'équation $L_0X = 0$ est stable par A.

Ça mérite qu'on s'en souvienne !

❧ Il est clair que $\dim F = 1$ (sous-espace engendré par un vecteur non nul, c'est donc une droite) et que $\dim G = 2$ (noyau d'une forme linéaire non nulle, c'est donc un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire un plan) et donc que

$$\dim F + \dim G = \dim \mathbb{R}^3.$$

Le vecteur $(0,1,1)$, qui dirige F, ne vérifie pas l'équation qui caractérise G ($0 - 3 + 2 = -1 \neq 0$), donc $F \cap G = \{0_E\}$. Par conséquent, F et G sont bien supplémentaires dans E :

$$E = F \oplus G.$$

2. On a remarqué que le vecteur $\mathbf{e}_1 = (0,1,1)$ qui dirige F était un vecteur propre de u associé à la valeur propre 1. Comme F et G sont supplémentaires dans E, en concaténant $(\mathbf{e}_1)$, base de F, avec $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, base de G, on obtient une base $\mathscr{C}$ de E.

Comme les sous-espaces vectoriels F et G sont stables par u, la matrice de u relative à $\mathscr{C}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix}* & 0 & 0\\0 & * & *\\0 & * & *\end{pmatrix}.$$

Plus précisément, comme le vecteur e_1 est un vecteur propre associé à 1,

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

On a choisi plus haut des vecteurs f_1 et f_2 un peu au hasard. On a peut-être remarqué que $u(f_1) = 2 \cdot f_1$. Par conséquent, en prenant $e_2 = f_1$ et $e_3 = f_2$, la matrice de u relative à $\mathscr{C}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

est bien triangulaire.

✍ *Une fois de plus, le hasard a bien fait les choses. Voyons maintenant comment organiser les choses sans laisser de place pour le hasard !*

Pour que $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}(u)$ soit triangulaire supérieure :

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix},$$

il faut que le vecteur e_2 soit un vecteur propre de u associé à a.

De manière analogue, pour que $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}(u)$ soit triangulaire inférieure :

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix},$$

il faut que le vecteur e_3 soit un vecteur propre de u associé à b.

De quelque manière qu'on prenne le problème, il faut donc trouver un vecteur propre de u dans le plan G.

Or la matrice A est triangulaire ! Ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux : 1 et 2. Cherchons ses sous-espaces propres.

Sous-espace propre associé à 1 : la matrice

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice de rang 1 et comme

$$C_1 = 0 \qquad C_2 + C_3 = 0$$

le noyau de cette matrice est le plan engendré par les vecteurs $(1,0,0)$ et $(0,1,1)$. Le vecteur propre

$$\alpha \cdot (1,0,0) + \beta \cdot (0,1,1) = (\alpha, \beta, \beta)$$

appartient à G si, et seulement si, $\alpha - 3\beta + 2\beta = 0$, soit $\alpha = \beta$.

Sous-espace propre associé à 2 : la matrice

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

est une matrice de rang 2 et comme $3C_1 + C_2 = 0$, le noyau de cette matrice est la droite dirigée par le vecteur $(3,1,0) \in G$.

C'est encore mieux que ce qu'on attendait ! On a trouvé deux vecteurs propres

$$e_2 = (1,1,1) \quad \textit{et} \quad e_3 = (3,1,0)$$

dans G, respectivement associés aux valeurs propres 1 et 2. Avec ce choix de vecteurs, la matrice de u relative à $\mathscr{C}$ est diagonale :

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solution 19

1. Par définition, $u_F \in L(F)$ et

$$x \in \operatorname{Ker} u_F \iff \begin{cases} x \in F \\ u_F(x) = 0_E \end{cases} \iff \begin{cases} x \in F \\ u(x) = 0_E \end{cases}$$

donc

$$\operatorname{Ker} u_F = F \cap \operatorname{Ker} u.$$

❧ Si $u \in GL(E)$, alors $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$, donc l'endomorphisme induit $u_F \in L(F)$ est injectif. Comme $\dim F$ est finie, on déduit du Théorème du rang que u_F est en fait un automorphisme de F.

❧ Plus précisément, considérons $y \in F$. Le vecteur $x \in F$ défini par $x = (u_F)^{-1}(y)$ est donc un vecteur $x \in F$ tel que

$$y = u_F(x).$$

Par définition de l'endomorphisme induit, on a donc aussi

$$y = u(x)$$

et comme $u \in GL(E)$, alors $x = u^{-1}(y)$.

