# Composition de Mathématiques

Le 1er octobre 2025 – De 13 heures à 17 heures

---

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

*La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.*

**Les calculatrices sont interdites.**
**Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.**

## ❖ Problème ❖

Dans ce problème, on note I, le segment $[0,1]$ et on considère deux fonctions continues

$$f : I \to \mathbb{R}, \qquad p : I \to \mathbb{R}$$

avec

$$\forall\, x \in I, \qquad p(x) \geqslant 0.$$

Il s'agit d'étudier les solutions

$$u \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$$

de l'équation différentielle

$$\forall\, x \in I, \quad -u''(x) + p(x)u(x) = f(x) \tag{E}$$

qui vérifient en outre les conditions aux limites suivantes :

$$u(0) = 0, \qquad u(1) = 0. \tag{C}$$

Nous dirons qu'une fonction $u \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$ qui vérifie à la fois l'équation différentielle (E) et les conditions (C) est une **solution du problème (P)**.

De manière analogue, une fonction $u \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$ qui vérifie à la fois l'équation différentielle homogène $(E_0)$ associée à (E) :

$$\forall\, x \in I, \quad -u''(x) + p(x)u(x) = 0 \tag{$E_0$}$$

et les conditions (C) est une **solution du problème $(P_0)$**.

Dans un premier temps, après deux exemples concrets, on démontre que le problème (P) admet en général une, et une seule, solution. On cherchera ensuite à calculer une approximation de cette solution et à estimer la qualité de cette approximation.

### Partie A. Exemples

**1.** Déterminer les solutions du problème (P) dans les deux cas suivants.

**1. a.** Pour tout $x \in I$,

$$p(x) = 0, \qquad f(x) = 1.$$

**1. b.** Pour tout $x \in I$,

$$p(x) = 1, \qquad f(x) = e^{\alpha x}$$

où $\alpha$ est un réel donné.

### Partie B. Résultats généraux

**2.** Démontrer que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E_0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$.

**3. a.** Soit $u$, une solution du problème $(P_0)$. Démontrer que la fonction $u$ vérifie la relation

$$\int_0^1 \big[u'(x)\big]^2 + p(x)\big[u(x)\big]^2 \, dx = 0.$$

En déduire que la seule solution du problème $(P_0)$ est la fonction nulle.

**3. b.** Démontrer que, pour chaque couple $(p, f)$ donné, le problème (P) admet au plus une solution.

> *On admet que la dimension du sous-espace vectoriel des solutions de $(E_0)$ est égale à 2.*

**4.** On considère deux solutions $u_1$ et $u_2$ de l'équation différentielle $(E_0)$ et la fonction $g$ définie par

$$\forall\, x \in I, \qquad g(x) = u_1(0)u_2(x) - u_2(0)u_1(x).$$

**4. a.** Démontrer que : si $g(1) = 0$, alors $g$ est identiquement nulle sur le segment I.

**4. b.** En déduire que $g(1) \neq 0$ si, et seulement si, le couple $(u_1, u_2)$ est une base de l'espace des solutions de l'équation $(E_0)$.

**5.** Soient $(u_1, u_2)$, une base de l'espace des solutions de $(E_0)$ ; $\nu$, une solution de l'équation différentielle (E) et $\lambda$, $\mu$, deux nombres réels. On considère le vecteur colonne

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

et la fonction $u : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x \in I, \qquad u(x) = \lambda u_1(x) + \mu u_2(x) + \nu(x).$$

**5. a.** Démontrer que cette fonction $u$ est une solution du problème (P) si, et seulement si, la colonne $\Lambda$ vérifie une relation matricielle de la forme

$$M\Lambda = B$$

avec $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

☞ *On précisera la matrice* M *et la colonne* B.

**5. b.** Démontrer que le problème (P) admet une, et une seule, solution.

**Partie C. Une norme matricielle**

On identifiera systématiquement le vecteur

$$(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

à la colonne

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

qui représente ce vecteur dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de la norme produit :

$$\|X\| = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$$

et, pour toute matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$N(M) = \max_{\substack{X \in \mathbb{R}^n \\ X \neq 0}} \frac{\|MX\|}{\|X\|}.$$

**6.** Démontrer que N est une norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

**7.** Démontrer que

$$\forall\, A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad N(AB) \leqslant N(A)N(B). \qquad (\star)$$

On *admet* que l'application $N_\infty$ définie par

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad N_\infty(M) = \sup_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |M_{i,j}|$$

est une norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Cette norme vérifie-t-elle aussi la propriété $(\star)$ ?

**8.** Soit $(M_p)_{p \geqslant 1}$, une suite de matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qui converge vers une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que cette matrice M est inversible.

**8. a.** Démontrer que, pour tout entier p assez grand, la matrice $M_p$ est inversible.

**8. b.** Soit $X \in \mathbb{R}^n$. En admettant que la matrice $M_p$ soit inversible, démontrer que

$$\|M_p^{-1}X - M^{-1}X\| \leqslant N(M^{-1})N(M - M_p)\|M_p^{-1}X\|.$$

En déduire qu'il existe un entier $p_0$ et un réel C, indépendant du vecteur $X \in \mathbb{R}^n$, tels que

$$\forall\, p \geqslant p_0, \quad \|M_p^{-1}X\| \leqslant C\, \|M^{-1}X\|.$$

**8. c.** Démontrer que

$$\lim_{p \to +\infty} N(M_p^{-1} - M^{-1}) = 0.$$

**9.** Qu'apportent les résultats précédents au cours ?

**Partie D. Discrétisation**

Dorénavant, $n$ est un entier supérieur à 3. On pose alors

$$h = \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad \forall\, 0 \leqslant k \leqslant n+1, \quad x_k = k.h = \frac{k}{n+1}.$$

La famille $(x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n+1}$ définit une subdivision de l'intervalle $I = [0, 1]$ de pas $h$ (*discrétisation temporelle*).

