Espaces vectoriels : énoncés

Exercices CCP

1) On pose $e_1 = (1,3,5,7)$ et $e_2 = (-1,2,-3,4)$. Montrer que (e_1, e_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^2$ et compléter la en une base.

2) Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $e_1 = (1,-2,1,1)$ et $e_2 = (1,-1,2,-2)$ ainsi que les formes linéaires

$$\begin{cases} \varphi_1 : & (x,y,z,t) \longmapsto x + 2y + z - t \\ \varphi_2 : & (x,y,z,t) \longmapsto -x + y - z - t \end{cases}$$

Montrer que $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et $G = \mathrm{Ker}(\varphi_1) \cap \mathrm{Ker}(\varphi_2)$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^4$ et calculer les matrices dans la base canonique de la projection p sur F parallèlement à G et de la symétrie s par rapport à F parallèlement à G.

3) Soit $E = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ muni de la loi interne : $(x,y) \oplus (x',y') = (xx', y+y')$ et de la loi externe à opérateur dans $\mathbb{R}$: $a \cdot (x,y) = (x^a, ay)$. Montrez que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

4) Soient A, B, C trois sous-espaces vectoriels et I, J deux parties d'un espace vectoriel E.

a) Comparez :

$$\begin{array}{rcll} F_1 = A \cap (B + C) & \text{et} & G_1 = (A \cap B) + (A \cap C) & (1) \\ F_2 = A \cap (B + (A \cap C)) & \text{et} & G_2 = (A \cap B) + (A \cap C) & (2) \\ F_3 = \mathrm{Vect}(I \cup J) & \text{et} & G_3 = \mathrm{Vect}(I) \cup \mathrm{Vect}(J) & (3) \\ F_4 = \mathrm{Vect}(I \cap J) & \text{et} & G_4 = \mathrm{Vect}(I) \cap \mathrm{Vect}(J) & (4) \end{array}$$

b) Montrez l'implication

$$(A \cap B = A \cap C, A + B = A + C \text{ et } B \subset C) \Longrightarrow B = C.$$

Montrez que ce résultat ne subsiste pas si on enlève l'une des trois hypothèses.

5) Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrez les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0\} & \iff & \mathrm{Ker}\, f^2 = \mathrm{Ker}\, f \\ \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f = E & \iff & \mathrm{Im}\, f^2 = \mathrm{Im}\, f \end{array}$$

6) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des applications f de I dans $\mathbb{R}$ qui s'écrivent sous la forme $f = g + h$, avec $g : I \to \mathbb{R}$ croissante et $h : I \to \mathbb{R}$ décroissante. Montrer que $\mathcal{E}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et qu'il est engendré par l'ensemble des applications croissantes de I dans $\mathbb{R}$.

7) Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On note f l'endomorphisme de E qui à P associe $P - P'$. Montrer que f est bijectif et, pour $Q \in E$, exprimer l'antécédent P de Q par f.

8) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

a) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$. f est-il surjectif ?

b) Trouver des bases de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercices Mines-Centrale

9) a) Montrez que l'ensemble $\mathcal{P}$ des suites à termes complexes périodiques est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

b) On note $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C},\ \exists p \geq 1,\ z^p = 1\}$ et pour $z \in \mathcal{U}$, on pose $e_z = (z^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $(e_z)_{z\in\mathcal{U}}$ est une base de $\mathcal{P}$.

10) Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si $\operatorname{rg} f = \operatorname{tr} f = 1$, alors f est un projecteur.

11) Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et soit φ définie de E dans E par

$$\forall f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ (\varphi(f))\,(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrez que φ est linéaire, et trouvez son noyau et son image.

12) Soit E un espace vectoriel.

a) Soient F, G deux sous-espaces supplémentaires de E et p le projecteur sur F parallèlement à G. Montrer que $p' = Id - p$ est un projecteur. Déterminer son image et son noyau.

b) Soient p_1 et p_2 deux projecteurs de E qui commutent et $q = p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1$. Montrer que q est un projecteur et déterminer son image et son noyau. On pourra considérer les projections $p_1' = Id - p_1$ et $p_2' = Id - p_2$.

