Lycée Pierre CORNEILLE
ANNÉE SCOLAIRE 2025/2026

MP/MPI ✻✻

Composition de Mathématiques

Le 1er octobre 2025 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

❖ Problème ❖

Soit d, un entier naturel supérieur à 1.

Pour $x = (x_1, \dots, x_d)$ et $y = (y_1, \dots, y_d)$ dans $\mathbb{R}^d$, on note

➙ $\langle\, x \,|\, y \,\rangle$, le produit scalaire usuel de x et y, défini par

$$\langle\, x \,|\, y \,\rangle = \sum_{k=1}^{d} x_k y_k,$$

➙ $\|x\| = \sqrt{\langle\, x \,|\, x \,\rangle}$, la norme euclidienne usuelle du vecteur x et

➙ $[x, y]$, le segment joignant x à y défini par

$$[x, y] = \{(1-t)x + ty,\ t \in [0, 1]\}.$$

On rappelle qu'une partie A de $\mathbb{R}^d$ est **convexe** lorsque

$$\forall\, (x, y) \in A^2, \quad [x, y] \in A.$$

Si A et B sont deux parties non vides de $\mathbb{R}^d$, on note

$$A + B = \{x + y,\ (x, y) \in A \times B\},$$
$$A - B = \{x - y,\ (x, y) \in A \times B\},$$
$$\forall\, x \in \mathbb{R}^d, \quad A - x = \{u - x,\ u \in A\}.$$

On note $\dim A$, la dimension de l'espace vectoriel engendré par $A - a$ où a est un élément quelconque de A. En particulier, si x et y sont deux points distincts de $\mathbb{R}^d$,

$$\dim\{x\} = 0 \quad \text{et} \quad \dim[x, y] = 1.$$

On identifie toute matrice $M \in \mathfrak{M}_{m,d}(\mathbb{R})$ à l'application linéaire représentée par la matrice M dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^m$. On note donc

$$\operatorname{Ker} M = \{x \in \mathbb{R}^d \ :\ Mx = 0\},$$
$$\operatorname{Im} M = \{Mx,\ x \in \mathbb{R}^d\}.$$

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{R}_+^k$, l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^k$ dont les coordonnées sont des réels positifs. Pour y_1 et y_2 dans $\mathbb{R}^k$, on note $y_1 \geqslant y_2$ (ou $y_2 \leqslant y_1$) lorsque le vecteur $y_1 - y_2$ appartient à $\mathbb{R}_+^k$.

Partie A.

0. Soit $A \subset \mathbb{R}^d$, une partie non vide. Démontrer que $\dim A$ est bien définie.

Projection

Soit C, une partie non vide, convexe et fermée de $\mathbb{R}^d$.

1. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe un unique $y \in C$ tel que

$$\forall\, z \in C, \quad \|x - y\|^2 \leqslant \|x - z\|^2$$

c'est-à-dire tel que

$$\|x - y\|^2 = \min_{z \in C} \|x - z\|^2.$$

Ce vecteur y est appelé **projeté de** x **sur** C et sera dorénavant noté $\pi_C(x)$.

Démontrer que $x = \pi_C(x)$ si, et seulement si, $x \in C$.

L'application $\pi_C : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ainsi définie est-elle linéaire ?

2. Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Démontrer que $y = \pi_C(x)$ si, et seulement si, $y \in C$ et

$$\forall\, z \in C, \quad \langle\, x - y \,|\, z - y \,\rangle \leqslant 0.$$

3. Soient x_1 et x_2 dans $\mathbb{R}^d$. Démontrer que

$$\langle\, \pi_C(x_1) - \pi_C(x_2) \,|\, x_1 - x_2 \,\rangle \geqslant \|\pi_C(x_1) - \pi_C(x_2)\|^2$$

et en déduire que π_C est continue.

4. Déterminer explicitement π_C dans les quatre cas suivants.

4. a. $C = \mathbb{R}_+^d$

4. b. $C = \{y \in \mathbb{R}^d \ :\ \|y\| \leqslant 1\}$

4. c. $C = \{y \in \mathbb{R}^d \ :\ y_1 + \cdots + y_d \leqslant 1\}$

4. d. $C = [-1, 1]^d$

Séparation

Soient C et D, deux parties convexes non vides de $\mathbb{R}^d$. On suppose que C est compacte ; que D est fermée et que ces deux parties sont disjointes : $C \cap D = \varnothing$.