On considère également le vecteur

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

et la matrice

$$H = \mathrm{Diag}(p_1, \ldots, p_n) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$$

où on a posé

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad f_k = f(x_k) \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad p_k = p(x_k) \in \mathbb{R}_+.$$

**10.** On suppose que les fonctions $p$ et $f$ sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur le segment I. Démontrer que la solution $u$ du problème (P) est de classe $\mathscr{C}^4$ sur I.

**11.** Soit $u \in \mathscr{C}^4(I, \mathbb{R})$. On pose

$$M = \sup_{x \in I} \left|u^{(4)}(x)\right|.$$

**11. a.** Démontrer que

$$\left|u''(x_k) - \frac{u(x_{k-1}) - 2u(x_k) + u(x_{k+1})}{h^2}\right| \leqslant \frac{Mh^2}{12}$$

pour tout indice $1 \leqslant k \leqslant n$.

**11. b.** Que devient cette inégalité dans le cas où $u$ est la fonction trouvée au 0 ?

On remplace le problème *continu* (P) par le problème *discret* suivant : on cherche les vecteurs

$$\widehat{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

tels que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \frac{-u_{k-1} + 2u_k - u_{k+1}}{h^2} + p_k u_k = f_k \qquad (D)$$

avec les valeurs particulières $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 0$ pour tenir compte de la condition (C).

**12.** Expliciter une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que le problème (D) puisse être écrit sous forme matricielle :

$$(A + H)\widehat{U} = F.$$

> *Un vecteur $X = (x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de $\mathbb{R}^n$ est dit **positif** lorsque toutes ses coordonnées $x_k$ sont des réels positifs.*
> *De même, une matrice $Q = (Q_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **positive** lorsque tous ses coefficients $Q_{i,j}$ sont des réels positifs.*

**13.** Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on suppose que : si le vecteur MX est positif, alors le vecteur X lui-même est positif.

Démontrer que la matrice M est inversible et que son inverse $M^{-1}$ est une matrice positive.

**14.** Soit $X = (x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{R}^n$. On suppose que le vecteur $(A+H)X$ est positif. Démontrer que le vecteur $X$ est positif.
☞ *On pourra raisonner par l'absurde en considérant un indice* $1 \leqslant k \leqslant n$ *tel que*

$$x_k = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i.$$

En déduire que les deux matrices $A+H$ et $A$ sont inversibles et que la matrice $B = A^{-1}$ est positive.

> *Le problème discret* $(D)$ *admet donc une, et une seule, solution.*

## Partie E. Qualité de l'approximation

On souhaite comparer le vecteur $\widehat{U}$ calculé en résolvant le problème discret (D) au vecteur

$$U = \begin{pmatrix} u(x_1) \\ \vdots \\ u(x_n) \end{pmatrix}$$

obtenu en échantillonnant la solution $u \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$ du problème continu (P).

**15.** Soit $F_0 \in \mathbb{R}^n$, le vecteur dont toutes les coordonnées sont égales à 1. On considère les vecteurs

$$V = (A+H)^{-1}F_0 \quad \text{et} \quad W = A^{-1}F_0.$$

**15. a.** Soit $Q \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice positive. Démontrer que

$$N(Q) = \|QF_0\|.$$

**15. b.** Démontrer que les vecteurs $V$, $W$ et $A(W-V)$ sont positifs.

**15. c.** Comparer $\|V\|$ et $\|W\|$. En déduire que

$$\forall\, X \in \mathbb{R}^n, \quad \left\|(A+H)^{-1}X\right\| \leqslant \|W\|\,\|X\|.$$

**16.** On cherche ici à donner estimer la valeur de $\|W\|$.

**16. a.** Déterminer le réel $a$ tel que la suite de terme général

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad y_k = ak^2$$

vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad -y_{k-1} + 2y_k - y_{k+1} = 1.$$

**16. b.** En déduire les coordonnées du vecteur $W$, puis que

$$\|W\| \leqslant \frac{1}{8}.$$

**17.** On pose

$$Z = (A+H)U - F.$$

**17. a.** Majorer $\|Z\|$ au moyen de $M$ et de $h$.

**17. b.** En déduire que

$$\|U - \widehat{U}\| \leqslant \frac{Mh^2}{96}. \tag{†}$$

**17. c.** Discuter la qualité de l'approximation.

## Solution ❀ Discrétisation d'une équation différentielle

### Partie A. Exemples

**1. a.** La solution générale de l'équation différentielle

$$\forall\, x \in I, \qquad -y''(x) = 1$$

a pour expression

$$\forall\, x \in I, \qquad y(x) = -\frac{x^2}{2} + ax + b.$$

En tenant compte des conditions aux limites

$$y(0) = y(1) = 0,$$

on trouve que le problème (P) admet pour seule solution la fonction

$$\left[x \mapsto \frac{x(1-x)}{2}\right].$$

> *Pour une équation différentielle du second ordre, une **condition initiale** est la donnée d'une valeur $x_0 \in I$ et du couple*
>
> $$\big(u(x_0), u'(x_0)\big).$$
>
> *Rien de tel ici, il s'agit de **conditions aux limites** et non d'une condition initiale.*