13) Soit E un espace vectoriel. Un sous-espace F de E est dit *de codimension finie* s'il possède un supplémentaire G de dimension finie.

a) Montrer que si F est de codimension finie, tous ses supplémentaires ont même dimension. Cette dimension commune est appelée *codimension* de F, et notée $\operatorname{codim}_E F$.

b) On suppose que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E tels que $G \subset F$. Montrer que G est de codimension finie dans E si et seulement F est de codimension finie dans E et G de codimension finie dans F, et que l'on a alors :

$$\operatorname{codim}_E G = \operatorname{codim}_E F + \operatorname{codim}_F G.$$

14) Soit E un espace vectoriel de dimension n sur un corps de cardinal q. Combien E possède-t-il de bases ? Quel est le cardinal de $\mathrm{GL}(E)$? Combien E possède-t-il de sous-espaces vectoriels de dimension k ?

On construit une matrice carrée de taille 5 sur le corps $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ en choisissant ses coefficients au hasard. Avec quelle probabilité la matrice obtenue est-elle inversible ?

15) (Mines 2019) Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = 0$. Montrer que $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(u^2) \leq n$ et $2\operatorname{rg}(u^2) \leq \operatorname{rg}(u)$.

16) Montrer que deux hyperplans d'un espace vectoriel E sont isomorphes.

Exercices X-ENS

17) Soit E un espace vectoriel sur un corps infini $\mathbb{K}$. Montrer que si $F_1, \ldots, F_k$ sont des sous-espaces vectoriels de E dont la réunion F est un sous-espace vectoriel, alors F est égal à l'un des F_i.

Espaces vectoriels : corrigés

Exercices CCP

1) Nous avons $\mathrm{Vect}(e_1, e_2) = \mathrm{Vect}(e_1, e_1 + e_2) = \mathrm{Vect}((1,3,5,7),(0,5,2,11))$ et la famille est libre. Pour compléter en une base, on peut choisir $e_3 = (0,0,1,0)$ et $e_4 = (0,0,0,1)$, puisque la matrice de $(e_1, e_1 + e_2, e_3, e_4)$ dans la base canonique sera alors triangulaire inférieure avec des termes non nuls sur la diagonale.

2) Les deux formes linéaires φ_1 et φ_2 sont non colinéaires, donc G est un sous-espace vectoriel de dimension 2. Pour le démontrer, on peut dire noter H_1 et H_2 les hyperplans $\mathrm{Ker}(\varphi_1)$ et $\mathrm{Ker}(\varphi_2)$; en notant ψ la restriction de φ_2 à H_1, $G = H_1 \cap H_2 = \mathrm{Ker}(\psi)$ est un hyperplan de H_2 (car ψ est une forme linéaire non nulle) : g est donc de dimension 2.

Pour éviter cette preuve théorique, on peut aussi calculer une base de G en résolvant le système linéaire :

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t) \in G \quad &\iff \quad \begin{cases} x + 2y + z - t = 0 \\ -x + y - z - t = 0 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} x + 2y + z - t = 0 \\ 3y - 2t = 0 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} x = -z - \dfrac{1}{3}t \\ y = \dfrac{2}{3}t \end{cases}
\end{aligned}$$

donc $G = \mathrm{Vect}(e_3, e_4)$ avec $e_3 = (-1,0,1,0)$ et $e_4 = \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, 0, 1\right)$.

Comme il faut calculer la matrice de p, le plus rapide est de calculer directement une décomposition pour un vecteur $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ en somme d'un élément de F et d'un élément de G. Cela prouvera que $F + G = \mathbb{R}^4$, puis que la somme est directe puisque F et G sont de dimension 2. Il faut donc trouver X et Y tels que $(x,y,z,t) - Xe_1 - Ye_2 \in G$. Il suffit donc de résoudre un système :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} - Xe_1 - Ye_2 \in G \iff \begin{cases} x + 2y + z - t = -3X + 3Y \\ -x + y - z - t = -5X - 2Y \end{cases} \iff \begin{cases} X = \dfrac{1}{21}(x - 7y + z + 5t) \\ Y = \dfrac{1}{21}(8x + 7y + 8z - 2t) \end{cases}$$

Le projeté de (x,y,z,t) sur F parallèlement à G est donc le vecteur $Xe_1 + Ye_2 = \dfrac{1}{21}\begin{pmatrix} 9x + 9z + 3t \\ -10x + 7y - 10z - 8t \\ 17x + 7y + 17z + t \\ -15x - 21y - 15z + 9t \end{pmatrix}$, d'où la matrice de la projection dans la base canonique :

$$Mat(p, BC) = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 9 & 3 \\ -10 & 7 & -10 & -8 \\ 17 & 7 & 17 & 1 \\ -15 & -21 & -15 & 9 \end{pmatrix}.$$