5. Démontrer que $D - C$ est une partie convexe fermée de $\mathbb{R}^d$ qui ne contient pas 0.

6. Démontrer qu'il existe $p \in \mathbb{R}^d$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\forall\, (x, y) \in C \times D, \quad \langle\, p \,|\, x \,\rangle \leqslant \langle\, p \,|\, y \,\rangle - \varepsilon.$$

(On dit que C et D peuvent être **strictement séparés**.)

7. Soit C, une partie convexe fermée non vide de $\mathbb{R}^d$. On définit alors l'application

$$\sigma_C : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

par
$$\forall\, p \in \mathbb{R}^d, \quad \sigma_C(p) = \sup\{\langle p \,|\, x \rangle,\ x \in C\}.$$

Démontrer que

$$C = \big\{x \in \mathbb{R}^d \ :\ \forall\, p \in \mathbb{R}^d, \quad \langle p \,|\, x \rangle \leqslant \sigma_C(p)\big\}.$$

Interpréter géométriquement cette propriété.

8. Soit A, une partie convexe non vide de $\mathbb{R}^d$ et x, un vecteur de $\mathbb{R}^d$ n'appartenant pas à A. Démontrer qu'il existe un vecteur $p \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tel que

$$\forall\, y \in A, \quad \langle p \,|\, x \rangle \leqslant \langle p \,|\, y \rangle.$$

Partie B. Points extrémaux

Un point u de $\mathbb{R}^d$ est une **combinaison convexe** des points x_1, ..., x_m si, et seulement si, il existe des réels positifs λ_1, ..., λ_m tels que

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1 \quad \text{et} \quad x = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k.$$

Pour toute partie E de $\mathbb{R}^d$, on appelle **enveloppe convexe** de E, l'ensemble des points de $\mathbb{R}^d$ qui sont combinaison convexe d'un nombre quelconque $m \in \mathbb{N}^*$ de points de E. L'enveloppe convexe de E est noté co(E).

Soit A, une partie convexe non vide de $\mathbb{R}^d$. Un point $x \in A$ est un **point extrémal** de A si, et seulement si, la propriété

$$\exists\, (y, z, \lambda) \in A \times A \times]0, 1[, \quad x = (1 - \lambda)y + \lambda z$$

entraîne $y = z$. L'ensemble des points extrémaux de A est noté Ext(A).

Cas particuliers

9. Soient A, une partie convexe non vide de $\mathbb{R}^d$ et

$$x = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k,$$

une combinaison convexe de m points x_1, ..., x_m de A.

9. a. Vérifier que $x \in A$.

9. b. On suppose que x est un point extrémal de A. Démontrer que $x_k = x$ pour tout indice $1 \leqslant k \leqslant m$ tel que $\lambda_k > 0$.

10. Soit E, une partie de $\mathbb{R}^d$. Démontrer que co(E) est le plus petit convexe de $\mathbb{R}^d$ qui contienne E et que

$$\operatorname{Ext}(\operatorname{co}(E)) \subset E.$$

11. On considère l'ensemble $E \subset \mathbb{R}^3$, union de la paire

$$\big\{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\big\}$$

et de la courbe

$$\big\{(1 - \cos\theta, \sin\theta, 0), 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\big\}$$

et on pose $A = \operatorname{co}(E)$. Démontrer que l'ensemble Ext(A) n'est ni vide, ni fermé.

12. On considère une famille de vecteurs

$$(p_1, \dots, p_k) \in (\mathbb{R}^d)^k$$

et une famille de scalaires

$$(b_1, \dots, b_k) \in \mathbb{R}^k$$

telles que l'ensemble

$$A = \big\{x \in \mathbb{R}^d \ :\ \forall\, 1 \leqslant i \leqslant k, \quad \langle p_i \,|\, x \rangle \leqslant b_i\big\}$$

soit non vide. Démontrer que A est convexe et fermé.

Pour $x \in A$, on pose

$$I(x) = \big\{i \in [\![1, k]\!] \ :\ \langle p_i \,|\, x \rangle \leqslant b_i\big\}.$$

Démontrer que x est un point extrémal de A si, et seulement si,

$$\operatorname{rg}\big(\{p_i,\ i \in I(x)\}\big) = d.$$

En déduire que Ext(A) est un ensemble fini (éventuellement vide) dont le cardinal est inférieur ou égal à 2^k.