**1. b.** La solution générale de l'équation homogène $(E_0)$ est bien sûr

$$ae^x + be^{-x}.$$

> *Ne pas perdre de temps avec les détails de calcul sur la copie !*

❧ Si $\alpha \neq \pm 1$, alors il existe une solution particulière de la forme

$$ce^{\alpha x}.$$

En injectant dans l'équation (E), on trouve

$$c = \frac{1}{1-\alpha^2}$$

et en tenant compte des conditions aux limites, on obtient une seule solution :

$$\forall\, x \in I, \quad u(x) = \frac{(e^{\alpha+1}-1)e^x + (e^2 - e^{\alpha+1})e^{-x}}{(e^2-1)(\alpha^2-1)} + \frac{e^{\alpha x}}{1-\alpha^2}.$$

> *On peut aussi exprimer cette solution sous la forme*
>
> $$\frac{\operatorname{ch} x}{\alpha^2 - 1} + \frac{(e^\alpha - \operatorname{ch} 1)\operatorname{sh} x}{(\alpha^2-1)\operatorname{sh} 1} + \frac{e^{\alpha x}}{1-\alpha^2}$$
>
> *mais ce n'est pas vraiment plus simple.*

❧ Si $\alpha = \pm 1$, alors il existe une solution particulière de la forme

$$cxe^{\alpha x}.$$

En injectant dans l'équation (E), on trouve

$$c = \frac{-1}{2\alpha} = \frac{-\alpha}{2}$$

(puisque $\alpha = \pm 1$ !). En tenant compte des conditions aux limites, on obtient à nouveau une seule solution :

$$\forall\, x \in I, \quad u(x) = \frac{\alpha e^\alpha \operatorname{sh} x}{2 \operatorname{sh} 1} - \frac{\alpha x e^{\alpha x}}{2}.$$

> *Pour traiter cette question dans un délai raisonnable, il faut connaître parfaitement la méthode de résolution des équations différentielles d'ordre deux à coefficients constants et utiliser les formules de Cramer pour déterminer efficacement les constantes d'intégration.*

### Partie B. Résultats généraux

**2.** Par définition, toute solution de $(E_0)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I. Par linéarité de la dérivation et continuité de p, l'application

$$D = [u \mapsto -u'' + pu]$$

est une application linéaire de $\mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$ dans $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène $(E_0)$, en tant que noyau de D, est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$.

**3. a.** D'après l'équation $(E_0)$, pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned}\big[u'(x)\big]^2 + p(x)\big[u(x)\big]^2 &= \big[u'(x)\big]^2 + u(x)u''(x)\\ &= (uu')'(x).\end{aligned}$$

Par conséquent, l'intégrale

$$\int_0^1 \big[u'(x)\big]^2 + p(x)\big[u(x)\big]^2 \, dx$$

est égale à

$$\int_0^1 (uu')'(x)\, dx = u(1)u'(1) - u(0)u'(0),$$

quantité nulle d'après les conditions (C).

❧ La fonction

$$\left[x \mapsto \big[u'(x)\big]^2 + p(x)\big[u(x)\big]^2\right]$$

est <u>continue</u> (puisque p est continue et que u est de classe $\mathscr{C}^2$) et <u>positive</u> (puisque p est positive) sur l'intervalle $[0, 1]$. Son intégrale est nulle, donc

$$\forall\, x \in I, \quad \big[u'(x)\big]^2 + p(x)\big[u(x)\big]^2 = 0.$$

Les deux termes étant positifs, on en déduit que

$$\forall\, x \in I, \quad u'(x) = 0.$$

Comme I est un intervalle, on en déduit que la fonction u est constante sur I. D'après les conditions aux limites (C), la fonction u est identiquement nulle sur I.

❧ On a démontré que la fonction nulle était la seule solution possible du problème $(P_0)$.

Comme la fonction nulle est une solution évidente de $(P_0)$, on a en fait démontré que la fonction nulle était la seule solution du problème $(P_0)$.

> *Ce n'est pas parce que la réciproque est archi-évidente qu'on peut se permettre de n'en rien dire dans sa copie !*

**3. b.** Le couple $(p, f)$ est supposé fixé.

Soient $u$ et $v$, deux solutions du problème (P). Comme l'équation différentielle (E) est linéaire, la différence $w = u - v$ est une solution de l'équation différentielle homogène ($E_0$) et $w$ vérifie encore les conditions aux limites (C) :

$$w(0) = u(0) - v(0) = 0 - 0 = 0, \quad w(1) = 0.$$

D'après la question précédente, la fonction $w$ est la fonction nulle, ce qui prouve que $u = v$.

Le problème (P) admet donc au plus une solution.

**4. a.** D'après 0, toute combinaison linéaire de solutions de ($E_0$) est encore une solution de ($E_0$). En particulier, comme $u_1$ et $u_2$ sont des solutions de ($E_0$), la fonction $g$ est encore une solution de ($E_0$). Il est évident que $g(0) = 0$. Si de plus $g(1) = 0$, alors $g$ est en fait une solution du problème ($P_0$), donc 0 $g$ est la fonction nulle.