Comme $s = 2p - Id$, on obtient :

$$Mat(s, BC) = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 18 & 6 \\ -20 & -7 & -20 & -16 \\ 34 & 14 & 13 & 2 \\ -30 & -42 & -30 & -3 \end{pmatrix}.$$

3) L'application $\varphi:\ (u,v) \longmapsto (e^u, v)$ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur E qui vérifie :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall X, Y \in \mathbb{R}^2,\ \varphi(X+Y) = \varphi(X) \oplus \varphi(Y) \text{ et } \varphi(aX) = a \cdot \varphi(X)$$

Comme $\mathbb{R}^2$, muni des lois usuelles, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $(E, \oplus, \cdot)$ est également un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (et φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espace vectoriel).

4) a) (1) On a $B \subset B + C$, donc $A \cap B \subset A \cap (B + C) = F_1$. De même, $A \cap C \subset F_1$. Comme F_1 est un sous-espace vectoriel, il contient G_1.

Par contre, l'inclusion inverse est fausse en général : si E est un plan vectoriel et si A, B, C sont trois droites deux à deux distinctes de E, on a $F_1 = A \cap E = A$ et $G_1 = \{0\} + \{0\} = \{0\}$.

(2) On a $B \subset B + (A \cap C)$ donc $A \cap B \subset F_2$. On a $A \cap C \subset A$ et $A \cap C \subset B + (A \cap C)$, donc $A \cap C \subset F_2$, puis $G_2 \subset F_2$ car F_2 est un sous-espace vectoriel.

Cette fois-ci, l'inclusion inverse est vraie : si $x \in F_2$, on a $x \in A$ et on peut écrire $x = b + c$ avec $b \in B$ et $c \in A \cap C$. On en déduit que $b = a - c \in A$, puis que $x = \underbrace{b}_{\in A\cap B} + \underbrace{c}_{\in A\cap C} \in G_2$.

(3) On a $I \subset I \cup J$ donc $\mathrm{Vect}(I) \subset F_3$. De même, $\mathrm{Vect}(J) \subset \mathrm{Vect}(I \cup J)$, puis $G_3 \subset F_3$ car F_3 est un sous-space vectoriel.

L'inclusion inverse est fausse en général (cela saute aux yeux car G_3 n'est pas en général un sous-espace vectoriel). Par exemple, avec $E = K^2$, on peut choisir $I = \{(1,0)\}$ et $J = \{(0,1)\}$ et on a $F_3 = E$ alors que G_3 est la réunion de deux droites.

(4) On a cette fois $I \cap J \subset I$, donc $F_4 \subset \mathrm{Vect}(I)$. Par symétrie, $F_4 \subset \mathrm{Vect}(J)$, puis $F_4 \subset G_4$.

L'inclusion inverse est également fausse en général : avec $E = \mathbb{R}$, $I = \{1\}$ et $J = \{2\}$, on a $F_4 = \{0\}$ et $G_4 = \mathbb{R}$.

b) Soit $x \in C$. Comme $x \in B + C = A + B$, on peut écrire $x = a + b$ avec $a \in A$ et $b \in B$. On a alors $b \in C$ et $a = x - b \in C$, donc $a \in A \cap C = A \cap B$. On en déduit que $x = b + c \in B$: nous avons prouvé que $C \subset B$, d'où $B = C$.

Nous avons trois contre-exemples dans un plan vectoriel E qui prouvent que les trois hypothèses sont bien nécessaires :

- si A, B, C sont trois droites distinctes de E, on a $A \cap B = \{0\} = A \cap C$, $A + B = E = A + C$ mais $B \neq C$;
- si $A = B$ est une droite de E et si $C = E$, on a $A \cap B = A = A \cap C$ et $B \subset C$ mais $B \neq C$;
- si B est une droite de E et si $A = C = E$, on a $A + B = E = A + C$ et $B \subset C$ mais $B \neq C$.

5) Supposons que $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0\}$. Si $x \in \mathrm{Ker}\, f^2$, on a $f(f(x)) = 0$, donc $f(x) \in \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0\}$: on a donc $x \in \mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f^2 \subset \mathrm{Ker}\, f^2$ (l'autre inclusion est évidente).