Cas d'un convexe compact

Dans les trois questions qui suivent, K est une partie non vide, convexe et compacte de $\mathbb{R}^d$.

13. Soit $p \in \mathbb{R}^d$. Démontrer que la partie K_p définie par

$$K_p = \{x \in K \ :\ \forall\, y \in K, \quad \langle p \,|\, x \rangle \leqslant \langle p \,|\, y \rangle\}$$

est non vide, convexe et fermée et que

$$\operatorname{Ext}(K_p) \subset \operatorname{Ext}(K).$$

14. Démontrer que Ext(K) est non vide.

☞ *On pourra se ramener au cas où* $0 \in K$ *et raisonner sur la dimension de* K.

15. Démontrer que $K = \operatorname{co}(\operatorname{Ext}(K))$.

Partie C. Un résultat de dualité

Cônes convexes

On dit qu'une partie F de $\mathbb{R}^d$ est un **cône** si $\lambda F \subset F$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Soit E, une partie non vide de $\mathbb{R}^d$. Le **cône polaire** de E est défini par

$$E^+ = \{p \in \mathbb{R}^d \ :\ \forall\, x \in E, \quad \langle p \,|\, x \rangle \geqslant 0\}$$

et son **cône bi-polaire** par

$$E^{++} = \{\xi \in \mathbb{R}^d \ :\ \forall\, p \in E^+, \quad \langle \xi \,|\, p \rangle \geqslant 0\}.$$

16. Démontrer que E^+ et E^{++} sont des cônes convexes fermés et que $E \subset E^{++}$.

17. Démontrer que $E = E^{++}$ si, et seulement si, E est un cône convexe fermé. 0

18. Soient $\xi_1, \dots, \xi_k$, des éléments de $\mathbb{R}^d$. 0

Démontrer que

$$F = \Big\{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \xi_i,\ (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}_+^k\Big\}$$

est un cône convexe fermé.

Démontrer qu'un vecteur $\xi \in \mathbb{R}^d$ appartient à F si, et seulement si, $\langle \xi \,|\, x \rangle \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant k, \quad \langle \xi_i \,|\, x \rangle \geqslant 0.$$

Programmation linéaire

On considère une matrice $M \in \mathfrak{M}_{k,d}(\mathbb{R})$. Pour

$$b = (b_1, \dots, b_k) \in \mathbb{R}^k \quad \text{et} \quad p \in \mathbb{R}^d,$$

on pose

$$\alpha = \inf\{\langle p \,|\, x \rangle,\ x \in \mathbb{R}^d,\ x \geqslant 0,\ Mx \leqslant b\},$$
$$\beta = \sup\{\langle b \,|\, q \rangle,\ q \in \mathbb{R}^k,\ q \leqslant 0,\ M^\top.q \leqslant p\}$$

avec la convention usuelle : $\inf \varnothing = +\infty$ et $\sup \varnothing = -\infty$.

19. Démontrer que $\alpha \geqslant \beta$.

20. On suppose qu'il existe $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d) \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$\bar{x} \geqslant 0, \quad M\bar{x} \leqslant b \quad \text{et} \quad \langle p \,|\, \bar{x} \rangle = \alpha.$$

En notant M_i, le vecteur de $\mathbb{R}^d$ dont les coordonnées sont les coefficients de la i-ème ligne de M, on pose

$$I = \{i \in [\![1,k]\!] \ :\ \langle M_i \,|\, \bar{x} \rangle = b_i\},$$
$$J = \{j \in [\![1,d]\!] \ :\ \bar{x}_j = 0\}.$$

20. a. Démontrer que $\langle p \,|\, z \rangle \geqslant 0$ pour tout $z \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$\forall\, j \in J, \quad z_j \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \forall\, i \in I, \quad \langle M_i \,|\, z \rangle \leqslant 0.$$

20. b. Démontrer qu'il existe un vecteur $\bar{q} \in \mathbb{R}^k$ tel que

$$\bar{q} \leqslant 0, \quad M^\top.\bar{q} \leqslant p, \quad \langle \bar{q} \,|\, M\bar{x} - b \rangle = 0$$

et que

$$\langle p - M^\top.\bar{q} \,|\, \bar{x} \rangle = 0.$$

20. c. Démontrer que $\langle b \,|\, \bar{q} \rangle = \alpha = \beta$.