**4. b.** L'ensemble des solutions de ($E_0$) est un espace vectoriel de dimension 2.

> *Ce résultat, admis par l'énoncé, est une conséquence du Théorème de Cauchy-Lipschitz.*

Par conséquent, le couple $(u_1, u_2)$ est une base de cet espace si, et seulement si, c'est une famille libre. Nous allons donc démontrer que $g(1) = 0$ si, et seulement si, le couple $(u_1, u_2)$ est une famille liée.

❧ Si le couple $(u_1, u_2)$ est une famille liée,

➞ ou bien la fonction $u_1$ est identiquement nulle et, dans ce cas, la fonction $g$ est à l'évidence identiquement nulle et en particulier $g(1) = 0$;

➞ ou bien la fonction $u_1$ n'est pas identiquement nulle et, dans ce cas, il existe une constante $\alpha$ telle que

$$\forall\, x \in [0,1], \quad u_2(x) = \alpha u_1(x).$$

Mais alors

$$g(1) = u_1(0) \cdot \alpha u_1(1) - \alpha u_1(0) \cdot u_1(0) = 0.$$

❧ Réciproquement, supposons que $g(1) = 0$. D'après la question précédente, la fonction $g$ est alors identiquement nulle.

➞ Si $u_1(0) \neq 0$, alors

$$\forall\, x \in I, \quad u_2(x) = \frac{u_2(0)}{u_1(0)} \cdot u_1(x)$$

donc $u_2$ est proportionnelle à $u_1$ et le couple $(u_1, u_2)$ est lié.

Il en va de même si $u_2(0) \neq 0$.

➞ Si $u_1(0) = u_2(0) = 0$ et $u_1(1) \neq 0$, alors la fonction $h$ définie par

$$\forall\, x \in I, \quad h(x) = u_2(x) - \frac{u_2(1)}{u_1(1)} \cdot u_1(x)$$

est une solution de l'équation homogène ($E_0$) qui vérifie les conditions aux limites (C), donc 0 $h$ est identiquement nulle et $u_2$ est proportionnelle à $u_1$ et le couple $(u_1, u_2)$ est lié.

Il en va aussi de même si $u_1(0) = u_2(0) = 0$ et $u_2(1) \neq 0$.

➞ Enfin, si $u_1(0) = u_2(0) = u_1(1) = u_2(1) = 0$, alors $u_1$ et $u_2$ sont solutions du problème ($P_0$), donc elles sont nulles toutes les deux 0.

❧ Au terme de cette longue discussion, on a démontré que $g(1) \neq 0$ si, et seulement si, le couple $(u_1, u_2)$ était une base de l'espace des solutions de ($E_0$).

> *Il est sage de préparer une telle discussion au brouillon — à moins de tenir absolument à rendre une copie degoûtante.*

**5. a.** L'expression de $u$ est celle de la solution générale de l'équation différentielle (E) : somme d'une solution particulière de (E) et d'une combinaison linéaire des fonctions $u_1$ et $u_2$ qui forment une base de l'espace des solutions de l'équation ($E_0$).

Par conséquent, la fonction $u$ est une solution de (P) si, et seulement si, elle vérifie les conditions aux limites (C), ce qui se traduit par le système

$$\begin{cases} \lambda u_1(0) + \mu u_2(0) = -v(0) \\ \lambda u_1(1) + \mu u_2(1) = -v(1) \end{cases}$$

ou sous la forme $M\Lambda = B$ avec

$$M = \begin{pmatrix} u_1(0) & u_2(0) \\ u_1(1) & u_2(1) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -v(0) \\ -v(1) \end{pmatrix}.$$

**5. b.** Le déterminant de $M$ est égal à $g(1)$ et, d'après la question précédente, $g(1) \neq 0$ (puisque $(u_1, u_2)$ est une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène). Comme la matrice $M$ est inversible, le système $M\Lambda = B$ admet une seule solution : $\Lambda = M^{-1}B$.

D'après la question précédente, le problème (P) admet une, et une seule, solution $u$.

## Partie C. Une norme matricielle

**6.** Comme le vecteur $X$ n'est pas nul, le dénominateur $\|X\|$ n'est jamais nul et tous les quotients sont bien définis (et positifs).

❧ Par homogénéité de la norme, pour tout vecteur $X$ non nul, le vecteur

$$U = \frac{1}{\|X\|} \cdot X$$

est un vecteur unitaire, donc

$$\Big\{ \frac{\|MX\|}{\|X\|},\ X \in \mathbb{R}^n,\ X \neq 0 \Big\} \subset \big\{ \|MU\|,\ U \in \mathbb{R}^n,\ \|U\| = 1 \big\}.$$

Réciproquement, si $U$ est un vecteur unitaire, alors

$$\|MU\| = \frac{\|MU\|}{\|U\|},$$

donc l'inclusion réciproque est vraie elle aussi :

$$\Big\{ \frac{\|MX\|}{\|X\|},\ X \in \mathbb{R}^n,\ X \neq 0 \Big\} \supset \big\{ \|MU\|,\ U \in \mathbb{R}^n,\ \|U\| = 1 \big\}.$$

❧ Comme $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie, la sphère unité de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une partie compacte et l'application linéaire $[U \mapsto MU]$ est continue. Toute application continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes. En particulier, elle atteint un maximum, donc il existe un vecteur unitaire $U_0$ tel que

$$\|MU\| \leqslant \|MU_0\|$$

pour tout vecteur unitaire $U$.

On a ainsi démontré que le réel positif $N(M)$ était bien défini pour toute matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

❧ Si la matrice M est la matrice nulle, il est clair que ce maximum est nul.