Supposons que $\mathrm{Ker}\, f^2 = \mathrm{Ker}\, f$. Si $x \in \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f$, il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$ et $f(x) = 0$. On en déduit que $y \in \mathrm{Ker}\, f^2 = \mathrm{Ker}\, f$, d'om $x = 0$: $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont en somme directe.

Supposons que $\mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f = E$. Si $y \in \mathrm{Im}\, f$, il existe z tel que $y = f(z)$. On peut ensuite écrire $z = z_1 + z_2$ avec $z_1 \in \mathrm{Ker}\, f$ et $z_2 \in \mathrm{Im}\, f$. On en déduit :

$$y = f(z) = f(z_1) + f(z_2) = f(z_2) \in \mathrm{Im}(f^2).$$

Nous avons donc $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Im}\, f^2$, et l'inclusion inverse est évidente.

Supposons que $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2$ et fixons $x \in E$. On a $f(x) \in \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2$, donc il existe $y \in E$ tel que $f(x) = f^2(y)$. On en déduit que $x = \underbrace{x - f(y)}_{\in \mathrm{Ker}\, f} + \underbrace{f(y)}_{\in \mathrm{Im}\, f}$. Nous avons démontré que $\mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f = E$.

6) On vérifie que E est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^I$:

- $E \subset \mathbb{R}^I$;
- la fonction nulle 0 est croissante et décroissante, donc $0 = 0 + 0$ est élément de E ;

- si $\varphi_1 = f_1 + g_2$ et $\varphi_2 = f_2 + g + 2$ où les f_i sont croissantes et les g_i décroissantes, on a :

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \underbrace{(f_1 + f_2)}_{\text{croissante}} + \underbrace{(g_1 + g_2)}_{\text{décroissante}} \in E$$

- si $\varphi = f+g \in E$ avec f croissante et g décroissante et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors si $\lambda \geq 0$, λf est croissante et λg est décroissante ; sinon, λf est décroissante et λg est croissante. Dans les deux cas, $\lambda\varphi = \lambda f + \lambda g \in E$.

Tout élément φ de E s'écrit $f + g$ avec f croissante et g décroissante : $\varphi = f - (-g)$ est combinaison linéaire de deux fonctions croissantes : E est engendré par les fonctions croissantes.

7) Soit $Q \in E$ de degré n. Si Q possède un antécédent P par f, on a : $Q = P - P'$ et P est également de degré n. On a donc $\forall k \in [\![0, n]\!], Q^{(k)} = P^{(k)} - P^{(k+1)}$, puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} Q^{(k)} = P - P^{(n+1)} = P$.

Q possède ainsi au plus un antécédent, égal à $P_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}$. Un calcul évident donne $f(P_0) = Q$: f est bijective et l'antécédent de Q par f est $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}$.

8) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a $f(M) = 0 \iff \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 2x+4z & 2y+4t \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} x + 2z = 0 \\ y + 2t = 0 \end{cases}$, donc le noyau de f est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} -2z & -2t \\ z & t \end{pmatrix}$ avec $z, t \in \mathbb{R}$. C'est un espace de dimension 2, qui admet pour base $\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

Par la formule du rang, f n'est pas injectif et son rang est égal à 2. En choisissant $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, les matrices $f(M_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $f(M_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont deux éléments indépendants de $\mathrm{Im}(f)$: elles forment une base $\mathrm{Im}(f)$.

Exercices Mines-Centrale

9) a) La suite nulle est périodique donc $\mathcal{P}$ est non vide ; si deux suites u et v sont périodiques de périodes respectives p et q et si $\lambda \in \mathbb{C}$, la suite $\lambda u + v$ est périodique de période $p \vee q$. $\mathcal{P}$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

b) Remarquons que si $z \in \mathcal{U}$, avec $z^p = 1$ où $p \geq 1$, e_z est p-périodique.

Soient $z_1, \ldots, z_k$ des éléments distincts de $\mathcal{U}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ tels que $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \lambda_j e_{z_j} = 0$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j z_j^n = 0$$

En se limitant à $n \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, on obtient un système linéaire homogène d'inconnue $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ dont le déterminant est le déterminant de Vandermonde associé à $(z_1, \ldots, z_k)$: comme les z_j sont deux à deux distincts, le déterminant est non nul et le système admet $(0, \ldots, 0)$ pour unique solution : tous les λ_i sont nuls.

Nous avons donc montré que $(e_z)_{z \in \mathcal{U}}$ est une famille libre de $\mathcal{P}$.