Partie D. Systèmes linéaires sous-déterminés

Pour tout $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, on pose

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i|,$$
$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant d} |x_i|,$$
$$I_+(x) = \{i \in [\![1,d]\!] \ :\ x_i > 0\},$$
$$I_-(x) = \{i \in [\![1,d]\!] \ :\ x_i < 0\},$$
$$I_0(x) = \{i \in [\![1,d]\!] \ :\ x_i = 0\}.$$

Soit $M \in \mathfrak{M}_{k,d}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{rg}(M) = k$. Pour $b \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, on cherche une solution du système linéaire

$$Mx = b$$

ayant au plus k coordonnées non nulles par une méthode de minimisation. Pour cela, on s'intéresse à

$$r = \inf\{\|x\|_1,\ x \in \mathbb{R}^d,\ Mx = b\}.$$

21. Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Démontrer que

$$\|x\|_1 = \max\{\langle x \,|\, y \rangle,\ y \in \mathbb{R}^d,\ \|y\|_\infty \leqslant 1\}$$

et que

$$\|x\|_\infty = \max\{\langle x \,|\, y \rangle,\ y \in \mathbb{R}^d,\ \|y\|_1 \leqslant 1\}.$$

22. Démontrer que l'ensemble C défini par

$$C = \{x \in \mathbb{R}^d \ :\ Mx = b,\ \|x\|_1 = r\}$$

est une partie compacte, convexe et non vide.

23. Fixons $\bar{x} \in C$. Démontrer qu'il existe un vecteur

$$q \in (\mathrm{Ker}\, M)^\perp \setminus \{0\}$$

tel que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant d, \quad q_i \bar{x}_i = \|q\|_\infty.|\bar{x}_i|.$$

24. Soit K, l'ensemble des $y \in \mathbb{R}^d$ tels que

$$My = b,$$

que

$$\forall\, i \in I_0(\bar{x}), \quad y_i = 0$$

et que

$$\forall\, i \in [\![1,d]\!], \quad q_i y_i \geqslant 0.$$

Démontrer que K est non vide et inclus dans C.

25. Soit $y \in \mathrm{Ext}(K)$. On suppose que $h \in \mathrm{Ker}\, M$ et que $I_0(y) \subset I_0(h)$. Démontrer que $h = 0$.

26. En déduire que, si $y \in \mathrm{Ext}(K)$, alors le cardinal de $I_+(y) \cup I_-(y)$ est inférieur ou égal à k.

Solution ❀ Applications de la convexité

Partie A.

Il s'agit de vérifier que

$$\forall\, a, b \in A, \quad \mathrm{Vect}(A-a) = \mathrm{Vect}(A-b).$$

❧ Si $x \in \mathrm{Vect}(A-a)$, alors il existe une famille finie de vecteurs $u_1, \dots, u_n \in \mathrm{Vect}(A-a)$ et une famille finie de scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ telles que

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot (u_k - a) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot (u_k - b) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot (a-b) \in \mathrm{Vect}((A-b))$$

puisque $(a-b)$ et les $(u_k - b)$ appartiennent tous à $\mathrm{Vect}(A-b)$.

On a ainsi démontré que $\mathrm{Vect}(A-a) \subset \mathrm{Vect}(A-b)$ et l'inclusion réciproque est vraie par symétrie. Les deux sous-espaces vectoriels sont donc égaux.

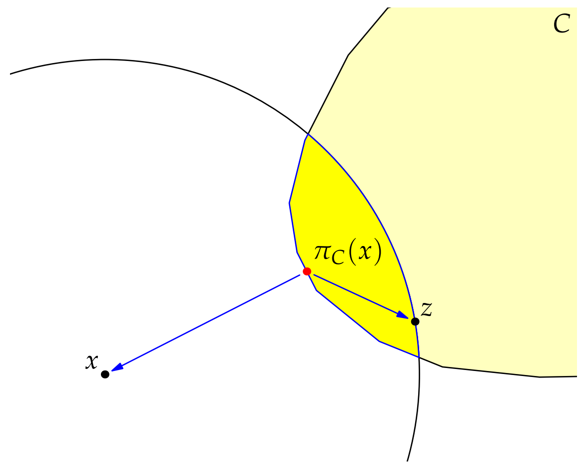
> *Ce qui se cache derrière ce résultat est la notion de* ***sous-espace affine engendré par la partie*** A *: chaque point de ce sous-espace affine s'écrit*
> $$M = a + x \qquad \text{où} \qquad x \in \mathrm{Vect}(A-a).$$
> *Le vecteur* a *est donc un point particulier choisi comme* ***origine*** *et le sous-espace vectoriel* $\mathrm{Vect}((A-a))$ *est la* ***direction*** *du sous-espace affine.*

Projection

1. Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Comme C n'est pas vide, il existe au moins un point $z \in C$. L'intersection

$$K = C \cap B_f(x, \|x-z\|)$$

est alors une partie **compacte non vide** : elle contient z (donc n'est pas vide), elle est fermée (intersection de deux parties fermées) et comme elle est contenue dans une partie compacte (les boules fermées de $\mathbb{R}^d$, espace vectoriel de dimension finie, sont compactes), c'est bien une partie compacte.