Réciproquement, si ce maximum est nul, alors la matrice M est la matrice nulle. En effet, pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^n$, il existe un vecteur unitaire U tel que

$$X = \|X\| \cdot U$$

donc

$$\|MX\| = \big\|\|X\| \cdot MU\big\| = \|X\|\,\|MU\| \leqslant \|X\|\,N(M) = 0.$$

On en déduit que MX est la colonne nulle pour tout vecteur $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et donc que M est la matrice nulle.

❧ Par homogénéité de $\|\cdot\|$,

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\, X \neq 0, \quad \frac{\|\lambda MX\|}{\|X\|} = |\lambda|\,\frac{\|MX\|}{\|X\|}$$

et comme $|\lambda| \geqslant 0$, on en déduit que

$$N(\lambda M) = |\lambda| N(M).$$

❧ Enfin, quelles que soient les matrices $M_1$ et $M_2$, quel que soit le vecteur unitaire $U \in \mathbb{R}^n$,

$$\big\|(M_1 + M_2)U\big\| \leqslant \|M_1U\| + \|M_2U\| \leqslant N(M_1) + N(M_2)$$

puisque le maximum est un majorant. Le second membre est indépendant du paramètre U, on peut donc passer au maximum et obtenir :

$$N(M_1+M_2) = \max_{\substack{U\in\mathbb{R}^n\\ \|U\|=1}} \big\|(M_1+M_2)U\big\| \leqslant N(M_1)+N(M_2).$$

❧ On a démontré que N était effectivement une norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

*Cette question ne présente aucune difficulté particulière, il faut s'assurer qu'on sait la traiter vite et bien.*

**7.** Par définition de N comme maximum, pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^n$ non nul,

$$\|MX\| \leqslant N(M)\,\|X\|. \tag{$\star\star$}$$

Il est clair que cette inégalité est encore vraie si X est le vecteur nul (les deux membres sont nuls).

Par conséquent, quelles que soient les matrices A et B, quel que soit le vecteur X,

$$\big\|(AB)X\big\| = \big\|A(BX)\big\| \leqslant N(A)\|BX\| \leqslant N(A).N(B)\|X\|.$$

On en déduit que, pour tout vecteur X non nul,

$$\frac{\big\|(AB)X\big\|}{\|X\|} \leqslant N(A)N(B).$$

Le second membre est indépendant du paramètre X et l'existence du maximum a été justifiée à la question précédente. On peut donc passer au maximum, ce qui nous donne bien

$$N(AB) \leqslant N(A)N(B).$$

La norme N est donc sous-multiplicative.

*Surtout pas de zèle ! L'énoncé demande d'admettre que $N_\infty$ est bien une norme, il n'est pas question de se lancer dans la moindre vérification, ce serait une perte de temps.*

❧ Le plus simple consiste à considérer la matrice M dont tous les coefficients sont égaux à 1, ce qui nous donne $N_\infty(M) = 1$.

Le produit $M^2$ est alors égal à $nM$, ce qui nous donne

$$N_\infty(M^2) = nN_\infty(M) = n$$

et comme $n \geqslant 2$, on en déduit que $N_\infty(M^2)$ n'est pas majoré par $[N_\infty(M)]^2$.

*Certaines normes sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ ne sont pas sous-multiplicatives. Il est facile de vérifier que toute norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est équivalente à une norme sous-multiplicative, mais là n'est pas la question...*

**8. a.** On sait que le groupe $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles est un ouvert. Comme la limite M est supposée inversible, le groupe $GL_n(\mathbb{R})$ est donc un voisinage de M et comme la suite $(M_p)_{p\geqslant 1}$ converge vers M, à partir d'un certain rang, tous les termes de cette suite se trouve dans $GL_n(\mathbb{R})$.

*On peut formuler la définition de la convergence d'une suite sans $\varepsilon$ : la suite $(M_p)_{p\geqslant 1}$ converge vers M si, et seulement si, pour tout voisinage V de M, il existe un rang $N_V$ tel que $M_p \in V$ pour tout indice $p \geqslant N_V$.*

**8. b.** Comme M et $M_p$ sont inversibles,

$$\begin{aligned} M_p^{-1}X - M^{-1}X &= M_p^{-1}X - M^{-1}M_pM_p^{-1}X \\ &= (I_n - M^{-1}M_p)(M_p^{-1}X) \\ &= (M^{-1}M - M^{-1}M_p)(M_p^{-1}X) \\ &= M^{-1}(M - M_p)(M_p^{-1}X). \end{aligned}$$

On peut déduire de 0 et notamment de la relation ($\star\star$) que

$$\|M_p^{-1}X - M^{-1}X\| \leqslant N(M^{-1})N(M - M_p)\|M_p^{-1}X\|.$$

❧ D'après l'inégalité triangulaire,

$$\|M_p^{-1}X\| - \|M^{-1}X\| \leqslant N(M^{-1})N(M - M_p)\|M_p^{-1}X\|$$

c'est-à-dire

$$\big(1 - N(M^{-1})N(M - M_p)\big)\|M_p^{-1}X\| \leqslant \|M^{-1}X\|.$$

Comme $N(M - M_p)$ tend vers 0 lorsque p tend vers l'infini, on peut supposer que l'entier p est choisi assez grand pour que

$$N(M^{-1})N(M - M_p) \leqslant \frac{1}{2}. \tag{✻}$$

Dans ces conditions, pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^n$,

$$\|M_p^{-1}X\| \leqslant 2\|M^{-1}X\|.$$

*Dans (✻), on peut remplacer $1/2$ par tout réel $0 < \alpha < 1$ : on trouvera dans ce cas*

$$\|M_p^{-1}X\| \leqslant \frac{1}{1-\alpha}\|M^{-1}X\|$$

*pour tout indice p "assez grand". Le plus important ici est que le rang $p_0$ ne dépende pas du vecteur X choisi, ce qui se voit clairement sur (✻).*