On a donc démontré que

$$\forall\, y \in F, \qquad u^{-1}(y) = x \in F,$$

c'est-à-dire que le sous-espace F est stable par u^{-1} et donc que l'endomorphisme induit par restriction $(u^{-1})_F \in L(F)$ est bien défini.

Mais on a également démontré que

$$\forall\, y \in F, \qquad (u^{-1})_F(y) = u^{-1}(y) = x = u_F^{-1}(y)$$

c'est-à-dire

$$(u^{-1})_F = (u_F)^{-1}.$$

✍ *Si F était un sous-espace de dimension infinie, l'endomorphisme induit u_F par $u \in GL(E)$ serait nécessairement injectif (pour les raisons données plus haut) mais pas nécessairement surjectif (puisque le Théorème du rang ne serait plus applicable).*

2. La base canonique $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est, comme son nom l'indique, une base de $E = \mathbb{K}[X]$. Les familles obtenues en concaténant d'une part les familles

$$(X^{2n})_{n\in\mathbb{N}}, \qquad (X^{4n+1})_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{et} \qquad (X^{4n+3})_{n\in\mathbb{N}}$$

et d'autre part les familles

$$(X^{4n})_{n\in\mathbb{N}}, \qquad (X^{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{et} \qquad (X^{4n+2})_{n\in\mathbb{N}}$$

sont également des bases de E.

✍ *L'image d'une base de E par une permutation est encore une base de E.*

Par conséquent, il existe un, et un seul, endomorphisme $u \in L(E)$ tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u(X^{2n}) = X^{4n}, \quad u(X^{4n+1}) = X^{2n+1}, \quad u(X^{4n+3}) = X^{4n+2}.$$

Comme l'image par u d'une base donnée de E est une base de E, alors u est en fait un automorphisme de E.

❧ Comme $u(X^{2n}) = X^{4n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit d'une part que le sous-espace $F = \mathbb{K}[X^2] = \operatorname{Vect}(X^{2n}, n \in \mathbb{N})$ est stable par u et d'autre part que l'endomorphisme u_F induit par restriction de u à F n'est pas surjectif :

$$\operatorname{Im} u_F = \operatorname{Vect}(X^{4n}, n \in \mathbb{N}) = \mathbb{K}[X^4] \subsetneq F.$$

Par conséquent, l'endomorphisme induit u_F n'est pas un automorphisme de F, bien que u soit un automorphisme de E.

Solution 20

Comme A est une matrice carrée, elle est inversible si, et seulement si, son noyau est réduit à la colonne nulle.

❧ Considérons donc $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et supposons que $X \neq 0$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad (x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0).$$

Une famille finie de réels admet un plus grand élément, donc il existe un indice $1 \leqslant i_0 \leqslant n$ tel que

$$|x_{i_0}| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| > 0.$$

❧ Si $AX = 0$, alors (formule du produit matriciel)

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = 0.$$

En particulier, pour $i = i_0$,

$$a_{i_0,i_0} x_{i_0} = - \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i_0}} a_{i_0,j} x_j$$

et par inégalité triangulaire

$$|a_{i_0,i_0}|\,|x_{i_0}| \leqslant \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i_0}} |a_{i_0,j}|\,|x_j|.$$

Divisons par $|x_{i_0}| > 0$:

$$|a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i_0}} |a_{i_0,j}| \frac{|x_j|}{|x_{i_0}|}.$$

✍ *Il faut préciser d'une part qu'on ne divise pas par zéro (parce que diviser par zéro, c'est mal) et d'autre part que le sens de l'inégalité est conservé (il ne suffit pas de ne pas diviser par zéro, il faut ici diviser par un réel strictement positif.*

Par définition de i_0,

$$\forall\, 1 \leqslant j \leqslant n, \qquad 0 \leqslant \frac{|x_j|}{|x_{i_0}|} \leqslant 1$$

et comme les $|a_{i_0,j}|$ sont tous positifs, on en déduit que

$$|a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i_0}} |a_{i_0,j}|,$$

ce qui contredit l'hypothèse initiale sur les coefficients de la matrice A.

❧ Par contraposée : si A est une matrice carrée à diagonale fortement dominante, alors son noyau est réduit à la colonne nulle et elle est donc inversible.

Solution 21

Pour $n = 1$, le résultat est évident.

❧ Supposons le résultat établi pour un entier $n \geqslant 1$ et considérons une matrice inversible $A_{n+1} \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ dont le déterminant est égal à 1.

Comme la matrice A_{n+1} est inversible, il est impossible que tous les coefficients de la première ligne soient nuls.