❧ L'application $f : K \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, u \in K, \qquad f(u) = \|x-u\|^2$$

est **continue**. En effet, par inégalité triangulaire, l'application $u \mapsto \|x-u\|$ est 1-lipschitzienne de K dans $\mathbb{R}$:

$$\forall\, u, v \in K, \quad \big|\|x-u\| - \|x-v\|\big| \leqslant \|u-v\|$$

et l'application $t \mapsto t^2$ est polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

❧ Toute application continue sur un compact non vide et à valeurs réelles est bornée et, en particulier, atteint un minimum. Il existe donc (au moins) un point $y_0 \in C$ tel que

$$\forall\, u \in K, \qquad \|x-y_0\|^2 = f(y_0) \leqslant f(u) = \|x-u\|^2.$$

> *On n'a pas encore répondu précisément à la question posée : a priori, il existe des points dans* C *qui sont situés en dehors du compact* K.

Par ailleurs, si $u \in C$ n'appartient pas à K, alors $\|u-x\| > \|z-x\| \geqslant 0$ (par définition de K !), donc

$$\forall\, u \in C \setminus K, \qquad \|x-y_0\|^2 \leqslant \|x-z\|^2 < \|x-u\|^2.$$

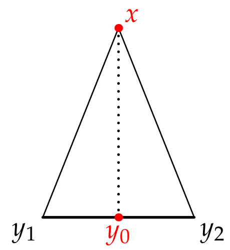
On a bien démontré qu'il existait (au moins) un point $y_0 \in C$ tel que

$$\forall\, u \in C, \qquad \|x-y_0\|^2 \leqslant \|x-u\|^2$$

c'est-à-dire
$$\|x-y_0\|^2 = \min_{u\in C} \|x-u\|^2.$$

❧ Passons maintenant à l'unicité du point y_0 en supposant qu'il existe deux points y_1 et y_2 dans C tels que
$$\forall\, u \in C, \qquad \|x-y_1\|^2 = \|x-y_2\|^2 \leqslant \|x-u\|^2.$$

Le raisonnement qui suit tient tout entier dans le plan affine déterminé par les trois points x, y_1 et y_2, qui est en fait le plan affine $x + \mathrm{Vect}(y_1 - x, y_2 - x)$. Ce plan est muni de la norme euclidienne canonique (induite par restriction de la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^d$), donc la figure ci-contre est exacte !



Comme y_1 et y_2 appartiennent à C, partie convexe, le segment $[y_1, y_2]$ est tout entier dans C et en particulier son milieu :
$$y_0 = \frac{y_1+y_2}{2}.$$
Comme le triangle de sommets x, y_1 et y_2 est isocèle en x, la médiane $[x, y_0]$ est aussi la hauteur issue de x :
$$\langle\, x-y_0 \,|\, y_2-y_1 \,\rangle = \frac{\langle\, (x-y_1)+(x-y_2) \,|\, (x-y_1)-(x-y_2) \,\rangle}{2} = \frac{\|x-y_1\|^2 - \|x-y_2\|^2}{2} = 0.$$
On déduit alors du théorème de Pythagore que
$$\|x-y_1\|^2 = \|x-y_2\|^2 = \|x-y_0\|^2 + \frac{\|y_1-y_2\|^2}{4}.$$
Par conséquent, si $y_1 \neq y_2$, alors $\|y_1-y_2\| > 0$ et
$$\|x-y_0\|^2 < \|x-y_1\|^2 = \min_{u\in C} \|x-u\|^2,$$
ce qui est absurde puisque $y_0 \in C$.

Il existe donc un, et un seul, point $y_0 \in C$ en lequel l'expression $\|x-u\|^2$ atteint son minimum sur K.

C'est ce résultat d'existence et d'unicité qui légitime la notation π_C : on a bien défini une application de $\mathbb{R}^d$ dans K.