**8. c.** On déduit de la question précédente qu'il existe une constante réelle $C > 0$ et un rang $p_0$ tels que

$$\|M_p^{-1}X - M^{-1}X\| \leqslant C.N(M^{-1})N(M - M_p)\|M^{-1}X\|$$

pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ et tout indice $p \geqslant p_0$. On déduit alors de $(\star\star)$ que, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ non nul et tout indice $p \geqslant p_0$,

$$\frac{\|M_p^{-1}X - M^{-1}X\|}{\|X\|} \leqslant C.N(M^{-1})N(M - M_p).N(M^{-1}).$$

Le second membre est indépendant du vecteur X, on peut donc passer au maximum (dont l'existence a déjà été prouvée) et obtenir

$$\forall\, p \geqslant p_0, \quad N(M_p^{-1} - M^{-1}) \leqslant C.N(M^{-1})^2.N(M - M_p).$$

On déduit alors du théorème d'encadrement que

$$\lim_{p \to +\infty} N(M_p^{-1} - M^{-1}) = 0.$$

**9.** D'après le cours, l'application $[M \mapsto M^{-1}]$ est continue sur l'ouvert $GL_n(\mathbb{R})$. La conclusion de la question précédente ne dit rien de plus.

En revanche, on a trouvé un ordre de grandeur de $N(M_p^{-1} - M^{-1})$, ce qui ne figure pas dans le cours.

> *Cet ordre de grandeur peut se déduire de l'Inégalité des accroissements finis, puisqu'on peut démontrer que l'application $[M \mapsto M^{-1}]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $GL_n(\mathbb{R})$.*

## Partie D. Discrétisation

**10.** Par définition, la solution u est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I (au moins) et, d'après l'équation différentielle (E),

$$\forall\, x \in I, \quad u''(x) = p(x)u(x) - f(x).$$

Si p et f sont également de classe $\mathscr{C}^2$ sur I, alors $u''$ est de classe $\mathscr{C}^2$ et par conséquent u est de classe $\mathscr{C}^4$.

**11. a.** Pour toute fonction f de classe $\mathscr{C}^4$ sur le segment $[a, b]$, l'inégalité de Taylor-Lagrange nous dit que, quels que soient x et y dans $[a, b]$,

$$\left|f(y) - f(x) - \delta f'(x) - \frac{\delta^2}{2}f''(x) - \frac{\delta^3}{6}f^{(3)}(x)\right| \leqslant \frac{K\delta^4}{24}$$

avec

$$\delta = y - x \quad \text{et} \quad K = \sup_{t \in [x \leftrightarrow y]} \left|f^{(4)}(t)\right| \leqslant \sup_{t \in [a,b]} \left|f^{(4)}(t)\right|.$$

On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange en prenant $x = x_k$ et $y = x_{k+1}$, ce qui nous donne $\delta = h$ :

$$\left|u(x_{k+1}) - u(x_k) - hu'(x_k) - \frac{h^2}{2}u''(x_k) - \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x_k)\right| \leqslant \frac{Mh^4}{24}$$

puisque $[x_k, x_{k+1}] \subset [0, 1]$.

On recommence avec $x = x_k$ et $y = x_{k-1}$, et donc cette fois $\delta = -h$, d'où quelques changements de signe :

$$\left|u(x_{k-1}) - u(x_k) + hu'(x_k) - \frac{h^2}{2}u''(x_k) + \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x_k)\right| \leqslant \frac{Mh^4}{24}$$

puisque $[x_{k-1}, x_k] \subset [0, 1]$.

En sommant ces deux encadrements, on déduit de l'inégalité triangulaire que

$$\left|u(x_{k+1}) - 2u(x_k) + u(x_{k-1}) - h^2u''(x_k)\right| \leqslant \frac{Mh^4}{12}.$$

L'encadrement souhaité s'en déduit en divisant par $h^2$ (qui est strictement positif) et en changeant de signe dans la valeur absolue.

**11. b.** La fonction u trouvée au 0 est polynomiale de degré 2, donc sa dérivée quatrième est nulle : $M = 0$ et sa dérivée seconde est constamment égale à $-1$.

L'encadrement précédent devient donc

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \frac{-u(x_{k-1}) + 2u(x_k) - u(x_{k+1})}{h^2} = 1.$$

**12.** Puisque $u_0 = u_{n+1} = 0$, la propriété (D) devient

$$\frac{2u_1 - u_2}{h^2} + p_1u_1 = f_1$$

pour $k = 1$ et

$$\frac{-u_{n-1} + 2u_n}{h^2} + p_nu_n = f_n$$

pour $k = n$. Compte-tenu des définitions de la matrice H et des colonnes F et $\widehat{U}$, la matrice

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

convient.

**13.** Soit $X \in \mathbb{R}^n$, un vecteur du noyau de M. Le vecteur MX est nul, donc MX et $-MX = M(-X)$ sont tous les deux des vecteurs positifs. D'après l'hypothèse sur la matrice M, les vecteurs X et $(-X)$ sont positifs, ce qui prouve que X est le vecteur nul.