Soit $u \in \mathcal{P}$ de période $p \geq 1$. Notons $z_1, \ldots, z_p$ les p racines p-ième de l'unité. La famille $\mathcal{B}_p = (e_{z_j})_{1 \leq j \leq p}$ est libre et est contenue dans l'espace $\mathcal{P}_p$ des suites p-périodiques. Comme cet espace est de dimension p (l'application qui à $u \in \mathcal{P}_p$

associe $(u_0, u_1, \ldots, u_{p-1})$ est un isomorphisme de $\mathcal{P}_p$ sur $\mathbb{C}^p$), $\mathcal{B}_p$ est une base de $\mathcal{P}_p$. On en déduit que u appartient à l'espace engendré par $\mathcal{B}_p$, donc à plus forte raison à l'espace engendré par $(e_z)_{z\in\mathcal{U}}$: la famille est donc génératrice.

10) Par la formule du rang, le noyau de f est de dimension $n-1$; on peut donc en prendre une base $(e_1, \ldots, e_{n-1})$, que l'on complète en une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E. Comme f est de trace égale à 1, on a :

$$f(e_n) - e_n \in \mathrm{Vect}(e_1, _o ts, e_{n-1}) = \mathrm{Ker}(f).$$

Ainsi, $f(f(e_n) - e_n) = 0$, soit $f^2(en) = f(e_n)$. D'autre part, $f^2(e_i) = 0 = f(e_i)$ pour tout $i \leq n-1$: on en déduit que $f^2 = f$, puisque f^2 et f coïncident sur une base, i.e. que f est un projecteur.

11) La linéarité de φ est immédiate, par linéarité de l'intégrale : pour $f, g \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(\varphi(\lambda f + g))(x) = \int_{x-1}^{x+1} (\lambda f(t) + g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_{x-1}^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x-1}^{x+1} g(t)\,\mathrm{d}t = (\lambda\varphi(f) + \varphi(g))(x).$$

Soit $f \in E$ et notons $g = \varphi(f)$. Comme f est continue, g est de classe C^1 avec $g'(x) = f(x+1) - f(x-1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f \in \mathrm{Ker}(\varphi) &\iff g = 0 \iff g(0) = 0 \text{ et } g' = 0 \\ &\iff \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x-1) \\ &\iff f \text{ est 2-périodique et } \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{f \in E,\ f \text{ est 2-périodique et de valeur moyenne nulle}\}.$$

Nous avons déjà dit que φ était à valeur dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrons réciproquement que $\mathrm{Im}(\varphi)$ contient $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Nous cherchons f continue telle que $\varphi(f) = g$, ce qui est équivalent aux conditions :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = f(x+1) - f(x-1) \\ g(0) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

puisque deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ sont égales si et et seulement si elle coïncident en 0 et ont même dérivée. La difficulté est qu'il y a beaucoup de solutions, puisque dès que f_0 est solution, $f_0 + h$ est solution pour toute fonction h continue 2-périodique de moyenne nulle. Il ne faut donc pas hésiter à imposer un début de définition à f. L'idée consiste à travailler pour commencer sur $[-1, 1]$. Sur cet intervalle, nous imposons seulement deux conditions à f :

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = g(0) \text{ et } f(1) - f(-1) = g'(0).$$

Nous allons donc choisir une fonction quelconque, définie et continue sur $[-1, 1]$, vérifiant ces deux conditions. On peut par exemple choisir f affine (pour avoir 2 équations et 2 inconnues) : il existe effectivement un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\int_{-1}^{1} (\alpha t + \beta)\,\mathrm{d}t = g(0) \text{ et } (\alpha + \beta) - (-\alpha + \beta) = g'(0)$$

c'est le couple $(\alpha, \beta) = \left(\dfrac{g'(0)}{2}, \dfrac{g(0)}{2}\right)$.