Si seul le coefficient $A_{n+1}[1,1]$ n'est pas nul, alors $A_{n+1}[1,2] = 0$ et en effectuant l'opération $C_2 \leqslant C_2 + C_1$, on obtient un coefficient non nul en position $[1,2]$:

$$A_{n+1}[1,2] \geqslant 0 + A_{n+1}[1,1] = A_{n+1}[1,1] \neq 0.$$

Comme cette opération de pivot est codée par une transvection, on peut supposer que la première ligne de la matrice A_{n+1} contient un coefficient non nul en dehors de la diagonale.

❧ On suppose que $A_{n+1}[1,j_0] \neq 0$ pour un certain entier $2 \leqslant j_0 \leqslant n+1$. On effectue alors l'opération

$$C_1 \leftarrow C_1 + \Big(1 - \frac{A_{n+1}[1,1]}{A_{n+1}[1,j_0]}\Big) C_{j_0}$$

qui nous donne

$$A_{n+1}[1,1] \leftarrow A_{n+1}[1,1] + \Big(1 - \frac{A_{n+1}[1,1]}{A_{n+1}[1,j_0]}\Big) A_{n+1}[1,j_0] = 1.$$

Après cette transvection, la matrice est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & \star & \cdots & \star \\ \star & & & \\ \vdots & & & \\ \star & & & \end{pmatrix}.$$

On effectue les opérations

$$\forall\, 2 \leqslant j \leqslant n+1, \quad C_j \leftarrow C_j - A_{n+1}[1,j] C_1$$

qui nous amènent à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \star & & & \\ \vdots & & & \\ \star & & & \end{pmatrix}$$

puis les opérations

$$\forall\, 2 \leqslant i \leqslant n+1, \quad L_i \leftarrow L_i - A_{n+1}[i,1] L_1$$

qui aboutissent à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_n & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

❧ Toutes les opérations de pivot effectuées (sur les lignes et sur les colonnes) reviennent à multiplier la matrice A_{n+1} initiale par des matrices de transvection. Comme le déterminant d'une matrice de transvection est égal à 1, le déterminant de la matrice finale est égal au déterminant de la matrice initiale.

Par conséquent, le déterminant du bloc inférieur droit A_n est aussi égal au déterminant de A_{n+1}.

Comme la matrice A_n est une matrice inversible de taille n, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.

✍ *Ce qui précède n'est pas seulement une démonstration, c'est un algorithme explicite pour décomposer une matrice inversible en un produit de matrices de transvections.*

✍ *Si on souhaite factoriser de manière analogue une matrice non inversible, il peut être nécessaire d'utiliser des matrices de permutation puisque l'algorithme qu'on vient d'exposer requiert que la première ligne de la matrice ne soit pas identiquement nulle.*

On peut alors démontrer que toute matrice $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ peut se factoriser sous la forme

$$A = Q_{N_2} \cdots Q_1 J_r P_1 \cdots P_{N_1}$$

où les matrices P_k (resp. Q_k) sont des matrices de transvection, de dilatation ou de permutation de $\mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ (resp. de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$) qui représentent les opérations de pivot sur les colonnes de A (resp. sur les lignes de A).

L'entier r est bien entendu le rang de la matrice A et $J_r \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Solution 22

1. On vérifie par récurrence que

$$\forall\, k \geqslant 1, \qquad B^k = 2^{k-1} \begin{pmatrix} A^k & A^k \\ A^k & A^k \end{pmatrix}. \tag{$\star$}$$

Attention !

$$B^0 = I_{2n} = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$$

donc la formule précédente n'est pas vraie pour $k = 0$!

2. Puisque l'expression de B^0 se distingue de l'expression générale de B^k, on commence par supposer que le terme constant du polynôme P est nul.

❧ Si $P = a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_dX^d$, alors

$$P\Big(\frac{1}{2}B\Big) \overset{(\star)}{=} \sum_{k=1}^{d} a_k\Big(\frac{1}{2}\Big)^k \cdot 2^{k-1}\begin{pmatrix} A^k & A^k \\ A^k & A^k\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ P(A) & P(A)\end{pmatrix} = 0_{2n}$$

puisque $P(A) = 0_n$ par hypothèse.

Donc le polynôme $Q = P(X/2)$ vérifie $Q(B) = 0_{2n}$.