Le noyau de M est donc réduit au vecteur nul. Comme M est une matrice carrée, on en déduit que M est inversible.

❧ Notons $E_1, \ldots, E_n$, les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, notons $C_k = M^{-1}E_k$.

On a donc $MC_k = E_k$ et comme le vecteur $E_k$ est positif, on déduit de l'hypothèse faite sur M que chaque vecteur $C_k$ est lui aussi positif. Mais, par construction, $C_k = M^{-1}E_k$ représente la k-ième colonne de $M^{-1}$.

On a ainsi démontré que tous les coefficients de $M^{-1}$ sont des réels positifs.

**14.** Suivons l'indication et supposons que l'une des coordonnées au moins du vecteur X soit strictement négative.

❧ Il n'y a qu'un nombre fini de coordonnées, donc l'une d'elles est minimale et, selon notre hypothèse, strictement négative. De plus, on a posé $x_0 = x_{n+1} = 0$, donc il existe au moins un indice $1 \leqslant k \leqslant n$ tel que

$$0 > x_k = \min_{0 \leqslant i \leqslant n+1} x_i.$$

❧ Une fois de plus, il n'y a qu'un nombre fini d'indices k vérifiant cette propriété, nous considérerons donc que $k_0$ est le plus petit d'entre eux. De la sorte,

$$\begin{cases} \forall\, 0 \leqslant i < k_0, & x_{k_0} < x_i \\ \forall\, k_0 < i \leqslant n+1, & x_{k_0} \leqslant x_i. \end{cases} \tag{❉}$$

❧ On déduit alors de (D) que, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\frac{-x_{k-1} + 2x_k - x_{k+1}}{h^2} + p_k x_k \geqslant 0$$

c'est-à-dire

$$(2 + p_k h^2) x_k \geqslant x_{k-1} + x_{k+1}.$$

Pour $k = k_0$ en particulier, on déduit de (❉) que

$$(2 + p_{k_0} h^2) x_{k_0} \geqslant x_{k_0-1} + x_{k_0+1} > 2x_{k_0},$$

ce qui est impossible car $p_{k_0} h^2 \geqslant 0$ et $x_{k_0} < 0$.

On a ainsi démontré par l'absurde que le vecteur X était positif.

❧ Nous pouvons donc appliquer ce que nous avons démontré au 0 : la matrice $A + H$ est inversible et son inverse est une matrice positive.

❧ La seule hypothèse qui porte sur la matrice H est qu'elle soit positive. On peut donc en particulier considérer le cas $H = 0_n$, ce qui nous montre que la matrice A est elle aussi inversible et que son inverse est une matrice positive.

> *Le problème discret* (D) *admet donc une, et une seule, solution :*
> $$\widehat{U} = (A+H)^{-1}F.$$

## Partie E. Qualité de l'approximation

**15. a.** On a démontré au 0 que

$$N(Q) = \max_{\|X\|=1} \|QX\|.$$

❧ Il est clair que $\|F_0\| = 1$, donc

$$N(Q) \geqslant \|QF_0\| = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} Q_{k,j}$$

puisque tous les coefficients de $F_0$ sont égaux à 1 et que les coefficients de Q sont tous positifs.

❧ Réciproquement, considérons un vecteur $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|X\| = 1$. D'après les règles du produit matriciel, les coordonnées de QX sont

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \qquad y_k = \sum_{j=1}^{n} Q_{k,j} x_j.$$

Comme la matrice Q est positive et que $\|X\| = 1$, on déduit de l'inégalité triangulaire que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad |y_k| \leqslant \sum_{j=1}^{n} Q_{k,j}|x_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n} Q_{k,j}.$$

On en déduit que

$$\|QX\| \overset{\text{déf.}}{=} \max_{1\leqslant k\leqslant n} |y_k| \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} Q_{k,j} = \|QF_0\|$$

et donc que

$$N(Q) = \max_{\|X\|=1} \|QX\| \leqslant \|QF_0\|.$$

❧ Par double inégalité, on a démontré que

$$N(Q) = \|QF_0\|$$

pour toute matrice positive $Q \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

**15. b.** Le vecteur $F_0$ est positif et, d'après 0, les matrices $(A+H)^{-1}$ et $A^{-1}$ sont positives. D'après les règles du produit matriciel, les deux vecteurs $V = (A+H)^{-1}F_0$ et $W = A^{-1}F_0$ sont donc positifs.

❧ D'autre part,

$$\begin{aligned} A(W - V) &= F_0 - A(A+H)^{-1}F_0 \\ &= F_0 + (A + H - H)(A+H)^{-1}F_0 \\ &= F_0 - F_0 + HV = HV. \end{aligned}$$

Or le vecteur V est positif et la matrice H est positive, donc le produit

$$A(W - V) = HV$$

est bien positif.