Nous posons donc $f(x) = \alpha x + \beta$ pour tout $x \in [0, 1]$ et il reste à prolonger f à $\mathbb{R}$ en respectant la propriété $g'(x) = f(x+1) - f(x-1)$. Cela se fait par récurrence :

- f est définie et continue sur $[-1,1]$;
- pour $n \in \mathbb{N}$, si f est définie et continue sur $[-1-2n, 1+2n]$, nous la prolongeons à $[-1-2(n+1), 1+2(n+1)]$ en posant :
$$\begin{cases} \forall x \in [-1-2(n+1), -1-2n[,\ f(x) = f(x+2) - g'(x+1) \\ \forall x \in]1+2n, 1+2(n+1)],\ f(x) = g'(x-1) + f(x-2) \end{cases}$$

Nous construisons ainsi une fonction continue f telle que $\varphi(f) = g$. On peut évidemment donner une preuve plus précise. Il faut pour cela noter spécifiquement les différents prolongements : on note $f_0 \in \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ l'application $x \longmapsto \alpha x + \beta$. f_0 vérifie :

$$\int_{-1}^{1} f_0(t)\mathrm{d}t = g(0) \text{ et } \forall x \in [0,0],\ f_0(x+1) - f_0(x-1) = g(x).$$

Nous définissons ensuite par récurrence une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n \in \mathcal{C}([-1-2n, -1+2n],\mathbb{R}),\ f_n \text{ prolonge } f_{n-1} \text{ et } \forall x \in [-2n, 2n],\ f_n(x+1) - f_n(x-1) = g'(x)$$

Si on suppose que f_n est définie et vérifie cette propriété, on pose :

$$\forall x \in [-1-2(n+1), 1+2(n+1)],\ f_{n+1}(x) = \begin{cases} f_n(x+2) - g'(x+1) & \text{si } -1-2(n+1) \leq x < -1-2n \\ f_n(x) & \text{si } -1-2n \leq x \leq 1+2n \\ g'(x-1) + f_n(x-2) & \text{si } 1+2n < x \leq 1+2(n+1) \end{cases}$$

et on montre facilement que f_{n+1} vérifie les propriétés imposées. Par exemple, f_{n+1} est continue en $1+2n$ car sa limite à gauche vaut $f_n(1+2n)$ et sa limite à droite vaut $g'(2n) + f_n(-1+2n)$, qui est justement égal à $f_n(1+2n)$ (hypothèse de récurrence appliquée au rang n, avec $x = 2n$).

Il reste pour terminer à définir f (c'est ici qu'il ne faut pas avoir oublié de dire dans l'hypothèse de récurrence que f_n était un prolongement de f_{n-1}) et on a bien :

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-} 1^1 f_0(t)\,\mathrm{d}t = g(0) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ f(x+1) - f(x-1) = g'(x).$$

Nous avons donc montré que $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

12) a) Pour x élément quelconque de E se décomposant en $x_F + x_G$ dans la somme directe $E = F \oplus G$, nous avons $p(x) = x_F$ et $p'(x) = x - x_F = x_G$, donc p' est la projection sur G parallèlement à F. On a donc $\mathrm{Im}(p') = G = \mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p') = F = \mathrm{Im}(p)$.

b) On a $q' = Id - q = Id - (Id - p_1' + Id - p_2' - (Id - p_1') \circ (Id - p_2')) = p_1' \circ p_2'$, donc $q'^2 = q'$ (car p_1' et p_2' commutent) : q' est un projecteur et $q = Id - q'$ également.

• On a $\mathrm{Ker}(p_2') \subset \mathrm{Ker}(q')$ et de même $\mathrm{Ker}(p_1') \subset \mathrm{Ker}(q')$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(p_1') + \mathrm{Ker}(p_2') \subset \mathrm{Ker}(q')$. Réciproquement, si $x \in \mathrm{Ker}(q')$, on peut écrire $x = q_2'(x) + y$ avec $y \in \mathrm{Ker}(q_2')$; on a alors $0 = q_1'(q_2'(x))$ donc $q_2'(x) \in \mathrm{Ker}(q_1')$ et $x \in \mathrm{Ker}(p_1') + \mathrm{Ker}(p_2')$.

Nous avons donc $\mathrm{Im}(q) = \mathrm{Ker}(q') = \mathrm{Ker}(p_1') + \mathrm{Ker}(p_2') = \mathrm{Im}(p_1) + \mathrm{Im}(p_2)$.

• Soit $x \in \mathrm{Ker}(q)$. En composant par p_1, on a :

$$0 = p_1 \circ q(x) = p_1^2(x) + p_1 \circ p_2(x) - p_1^2 \circ p_2(x) = p_1(x)$$

donc $x \in \mathrm{Ker}(p_1)$. Par symétrie, on a également $x \in \mathrm{Ker}(p_2)$, d'où $\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Ker}(p_1) \cap \mathrm{Ker}(p_2)$ puisque l'autre inclusion est évidente.