❧ Si le coefficient constant a_0 de P n'est pas nul, alors

$$P\Big(\frac{1}{2}B\Big) = a_0I_{2n} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} P_0(A) & P_0(A) \\ P_0(A) & P_0(A)\end{pmatrix}$$

où $P_0 = P - a_0 = a_1X + \cdots + a_dX^d$. Comme $P(A) = 0_n$, alors $P_0(A) = -a_0I_n$ et donc

$$P\Big(\frac{1}{2}B\Big) = a_0I_{2n} - \frac{a_0}{2}\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & I_n\end{pmatrix} \neq 0_{2n}.$$

La solution est en fait toute simple ! Si $P(A) = 0_n$, alors $P_1 = XP$ vérifie

$$P_1(A) = AP(A) = 0_n$$

et, bien évidemment, le coefficient constant de $P_1 = a_0X + a_1X^2 + \cdots + a_dX^{d+1}$ est nul. On peut donc appliquer ce qui précède à P_1 : si le coefficient constant de P n'est pas nul, alors le polynôme

$$P_1(X/2) = (X/2)P(X/2)$$

convient. Plus simplement, on peut donc choisir

$$Q = XP\Big(\frac{X}{2}\Big)$$

car le facteur 2 n'apporte rien.

Solution 23

Si la matrice A est inversible et si $AB = 0_n$, alors

$$O_n = A^{-1}.0_n = A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = I_n.B = B.$$

Par contraposée, s'il existe une matrice $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *non nulle* telle que $AB = BA = 0_n$, alors la matrice A n'est pas inversible.

❧ Réciproquement, supposons que la matrice A ne soit pas inversible.

► Analysons les deux relations indiquées par l'énoncé.

Si $AB = 0_n$, alors l'image de B est contenue dans le noyau de A.

Si $BA = 0_n$, alors l'image de A est contenue dans le noyau de B.

► Si la matrice A est la matrice nulle, on peut choisir $B = I_n$ (ou n'importe quelle autre matrice non nulle) pour avoir $AB = BA = 0_n$.

On suppose dans la suite que $A \neq 0_n$ et donc que le rang de A est au moins égal à 1.

► Il existe un (et un seul) endomorphisme u de $E = \mathbb{R}^n$ dont la matrice relative à la base canonique de $\mathbb{R}^n$ soit la matrice A.

$$\mathfrak{Mat}_{can}(u) = A$$

Comme $E = \mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension finie et que u est un endomorphisme de E, si A n'est pas inversible, alors u n'est ni surjective, ni injective (Théorème du rang).

En notant r, le rang de A, on a $1 \leqslant r < n$, c'est-à-dire $1 \leqslant r \leqslant n-1$, et d'après le Théorème de la base incomplète, il existe une base de $\operatorname{Im} u$ de la forme

$$\mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_r),$$

une base du noyau de u de la forme

$$\mathscr{B} = (\varepsilon_{r+1}, \ldots, \varepsilon_n)$$

et on peut compléter la famille $\mathscr{C}$ en une base de E :

$$\mathscr{C}_0 = (f_1, \ldots, f_r, f_{r+1}, \ldots, f_n).$$

D'après le Théorème de caractérisation, comme $\mathscr{C}_0$ est une base de E et que $(0_E, \dots, 0_E, \varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_n)$ est une famille de $n = \dim E$ vecteurs de E, il existe un, et un seul, endomorphisme v de E tel que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant r, \quad v(f_k) = 0_E \quad \text{et que} \quad \forall\, r < k \leqslant n, \quad v(f_k) = \varepsilon_k.$$

Il est clair que, par construction,

$$\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(f_1, \dots, f_r) \subset \operatorname{Ker} v$$

et que

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} v &= \operatorname{Vect}(v(f_k),\ 1 \leqslant k \leqslant n) = \operatorname{Vect}(v(f_k),\ r < k \leqslant n)\\ &= \operatorname{Vect}(\varepsilon_k,\ r < k \leqslant n)\\ &= \operatorname{Ker} u.\end{aligned}$$

Par conséquent, $u \circ v$ est l'endomorphisme nul (puisque $\operatorname{Im} v = \operatorname{Ker} u$) et $v \circ u$ est aussi l'endomorphisme nul (puisque $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v$).

En posant $B = \mathfrak{Mat}_{\text{can}}(v)$, on a donc $AB = BA = 0_n$ et la matrice B n'est pas la matrice puisque $\operatorname{rg} B = \operatorname{rg} v = \dim \operatorname{Ker} u > 0$.