**15. c.** D'après 0 et la question précédente, le vecteur

$$W - V = A^{-1}.\big[A(W - V)\big]$$

est positif (produit de la matrice positive $A^{-1}$ par une colonne positive). Autrement dit,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \qquad 0 \leqslant v_k \leqslant w_k$$

puisque le vecteur V est positif 0. On en déduit que

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} v_k = \|V\| \leqslant \|W\| = \max_{1\leqslant k\leqslant n} w_k.$$

❧ Soit $X \in \mathbb{R}^n$. D'après (⋆⋆) 0,

$$\big\|(A+H)^{-1}X\big\| \leqslant N\big((A+H)^{-1}\big)\, \|X\|.$$

Comme $(A+H)^{-1}$ est une matrice positive 0, on déduit de 0 que

$$N\big((A+H)^{-1}\big) = \big\|(A+H)^{-1}F_0\big\| = \|V\|$$

et, d'après ce qui précède,

$$\forall\, X \in \mathbb{R}^n, \quad \big\|(A+H)^{-1}X\big\| \leqslant \|W\|\, \|X\|.$$

> *L'intérêt de cette estimation est de majorer une expression qui dépend de la fonction* p *(via le vecteur* H*) par une quantité qui n'en dépend pas.*

**16. a.** On substitue $ak^2$ à $y_k$ dans la relation de récurrence et on constate rapidement que la suite de terme général

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad y_k = \frac{-k^2}{2}$$

vérifie la relation de récurrence considérée.

> *On dispose d'une solution particulière de cette relation de récurrence linéaire. D'après le principe de superposition, les autres solutions s'en déduisent en ajoutant les solutions de l'équation homogène. L'équation caractéristique est $(\lambda-1)^2 = 0$, donc la solution générale de la relation de récurrence est de la forme*
>
> $$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad y_k = a + bk - \frac{k^2}{2}.$$

**16. b.** Par définition, le vecteur $W = (w_1, \dots, w_n)$ est la solution de l'équation

$$AW = F_0.$$

Ses coordonnées vérifient donc

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \frac{-w_{k-1} + 2w_k - w_{k+1}}{h^2} = 1$$

si on prend soin d'imposer $w_0 = w_n = 0$ (pour que la relation de récurrence soit vérifiée aussi pour $k = 1$ et $k = n$).

On déduit de la question précédente les valeurs des constantes $a$ et $b$ qui sont compatibles avec la contrainte $w_0 = w_n = 0$ :

$$a = 0, \qquad b = \frac{n+1}{2}$$

d'où

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad w_k = h^2 \cdot \frac{k(n+1-k)}{2} = \frac{k(n+1-k)}{2(n+1)^2}.$$

> *Avec beaucoup de flair, on pouvait éviter ces calculs, il "suffisait" de remarquer qu'on connaissait déjà l'expression des $w_k$ depuis le 0 :*
>
> $$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n+1, \quad w_k = u(x_k) = \frac{kh(1-kh)}{2}.$$

❧ L'expression $y(1-y)$ est un trinôme du second degré, elle est donc extrémale au milieu des racines (c'est-à-dire pour $y = 1/2$), donc

$$\max_{y \in \mathbb{R}} y(1-y) = \frac{1}{4}.$$

Comme $W$ est un vecteur positif 0,

$$\|W\| = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} w_k \leqslant \frac{1}{8}.$$

**17. a.** Par définition du vecteur $F$ et du problème (P),

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad f_k = f(x_k) = -u''(x_k) + p_k u(x_k)$$

tandis que, par définition de la matrice A 0, les coefficients de la matrice $(A+H)U$ sont

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \frac{-u(x_{k-1}) + 2u(x_k) - u(x_{k+1})}{h^2} + p_k u(x_k).$$

Les coefficients du vecteur $Z$ sont donc

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad u''(x_k) - \frac{u(x_{k-1}) - 2u(x_k) + u(x_{k+1})}{h^2}$$

et on déduit alors de 0 que

$$\|Z\| \leqslant \frac{Mh^2}{12}.$$

**17. b.** Par construction du problème (D),

$$(A+H)\widehat{U} = F$$

donc

$$Z = (A+H)(U - \widehat{U})$$

et d'après 0,

$$\|U - \widehat{U}\| = \left\|(A+H)^{-1}Z\right\| \leqslant \|W\|\,\|Z\|.$$

On déduit alors de la question précédente et de 0 que

$$\|U - \widehat{U}\| \leqslant \frac{Mh^2}{96}.$$

**17. c.** En admettant qu'on sache calculer le vecteur $\widehat{U}$, solution du problème discret, avec une précision suffisante (ce qui est une hypothèse assez forte !), l'estimation précédente donne un ordre de grandeur de l'erreur commise en assimilant l'échantillon $\widehat{U}$ des valeurs calculées à l'échantillon $U$ des valeurs exactes.

Le facteur $h^2$ est très intéressant, car il suggère que la qualité de l'approximation varie en $\mathcal{O}(h^2)$ où $h$ est le pas de la discrétisation : en divisant le pas par 10, on gagne un facteur 100 en précision.

> *En pratique, on ne gagne pas autant en précision à cause des inévitables erreurs d'arrondi.*
> *La factorisation LU d'une matrice tridiagonale permet de calculer $\widehat{U}$ en $\mathcal{O}(n)$ opérations (algorithme de Thomas). En divisant $h$ par 10, on multiplie $n$ par 10 et on effectue environ 10 fois plus de calculs.*

En revanche, le facteur $M$ est assez encombrant, puisqu'il dépend de la solution $u$ du problème (P) étudié !

La relation (†) ne nous informe vraiment que sur la qualité *relative* de l'approximation (= que gagne-t-on lorsqu'on passe d'un pas temporel à un pas temporel plus petit ?), mais ne nous permet pas de prévoir comment elle varie en fonction des données $f$ et $p$.

La qualité *absolue* de l'approximation reste donc assez incertaine.