❧ Supposons que $x \in C$. Il est alors clair que
$$\forall\, u \in C, \qquad 0 = \|x-x\|^2 \leqslant \|x-u\|^2$$
et comme $x \in C$, alors $\pi_C(x) = x$.

C'est l'unicité du projeté qui nous permet ici d'identifier x et $\pi_C(x)$.

Réciproquement, supposons que $\pi_C(x) = x$. Par construction de π_C, le point $\pi_C(x)$ appartient au convexe fermé C, donc $x \in C$.

❧ Si C est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$, alors la projection orthogonale π sur C est bien définie et (Théorème de Pythagore !)
$$\forall\, z \in C, \qquad \left\|\pi(x)-x\right\|^2 = \min_{u\in C} \|u-x\|^2.$$
Par unicité à nouveau, on en déduit que $\pi(x) = \pi_C(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

Dans ce cas, la projection π_C est donc une application linéaire.

❧ Si C n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$, alors l'image de l'application π_C, qui est exactement l'ensemble C comme on vient de le justifier, n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$, donc π_C n'est pas linéaire.

2. Reprenons la figure du **[1.]**, où l'on voit bien que l'angle $(x-y, z-y)$ est obtus.

Étant donnés deux vecteurs non nuls a et b, le couple (a, b) détermine un angle (non orienté) et une mesure $\theta \in [0, \pi]$ de cet angle est donnée par l'inégalité de Schwarz :
$$\cos\theta = \frac{\langle\, a \,|\, b \,\rangle}{\|a\|\,\|b\|}.$$
Le signe du produit scalaire $\langle\, a \,|\, b \,\rangle$ nous renseigne sur la nature de cet angle : aigu si $\langle\, a \,|\, b \,\rangle > 0$; obtus si $\langle\, a \,|\, b \,\rangle < 0$ et droit si $\langle\, a \,|\, b \,\rangle = 0$.

Comme z et $y = \pi_C(x)$ appartiennent au convexe C, le segment $[y, z]$ est tout entier contenu dans C :

$$\forall\, t \in [0, 1], \quad z_t = (1-t)y + tz \in C.$$

Par conséquent,

$$\forall\, t \in [0, 1], \quad f(t) \overset{\text{déf.}}{=} \|x - z_t\|^2 \geqslant f(0) = \|x - \pi_C(x)\|^2.$$

La fonction f ainsi définie sur $[0, 1]$ est dérivable car polynomiale :

$$\forall\, t \in [0, 1], \quad f(t) = \big\|(x-y) + t(y-z)\big\|^2 = \|x-y\|^2 + 2t\,\langle\, x-y \,|\, y-z \,\rangle + t^2\|z-y\|^2.$$

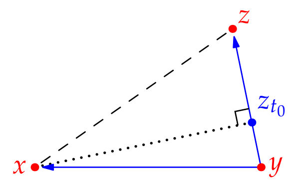
Sachant donc que

$$\forall\, 0 < t \leqslant 1, \qquad \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} \geqslant 0$$

on en déduit que $f'(0) \geqslant 0$, c'est-à-dire $\langle\, x-y \,|\, z-y \,\rangle \leqslant 0$.

On peut aussi raisonner par l'absurde en supposant qu'un angle est aigu : s'il existe $z \in C$ *tel que* $\langle\, x-y \,|\, z-y \,\rangle > 0$, *alors la fonction polynomiale* f *définie ci-dessus atteint son minimum absolu pour*

$$t = t_0 \overset{\text{déf.}}{=} \frac{\langle\, x-y \,|\, z-y \,\rangle}{\|y-z\|^2}.$$



D'après notre hypothèse, $t_0 > 0$ *et d'après l'inégalité de Schwarz,* $t_0 \leqslant 1$.
La fonction f *atteint donc un minimum, strictement inférieur à* $f(0) = \|x-y\|^2$ *en un point* z_{t_0} *situé sur le segment* $[y, z]$ *et donc dans* C *(par convexité de* C*).*