✍ *D'après le Théorème du rang,* $\operatorname{Ker} v = \operatorname{Im} u$ *(on a justifié une inclusion et le Théorème du rang prouve l'égalité des dimensions).*

Solution 24

Comme $a \neq b$, un polynôme P vérifie $P(a) = P(b) = 0$ si, et seulement si, il est divisible par $(X-a)(X-b)$. Comme la famille

$$\big(1, X, (X-a)(X-b), (X-a)(X-b)X, \dots, (X-a)(X-b)X^k, \dots, (X-a)(X-b)X^{n-2}\big)$$

est une famille libre (échelonnée en degré) de $(n+1)$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ (espace vectoriel de dimension $(n+1)$), il s'agit d'une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Comme $(1, 0, \dots, 0)$ est une famille de $(n+1)$ réels, d'après le Théorème de caractérisation des applications linéaires, il existe une, et une seule, application linéaire f de $E = \mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire une forme linéaire sur E) telle que

$$f(1) = 1, \quad f(X) = 0, \quad \forall\, 0 \leqslant k \leqslant n-2, \quad f\big((X-a)(X-b)X^k\big) = 0.$$

Solution 25

1. Tout d'abord, r est un endomorphisme de E comme composée de deux endomorphismes de E. Par ailleurs, comme p et q commutent et que $p \circ p = p$, $q \circ q = q$;

$$(p \circ q) \circ (p \circ q) = (p \circ p) \circ (q \circ q) = p \circ q,$$

donc $r = p \circ q$ est bien un projecteur.

2. Pour déterminer le noyau et l'image de r, on va procéder à chaque fois par analyse et synthèse (autrement dit, on va trouver le résultat cherché sans que cela relève de la magie).

❧ Avant tout, il faut se rappeler deux propriétés des projecteurs :
- un vecteur $x \in E$ appartient à l'image d'un *projecteur* $f \in L(E)$ si, et seulement si, $f(x) = x$;
- si f est un projecteur de E, alors il existe une décomposition de E en somme directe : $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$ et, pour tout vecteur $x \in E$, la décomposition de x dans cette décomposition est donnée par

$$x = \underbrace{f(x)}_{\in \operatorname{Im} f} + \underbrace{\big[x - f(x)\big]}_{\in \operatorname{Ker} f}.$$

❧ Si $y \in \operatorname{Im} r$, alors il existe $x \in E$ tel que

$$y = r(x) = p\big(q(x)\big) = q\big(p(x)\big)$$

puisque $r = p \circ q = q \circ p$. La première relation nous assure que $y \in \operatorname{Im} p$ et la seconde, que $y \in \operatorname{Im} q$. Par conséquent, $\operatorname{Im} r \subset \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$.

Réciproquement, si $y \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$, alors $y = p(y)$ et $y = q(y)$ (puisque p et q sont des *projecteurs*). Par conséquent,

$$r(y) = p\big(q(y)\big) = p(y) = y,$$

ce qui prouve que $y \in \operatorname{Im} r$.

On a ainsi prouvé que $\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$.

❧ Si $x \in \operatorname{Ker} r$, alors $r(x) = p\big(q(x)\big) = 0_E$, donc $q(x) \in \operatorname{Ker} p$. Par conséquent,

$$x = \underbrace{q(x)}_{\in \operatorname{Ker} p} + \underbrace{\big[x - q(x)\big]}_{\in \operatorname{Ker} q} \in \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q.$$

Réciproquement, si $x \in \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$, alors il existe $x_1 \in \operatorname{Ker} p$ et $x_2 \in \operatorname{Ker} q$ tels que $x = x_1 + x_2$ et, comme p et q commutent,

$$r(x) = r(x_1) + r(x_2) = q\big(p(x_1)\big) + p\big(q(x_2)\big) = q(0_E) + p(0_E) = 0_E,$$

donc $x \in \operatorname{Ker} r$.

On a donc prouvé par double inclusion que $\operatorname{Ker} r = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$.

Solution 26

1. On suppose que f et g commutent.

❧ Soit $y \in \operatorname{Im} f$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et

$$g(y) = (g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) \in \operatorname{Im} f,$$

donc $\operatorname{Im} f$ est stable par g.

❧ Soit $x \in \operatorname{Ker} f$: on a donc $f(x) = 0$ et par linéarité de g, on a $g\big(f(x)\big) = 0$. Comme f et g commutent, on a aussi $f\big(g(x)\big) = 0$, c'est-à-dire $g(x) \in \operatorname{Ker} f$, donc $\operatorname{Ker} f$ est stable par g.

✍ *C'est du cours !*

2. Si f et p commutent, alors $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par f (d'après la question précédente).