Autre méthode : comme p_1 et p_2 commutent, $F = \mathrm{Ker}(p_1)$ et $G = \mathrm{Im}(p_1) = \mathrm{Ker}(Id - p_1)$ sont stables par p_2. Les restrictions de p_2 à F et à G sont donc des projecteurs et on peut écrire $F = F_1 \oplus F_2$ et $G = G_1 \oplus G_2$ avec :

$$\begin{cases} \forall x \in F_1,\ p_1(x) = 0 \text{ et } p_2(x) = 0 \\ \forall x \in F_2,\ p_1(x) = 0 \text{ et } p_2(x) = x \\ \forall x \in G_1,\ p_1(x) = x \text{ et } p_2(x) = 0 \\ \forall x \in F_2,\ p_1(x) = x \text{ et } p_2(x) = x \end{cases}$$

On en déduit :

$$\mathrm{Ker}(p_1) = F_1 \oplus F_2,\ \mathrm{Im}(p_1) = G_1 \oplus G_2,\ \mathrm{Ker}(p_2) = F_1 \oplus G_1,\ \mathrm{Im}(p_2) = F_2 \oplus G_2$$

Enfin, nous avons :

$$\begin{cases} \forall x \in F_1,\ q(x) = 0 \\ \forall x \in F_2 \oplus G_1 \oplus G_2,\ q(x) = x \end{cases}$$

Ceci prouve que q est la projection sur $F_2 \oplus G_1 \oplus G_2 = \mathrm{Im}(p_1) + \mathrm{Im}(p_2)$ parallèlement à $F_1 = \mathrm{Ker}(p_1) \cap \mathrm{Ker}(p_2)$.

13) a) Soient G et G' deux supplémentaires de F. Notons p (resp. p') la projection sur G (resp. sur G') parallèlement à F. Les applications $p_{|G'}$ et $p'_{|G}$ sont des applications linéaires inverses l'une de l'autre : G et G' sont donc isomorphes et ont même dimension.

b) Si $G \oplus G' = F$ et $F \oplus F' = E$, alors $G \oplus (G' \oplus F') = E$ et G est de codimension finie dans E, avec

$$\mathrm{codim}_E(G) = \dim(G') + \dim(F') = \mathrm{codim}_F(G) + \mathrm{codim}_E(F).$$

Réciproquement, supposons que G est de codimension finie sur E et fixons H tel que $G \oplus H = E$. Soit $G' = H \cap F$. On montre facilement que G' est un supplémentaire de G dans F, donc G est de codimension finie sur F. On peut ensuite choisir F' tel que $G' \oplus F' = H$ (car H est de dimension finie : tout sev y admet un supplémentaire). On a alors

$$E = G \oplus H = G \oplus (G' \oplus F') = (G \oplus G') \oplus F' = F \oplus F'$$

et F est de codimension finie sur E.

14) Comme E est isomorphe à K^n, le cardinal de E est égal à q^n.

Pour construire une et une seule fois chaque base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E, on choisit $e_1 \in E \setminus \{0\}$, puis $e_2 \in E \setminus \mathrm{Vect}(e_1)$, et ainsi de suite jusqu'à $e_n \in E \setminus \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-1})$. Nous avons donc $q^n - 1$ choix pour e_1, puis $q^n - q$ choix pour e_2, et ainsi de suite jusqu'à $q^n - q^{n-1}$ choix pour e_n. Il existe donc $a_n = (q^n - 1)(q^n - q) \ldots (q^n - q^{n-1})$ bases de E.

Ce nombre est aussi le cardinal de $GL(E)$ (et donc également celui de $GL_n(K)$), car en fixant une base $\mathcal{B}_0$ de E, l'application $f \longmapsto f(\mathcal{B}_0)$ est une bijection de $GL(E)$ sur l'ensemble des bases de E.