❧ Réciproquement, considérons encore la fonction f définie ci-dessus avec $y = \pi_C(x) \in C$ et $z =\in C$: c'est un trinôme du second degré dont le coefficient dominant est positif. Par conséquent, si $\langle\, x-y \,|\, z-y \,\rangle \leqslant 0$, alors la fonction f atteint son minimum en

$$t = t_0 = \frac{\langle\, x-y \,|\, z-y \,\rangle}{\|y-z\|^2} \leqslant 0.$$

et est donc croissante sur $[0, 1]$. En particulier,

$$\forall\, z \in C, \qquad \|x-z\|^2 = f(1) \geqslant f(0) = \|x-y\|^2,$$

ce qui nous donne bien

$$\|x-y\|^2 = \min_{z \in C} \|x-z\|^2.$$

3. On applique ce qui précède avec $x = x_1$, $y = \pi_C(x_1)$ et $z = \pi_C(x_2) \in C$:

$$\big\langle\, \pi_C(x_2) - \pi_C(x_1) \,\big|\, x_1 - \pi_X(x_1) \,\big\rangle \leqslant 0$$

puis avec $x = x_2$, $y = \pi_C(x_2)$ et $z = \pi_C(x_1) \in C$:

$$\big\langle\, \pi_C(x_1) - \pi_C(x_2) \,\big|\, x_2 - \pi_X(x_2) \,\big\rangle \leqslant 0.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\big\langle\, \pi_C(x_1) - \pi_C(x_2) \,\big|\, x_1 - x_2 \,\big\rangle &- \big\|\pi_C(x_1) - \pi_C(x_2)\big\|^2 \\
&= \big\langle\, \pi_C(x_1) - \pi_C(x_2) \,\big|\, (x_1 - x_2) - (\pi_C(x_1) - \pi_C(x_2)) \,\big\rangle \\
&= \big\langle\, \pi_C(x_1) - \pi_C(x_2) \,\big|\, [x_1 - \pi_C(x_1)] + [\pi_C(x_2) - x_2] \,\big\rangle \\
&= -\big\langle\, \pi_C(x_2) - \pi_C(x_1) \,\big|\, x_1 - \pi_C(x_1) \,\big\rangle - \big\langle\, \pi_C(x_1) - \pi_C(x_2) \,\big|\, x_2 - \pi_C(x_2) \,\big\rangle \\
&\geqslant 0
\end{aligned}$$

et donc que

$$\big\langle\, \pi_C(x_1) - \pi_C(x_2) \,\big|\, x_1 - x_2 \,\big\rangle \geqslant \big\|\pi_C(x_1) - \pi_C(x_2)\big\|^2.$$

❧ D'après l'inégalité de Schwarz,

$$\big\|\pi_C(x_1) - \pi_C(x_2)\big\|^2 \leqslant \big\|\pi_C(x_1) - \pi_C(x_2)\big\|\, \|x_1 - x_2\|.$$

Par conséquent, ou bien $\pi_C(x_1) \neq \pi_C(x_2)$ et dans ce cas, $\|\pi_C(x_1) - \pi_C(x_2)\| > 0$, ce qui nous donne

$$\|\pi_C(x_1) - \pi_C(x_2)\| \leqslant \|x_1 - x_2\|$$

ou bien $\pi_C(x_1) = \pi_C(x_2)$ et dans ce cas, l'encadrement voulu est évident.

On a ainsi démontré que π_C était une application 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}^d$ et donc une application continue.

4. a.
4. b.
4. c.
4. d.

Séparation

5. Soient z_1 et z_2, deux éléments de $D - C$. Il existe donc x_1, x_2 dans C et y_1, y_2 dans D tels que $z_1 = y_1 - x_1$ et $z_2 = y_2 - X_2$. Pour tout $t \in [0,1]$,

$$(1-t)x_1 + tx_2 \in C \qquad \text{et} \qquad (1-t)y_1 + ty_2 \in D$$

(puisque C et D sont convexes), donc

$$(1-t)z_1 + tz_2 = \big[(1-t)y_1 + ty_2\big] - \big[(1-t)x_1 + tx_2\big] \in D - C.$$

On a ainsi démontré que $D - C$ était convexe.

> *Sans plus de difficulté, on peut démontrer que :*
> — *un produit de parties convexes est une partie convexe de l'espace produit ;*
> — *l'image d'une partie convexe par une application linéaire est une partie convexe ;*
> — *l'image réciproque d'une partie convexe par une application linéaire est une partie convexe.*
> *On peut en déduire que $D \times C$ est une partie convexe, puis que $D - C$ est une partie convexe, puisque l'application $[(x,y) \mapsto y - x]$ est linéaire de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$.*

❧ Considérons une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $D - C$ qui converge vers un vecteur $u \in \mathbb{R}^d$. Par définition de $D - C$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in C$ et $y_n \in D$ tels que $z_n = y_n - x_n$.

Comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est contenue dans le compact C, on peut en extraire une sous-suite convergente $(x_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$, de limite $\ell_2 \in C$.

Mais la sous-suite $(z_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers u (en tant que suite extraite d'une suite qui converge vers u), donc

$$y_{\varphi(k)} = z_{\varphi(k)} + x_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} u + \ell_2$$

et $u + \ell_2 \in D$ (puisque tous les $y_{\varphi(k)}$ appartiennent à D, partie fermée).

On a donc $u = (u + \ell_2) - \ell_2 \in D - C$. On a ainsi prouvé que $D - C$ était stable par passage à la limite, c'est-à-dire fermée.

❧ Si $0 \in D - C$, alors il existe $x \in C$ et $y \in D$ tels que $0 = y - x$ et donc $x = y$. Comme $x \in C$ et $y \in D$, on en déduit que $x \in C \cap D$, ce qui est impossible (les deux parties sont supposées disjointes). Donc $D - C$ ne contient pas 0.

6. Il s'agit en fait de prouver qu'il existe un vecteur $p \in \mathbb{R}^d$ et un réel $\varepsilon > 0$ tels que

$$\forall\, u \in D - C, \qquad \varepsilon \leqslant \langle\, p \,|\, u \,\rangle\,.$$

D'après la question précédente, $D - C$ est une partie convexe fermée non vide et elle ne contient pas le vecteur nul. Posons donc $p = \pi_{D-C}(0_E)$: comme $0_E \notin D - C$, on déduit de **[1.]** que $p \neq 0_E$ et de **[2.]** que

$$\forall\, u \in D - C, \qquad \langle\, 0_E - p \,|\, u - p \,\rangle \leqslant 0$$

c'est-à-dire

$$\forall\, u \in D - C, \qquad 0 < \|p^2\| \leqslant \langle\, p \,|\, u \,\rangle\,,$$

cqfd avec $\varepsilon = \|p^2\|$.

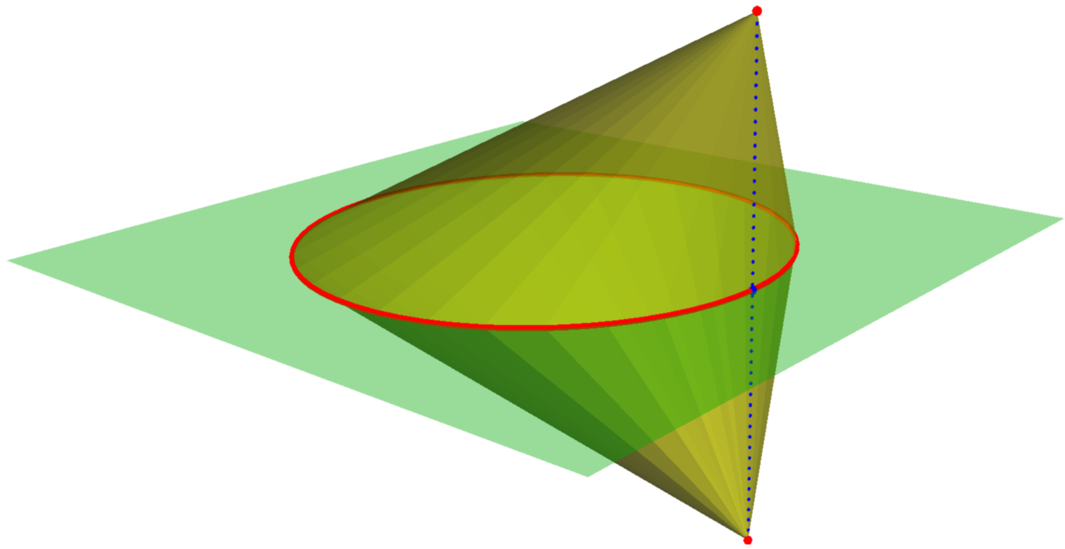
> *Tout réel $0 < \varepsilon \leqslant \|p^2\|$ convient.*

7.
8.

Partie B. Points extrémaux

Cas particuliers

9. a.
9. b.
10.
11.



Cas d'un convexe compact

13.

Partie C. Un résultat de dualité

Cônes convexes

16.

Programmation linéaire

19.

Partie D. Systèmes linéaires sous-déterminés

21.
22.