❧ Réciproquement, supposons que $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ soient stables par f.
On sait que $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$ et que

$$\forall\, x \in E, \quad x = \underbrace{p(x)}_{\in \operatorname{Im} p} + \underbrace{\big(x - p(x)\big)}_{\in \operatorname{Ker} p}. \tag{$\star$}$$

En appliquant $(\star)$ à $f(x)$ au lieu de x, on obtient que

$$f(x) = (p \circ f)(x) + \big[f(x) - (p \circ f)(x)\big].$$

Par linéarité de f et du fait que $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par f, on en déduit que

$$f(x) = \underbrace{(f \circ p)(x)}_{\in \operatorname{Im} p} + \underbrace{\big[f(x) - (f \circ p)(x)\big]}_{\in \operatorname{Ker} p}.$$

Or $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$, donc la décomposition du vecteur $f(x)$ est unique : par identification, on a donc

$$\forall\, x \in E, \quad (p \circ f)(x) = (f \circ p)(x)$$

donc p et f commutent.

✍ *Il ne suffit pas de savoir que* $\operatorname{Im} p$ *et* $\operatorname{Ker} p$ *sont supplémentaires dans* E*, il faut aussi connaître et utiliser la décomposition* $(\star)$*.*

Solution 27

1. La matrice M est carrée : $M \in \mathfrak{M}_{m+n}(\mathbb{R})$ et

$$M^\top = \begin{pmatrix} A^\top & B^\top \\ (B^\top)^\top & 0^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B^\top \\ B & 0 \end{pmatrix} = M,$$

donc la matrice M est bien symétrique.

✍ *La matrice* A *est diagonale, donc elle est symétrique. Idem pour le bloc nul.*

❧ La matrice A est diagonale et ses coefficients diagonaux sont tous différents de 0, donc la matrice A est inversible.

La transvection $L_2 \leftarrow L_2 - B^\top.A^{-1}L_1$ transforme la matrice M en

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^\top - B^\top.A^{-1}.A & 0 - B^\top.A^{-1}.B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -B^\top.A^{-1}.B \end{pmatrix}.$$

Une transvection conserve le déterminant et le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est égal au produit des déterminants des blocs diagonaux. Par conséquent,

$$\det M = \det A.\det(-B^\top.A^{-1}.B).$$

2. Le rang de B est égal au nombre de colonnes si, et seulement si, ces colonnes forment une famille libre. Les colonnes $B_1, \dots, B_m$ constituent donc une base du sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} B \subset \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

✍ *En particulier, on a nécessairement $n \geqslant m$.*

❧ La matrice $B^\top.A^{-1}.B$ est une matrice carrée de $\mathfrak{M}_m(\mathbb{R})$. Elle est inversible si, et seulement si, son noyau est réduit à la colonne nulle.

Considérons $X \in \mathfrak{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ telle que $B^\top.A^{-1}.B.X = 0$.

✍ *Ce qui suit est une démarche bien connue du cours sur la réduction des endomorphismes auto-adjoints définis positifs (et ne doit pas être considéré comme une astuce extraordinaire).*

Comme la matrice $A = \operatorname{Diag}(a_1, \dots, a_n)$ est diagonale et que ses coefficients diagonaux sont strictement positifs, on peut définir la matrice

$$\Delta = \operatorname{Diag}\Big(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{a_n}}\Big)$$

qui est elle aussi une matrice diagonale avec des coefficients diagonaux strictement positifs.

❧ L'équation $B^\top.A^{-1}.B.X = 0$ peut alors s'écrire

$$B^\top.\Delta.\Delta.B.X = 0$$

c'est-à-dire (puisque la matrice Δ est symétrique — comme toute matrice diagonale)

$$(\Delta.B)^\top.(\Delta.B.X) = 0. \qquad (\star)$$

❧ La matrice Δ est inversible et par conséquent le rang de $\Delta.B$ est égal au rang de B. Comme le rang de $\Delta.B$ est égal au nombre de colonnes de $\Delta.B$, ces colonnes forment une famille libre et en particulier, elles constituent une base du sous-espace vectoriel $\operatorname{Im}(\Delta.B) \subset \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

En notant $C_1, \dots, C_m$, les colonnes de $\Delta.B$, l'équation matricielle $(\star)$ se traduit par le système

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant m, \quad C_k^\top.(\Delta.B.X) = 0.$$

On peut interpréter ce système au moyen du produit scalaire canonique sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant m, \quad \langle\, C_k \,|\, \Delta.B.X \,\rangle = 0.$$

Cela signifie que le vecteur $\Delta.B.X \in \operatorname{Im}(\Delta.B)$ est orthogonal au sous-espace $\operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_m) = \operatorname{Im}(\Delta.B)$. Par conséquent, $\Delta.B.X$ est le vecteur nul.

Comme la matrice Δ est inversible, on en déduit que $B.X = 0$.

