Soit $u$, un endomorphisme de $E$ tel que

$$E = \operatorname{Ker}\big[u \circ (u - \mathrm{I}_E)\big] \oplus \operatorname{Ker}\big[u \circ (u + \mathrm{I}_E)\big].$$

Démontrer que $u$ est injective et en déduire que $u$ est une symétrie.

**Solution**

❧ Soit $x \in \operatorname{Ker} u$. Alors $u(x) = 0_E$ et par conséquent

$$u^2(x) = 0_E = u(x) = -u(x).$$

Ainsi,

$$\big[u \circ (u - \mathrm{I}_E)\big](x) = \big[u \circ (u + \mathrm{I}_E)\big](x) = 0_E,$$

ce qui signifie que

$$x \in \operatorname{Ker}\big[u \circ (u - \mathrm{I}_E)\big] \cap \operatorname{Ker}\big[u \circ (u + \mathrm{I}_E)\big].$$

Or, par hypothèse, ces deux noyaux sont en somme directe, donc leur intersection est réduite au vecteur nul. On a ainsi démontré que le noyau de $u$ ne contenait que le vecteur nul et donc que l'application linéaire $u$ est injective.

*Il est important de se rappeler que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels en somme directe est toujours réduire au vecteur nul.*

❧ Nous allons maintenant déduire de l'injectivité de $u$ que

$$\forall\, v \in \mathrm{L}(E), \quad \operatorname{Ker}(u \circ v) = \operatorname{Ker} v.$$

Si $x \in \operatorname{Ker} v$, alors $(u \circ v)(x) = u(v(x)) = u(0_E) = 0_E$. Donc le noyau de $v$ est contenu dans $\operatorname{Ker}(u \circ v)$.

Réciproquement, si $x \in \operatorname{Ker}(u \circ v)$, alors $u(v(x)) = 0_E$. Comme $u$ est une application linéaire injective, on en déduit que $v(x) = 0_E$ et donc que $\operatorname{Ker}(u \circ v)$ est contenu dans $\operatorname{Ker} v$.

❧ Donc, en fait, l'hypothèse de l'énoncé revient à

$$E = \operatorname{Ker}(u - \mathrm{I}_E) \oplus \operatorname{Ker}(u + \mathrm{I}_E).$$

Pour tout $x \in E$, il existe donc deux vecteurs $x_1 \in \operatorname{Ker}(u - \mathrm{I}_E)$ et $x_2 \in \operatorname{Ker}(u + \mathrm{I}_E)$ tels que $x = x_1 + x_2$. En traduisant l'appartenance à ces deux noyaux, on obtient $u(x_1) = x_1$ et $u(x_2) = -x_2$. Par linéarité de $u$,

$$u(x) = u(x_1) + u(x_2) = x_1 - x_2$$

et donc

$$u^2(x) = u(x_1 - x_2) = u(x_1) - u(x_2) = x_1 - (-x_2) = x_1 + x_2 = x.$$

Puisque $u^2 = \mathrm{I}_E$, l'endomorphisme $u$ est bien une symétrie.

Soient $f$ et $g$, deux endomorphismes d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie.
On suppose que $f + g \in \mathrm{GL}(E)$ et que $g \circ f = 0$. Démontrer que

$$\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g = \dim E \quad \text{et que} \quad E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f.$$

**Solution**

Comme $g \circ f = 0$, alors $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$ et donc $\operatorname{rg} f \leqslant \dim \operatorname{Ker} g$.

Supposons que $\operatorname{Im} f \subsetneq \operatorname{Ker} g$. (Le symbole $\subsetneq$ signifie que l'inclusion est stricte.) Alors $\operatorname{rg} f < \dim \operatorname{Ker} g$ et, d'après le Théorème du rang,

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Ker} f = \dim E - \operatorname{rg} f &= (\operatorname{rg} g + \dim \operatorname{Ker} g) - \operatorname{rg} f = \operatorname{rg} g + (\dim \operatorname{Ker} g - \operatorname{rg} f) \\ &< \operatorname{rg} g. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g > \operatorname{rg} g + \dim \operatorname{Ker} g = \dim E$$

(Théorème du rang à nouveau) mais la formule de Grassmann nous assure que

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g = \dim(\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g) + \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g).$$

Comme $(\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g)$ est un sous-espace vectoriel de $E$, on sait aussi que

$$\dim(\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g) \leqslant \dim E.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g) &= \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g - \dim(\operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g) \\ &\geqslant \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g - \dim E > 0. \end{aligned}$$

Nous venons donc de démontrer que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g \neq \{0_E\}$ : il existe donc un vecteur $x_0$ **non nul** dans $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g$. En conséquence,

$$(f + g)(x_0) = f(x_0) + g(x_0) = 0_E$$

ce qui contredit l'hypothèse d'injectivité sur $(f + g)$. On a ainsi démontré par l'absurde que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$.

L'hypothèse d'injectivité sur $(f + g)$ a servi à prouver que l'intersection $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g$ était réduite au vecteur nul et donc que les deux sous-espaces $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker} g$ étaient en somme directe.

Mais on a aussi démontré que $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$, donc $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont en somme directe et on déduit du Théorème du rang que

$$\dim(\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f) = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E.$$

Par conséquent,

$$E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f.$$