Il existe exactement $b_{n,k} = (q^n - 1)(q^n - q) \ldots (q^n - q^{k-1})$ familles libres de k vecteurs de E (même preuve que précédemment : on choisit e_1 non nul, puis $e_2 \in E \setminus \mathrm{Vect}(e_1)$, et ainsi de suite jusqu'à $e_k \in E \setminus \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{k-1})$). Chacune de ces familles engendre un sous-espace vectoriel de dimension k : on construit ainsi tous les sev de dimension k, mais chacun est construit a_k fois. Le nombre de sous-espaces de dimension k est donc :

$$\frac{b_{n,k}}{a_k} = \frac{(q^n - 1)(q^n - q) \ldots (q^n - q^{k-1})}{(q^k - 1)(q^k - q) \ldots (q^k - q^{k-1})}.$$

L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_5(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})$ est muni de la probabilité uniforme : la probabilité de construire une matrice inversible M est donc égale au quotient de a_5 par le cardinal de $\mathcal{M}_5(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})$, soit

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(M \in GL_5(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})) &= \frac{(11^5 - 1)(11^5 - 11)(11^5 - 11^2)(11^5 - 11^3)(11^5 - 11^4)}{11^{25}} \\ &= \frac{(11^5 - 1)(11^4 - 1)(11^3 - 1)(11^2 - 1)(11 - 1)}{11^{15}} \\ &\simeq 0,90. \end{aligned}$$

Nous avons donc environ 90% de chance de construire une matrice inversible.

15) Comme $\mathrm{Im}(u^2) \subset \mathrm{Ker}(u)$, on a $\mathrm{rg}(u^2) \leq \dim(\mathrm{Ker}(u)) = n - \mathrm{rg}(u)$.

En fixant un supplémentaire F de $\mathrm{Ker}(u^2)$ dans E, on a :

- $\mathrm{Ker}\,(u) \bigoplus u(F) \subset \mathrm{Ker}\,\left(u^2\right)$;
- $\dim(u(F)) = \dim(F)$ (car $F \cap \mathrm{Ker}\,(u) = \{0\}$).

Nous avons donc

$$\dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(F) \leq \dim(\mathrm{Ker}(u^2))$$

soit, avec la formule du rang :

$$n - \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(u^2) \leq n - \mathrm{rg}(u^2)$$

qui est l'inégalité cherchée.

16) Nous allons utiliser le lemme : si F est un sous-espace vectoriel de E et si G et G' sont deux supplémentaires de F, G et G' sont isomorphes.

En effet, en notant p la projection sur G parallèlement à F, $p_{|G'}$ est un isomorphisme de G' sur G :

- elle est linéaire, comme restriction à un sous-espace vectoriel d'une application linéaire ;
- si $x \in \mathrm{Ker}(p_{|G'})$, $x \in F \cap G'$ donc $x = 0$: $p_{|G'}$ est injective ;
- si $x \in G$, on peut écrire $x = x' + y$ avec $x' \in G'$ et $y \in F$, ce qui donne $x = p(x') \in \mathrm{Ker}(p_{|G'})$: $p_{|G'}$ est surjective.

Soient H et H' deux hyperplans de E. Si $H = H'$, H et H' sont isomorphe. Sinon, $H \not\subset H'$ et $H' \not\subset H$: on peut donc choisir $x \in H \setminus H'$ et $x' \in H' \setminus H$ et poser $y = x + x'$. On a alors $y \notin H$ (car $x \in H$ et $x' \notin H$) et $y \notin H'$ (car $x' \in H'$ et $x \notin H'$), donc $F = \mathrm{Vect}(y)$ est un supplémentaire commun à H et H', qui sont donc isomorphes d'après le lemme.

Exercices X-ENS

17) Supposons par l'absurde que $F_i \neq F$ pour tout i : on peut alors choisir

$$(x_1, \dots, x_k) \in (F \setminus F_1) \times \dots (F \setminus F_k)$$

et considérer l'application :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{K} & \longrightarrow & F \\ & \lambda & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda^{i-1}\, x_i \end{array}$$

Comme $\mathbb{K}$ est infini et f à valeur dans $F_1 \cup \cdots \cup F_k$, il existe un indice m tel que $\{\lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda) \in F_m\}$ est infini. On peut alors choisir k scalaires distincts $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tels que

$$y_1 = f(\lambda_1), \dots, y_k = f(\lambda_k)$$

soient tous éléments de F_m. Nous pouvons voir ces égalités comme un système de Cramer (les λ_i sont deux à deux distincts : le déterminant de Vandermond est non nul) d'inconnues $x_1, \dots, x_k$, ce qui permet d'écrire chaque x_i comme combinaison linéaire des vecteurs $y_1, \dots, y_k$. On a alors une absurdité :

$$x_m \notin F_m \text{ et } x_m \in \mathrm{Vect}(y_1, \dots, y_k) \subset F_m.$$