La matrice B n'est pas inversible (elle n'est même pas carrée), mais elle est injective (ses colonnes forment une famille libre), donc $X = 0$.

On a ainsi démontré que le noyau de la matrice $B^\top.A^{-1}.B$ était réduit à la colonne nulle. Comme c'est une matrice carrée, elle est donc inversible.

❧ Puisque cette matrice est inversible, son déterminant n'est pas nul. D'après la formule calculée à la question précédente, le déterminant de M n'est pas nul non plus, ce qui prouve que la matrice M est inversible.

Solution 28

Puisque la matrice B est écrite par blocs, il faut penser à écrire les vecteurs de son noyau par blocs également.

Le vecteur

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n,1}(\mathbb{K})$$

appartient au noyau de B si, et seulement si,

$$0_{2n,1} = BX = \begin{pmatrix} 0_n & A \\ A & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX_2 \\ AX_1 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, la colonne X appartient au noyau de B si, et seulement si, les deux sous-colonnes X_1 et X_2 appartiennent au noyau de A.

❧ **Avec une base de** $\operatorname{Ker} A$

Notons d, la dimension du noyau de A et considérons alors une base

$$\mathscr{B}_0 = (U_1, \dots, U_d)$$

du noyau de A.

Considérons maintenant la famille

$$\mathscr{B} = \left[\begin{pmatrix} U_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} U_d \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ U_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ U_d \end{pmatrix} \right].$$

D'après les calculs qui précèdent, les vecteurs de $\mathscr{B}$ appartiennent tous au noyau de la matrice B.

► La famille $\mathscr{B}$ est libre : s'il existe des scalaires α_k, $1 \leqslant k \leqslant 2d$, tels que

$$\sum_{k=1}^{d} \alpha_k \begin{pmatrix} U_k \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{k=d+1}^{2d} \alpha_k \begin{pmatrix} 0 \\ U_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alors

$$\sum_{k=1}^{d} \alpha_k U_k = \sum_{k=1}^{d} \alpha_{d+k} U_k = 0$$

et comme la famille $\mathscr{B}_0$ est une base de $\operatorname{Ker} A$ (par hypothèse), c'est en particulier une famille libre. On en déduit que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant 2d, \quad \alpha_k = 0$$

et donc que la famille $\mathscr{B}$ est libre.

► Enfin, si X appartient au noyau de B, alors il existe deux colonnes X_1 et X_2 appartenant au noyau de A telles que

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}.$$

Comme $\mathscr{B}_0$ engendre le noyau de A, il existe donc deux familles de scalaires $(\alpha_k)_{1 \leqslant k \leqslant d}$ et $(\alpha_k)_{d+1 \leqslant k \leqslant 2d}$ telles que

$$X_1 = \sum_{k=1}^{d} \alpha_k U_k \quad \text{et} \quad X_2 = \sum_{k=1}^{d} \alpha_{d+k} U_k.$$

Par conséquent,

$$X = \sum_{k=1}^{d} \alpha_k \begin{pmatrix} U_k \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{k=d+1}^{2d} \alpha_k \begin{pmatrix} 0 \\ U_k \end{pmatrix} \in \operatorname{Vect}(\mathscr{B}).$$

La famille $\mathscr{B}$ engendre donc le noyau de B.

► Comme $\mathscr{B}$ est une base de $\operatorname{Ker} B$ et que $\#(\mathscr{B}) = 2d$, la dimension de $\operatorname{Ker} B$ est égale à $2d = 2 \dim \operatorname{Ker} A$.

❧ **Avec un isomorphisme**

D'après les calculs préliminaires, l'application

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Ker} A \times \operatorname{Ker} A & \longrightarrow & \operatorname{Ker} B \\ (X_1, X_2) & \longmapsto & \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

est une bijection de $\operatorname{Ker} A \times \operatorname{Ker} A$ sur $\operatorname{Ker} B$. Il est par ailleurs clair que cette application est linéaire, donc c'est un isomorphisme de l'espace produit $\operatorname{Ker} A \times \operatorname{Ker} A$ sur $\operatorname{Ker} B$ et en particulier,

$$\dim \operatorname{Ker} B = \dim(\operatorname{Ker} A \times \operatorname{Ker} A) = 2 \dim \operatorname{Ker} A.$$

❧ **Avec le théorème du rang**

Quelles que soient les matrices $P, Q \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\begin{pmatrix} Q & 0_n \\ 0_n & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_n & A \\ A & 0_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & QA \\ QA & 0_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0_n & A \\ A & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0_n \\ 0_n & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & AP \\ AP & 0_n \end{pmatrix}.$$

Si le rang de A est égal à r, alors il existe deux matrices $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$QAP = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Les matrices

$$Q_0 = \begin{pmatrix} Q & 0_n \\ 0_n & Q \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_0 = \begin{pmatrix} P & 0_n \\ 0_n & P \end{pmatrix}$$

de $\mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{K})$ sont inversibles (en tant que matrices diagonales par blocs dont les blocs diagonaux sont tous inversibles) et

$$Q_0BP_0 = \begin{pmatrix} 0_n & QAP \\ QAP & 0_n \end{pmatrix}.$$

En permutant convenablement les lignes et les colonnes (ce qui conserve le rang), on en déduit que Q_0BP_0 est équivalente à

$$\begin{pmatrix} I_{2r} & 0_{2r,2n-2r} \\ 0_{2n-2r,2r} & 0_{2n-2r} \end{pmatrix}$$

et donc que

$$\operatorname{rg} B = 2r = 2 \operatorname{rg} A.$$

On déduit alors du théorème du rang que

$$\dim \operatorname{Ker} B = 2n - 2 \operatorname{rg} A = 2(n - \operatorname{rg} A) = 2 \dim \operatorname{Ker} A.$$

Solution 29

1. Par définition,

$$M^1 = \begin{pmatrix} A^1 & 1.A^0.B \\ 0_n & A^1 \end{pmatrix}$$

et il est clair que

$$M^0 = I_{2n} = \begin{pmatrix} A^0 & 0.B \\ 0_n & A^0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie par récurrence que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ 0_n & A^k \end{pmatrix}.$$

✍ *Sans l'hypothèse $AB = BA$, la démonstration par récurrence ne serait pas possible !*

On en déduit par combinaison linéaire que

$$\forall\, P \in \mathbb{C}[X], \quad P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A).B \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix}.$$

2. D'après la question précédente, P est un polynôme annulateur de M si, et seulement si, $P(A) = P'(A).B = 0_n$.

❧ Si M est diagonalisable, alors elle admet un polynôme annulateur P qui est scindé à racines simples.

Si P et P' admettaient un facteur irréductible commun, ce serait un facteur de la forme $(X - \alpha)$ (irréductible dans $\mathbb{C}[X]$!) et dans ce cas, α serait une racine (au moins) double de P : c'est impossible. Par conséquent, P et P' sont premiers entre eux.

On déduit alors de la relation de Bézout que la matrice $P'(A)$ est inversible et donc que $B = 0_n$.

❧ Réciproquement, si A est diagonalisable et si $B = 0_n$, alors A admet un polynôme annulateur P scindé à racines simples et

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & O_n \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix} = O_{2n}$$

donc P est aussi un polynôme annulateur de M, ce qui prouve que M est diagonalisable.

✍ *Variante : si $Q^{-1}AQ = \Delta$, alors*

$$\begin{pmatrix} Q & 0_n \\ 0_n & Q \end{pmatrix}^{-1} M \begin{pmatrix} Q & 0_n \\ 0_n & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta & 0_n \\ 0_n & \Delta \end{pmatrix}.$$

Solution 30

1. D'après les règles du produit matriciel par blocs,

$$M^\top.M = \begin{pmatrix} 1 + C^\top.C & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & I_n + C.C^\top \end{pmatrix}.$$

De plus, $C^\top.C = \|C\|^2 \geqslant 0$ (pour le produit scalaire canonique sur les matrices colonnes), donc $1 + C^\top.C > 0$.

Par ailleurs, si la colonne X appartient au noyau de $(I_n + C.C^\top)$, alors

$$0 = X^\top.(I_n + C.C^\top)X = X^\top.X + (C^\top.X)^2 \geqslant \|X\|^2 \geqslant 0$$

donc $X = 0$. La matrice carré $(I_n + C.C^\top)$ est donc injective et par conséquent inversible.

Comme $M^\top.M$ est diagonale par blocs et que les blocs diagonaux sont inversibles, la matrice $M^\top.M$ est inversible.

2. On vérifie que $M.M^\top = M^\top.M$ (ça n'a rien d'évident *a priori*, il est nécessaire de poser le calcul). Par conséquent, en posant $Q = M^{-1}.M^\top$,

$$Q.Q^\top = (M^{-1}.M^\top).\left[M.(M^{-1})^\top\right] = M^{-1}.M.M^\top.(M^{-1})^\top = I_n$$

puisque $(M^{-1})^\top = (M^\top)^{-1}$ (pour toute matrice inversible).

Ce calcul prouve que la matrice Q est orthogonale.