Sommes

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite réelle ou complexe. On pose

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

1.1

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n - S_{n-1} = u_n.$$

1.2

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1}.$$

1.3

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{2n+1} - S_{2n-1} = u_{2n+1} + u_{2n}.$$

1.4

$$\forall\, (n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k.$$

2. **Sommation télescopique**
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite réelle ou complexe.

$$\forall\, p \geqslant n, \quad \sum_{k=n}^{p} (x_{k+1} - x_k) = x_{p+1} - x_n.$$

3. **Série géométrique**
3.1

$$\forall\, m \leqslant n, \quad \sum_{k=m}^{n} 1^k = n - m + 1.$$

3.2 Si q est un complexe différent de 1, alors

$$\forall\, m \leqslant n, \quad \sum_{k=m}^{n} q^k = q^m \frac{1 - q^{n-m+1}}{1-q}.$$

3.3 Dans toute algèbre associative unitaire,

$$(q-1) \times \Big(\sum_{k=m}^{n} q^k\Big) = \Big(\sum_{k=m}^{n} q^k\Big) \times (q-1) = q^{n+1} - q^m.$$

4. **Séries et dérivation discrète**
L'application Δ définie par

$$\Delta(u)_0 = u_0 \quad \text{et} \quad \forall\, n \geqslant 1, \quad \Delta(u)_n = u_n - u_{n-1}$$

est un endomorphisme de l'espace $\ell^0(\mathbb{C})$ des suites complexes.
L'application σ définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sigma(u)_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

est un endomorphisme de $\ell^0(\mathbb{C})$.

I

Séries numériques

5. ✍ *Les séries dont le terme général u_n appartient à l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}$ ou à $E = \mathbb{C}$ sont dites* **séries numériques**.

6. ➙ **Convergence des séries télescopiques**
La série $\sum(x_{n+1} - x_n)$ est convergente si, et seulement si, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Dans ce cas,

$$\forall\, n_0, \quad \sum_{n=n_0}^{+\infty} (x_{n+1} - x_n) = \Big(\lim_{n\to+\infty} x_n\Big) - x_{n_0}.$$

I.1 Convergence absolue

7.1 ✍ *La série $\sum u_n$ est* **absolument convergente** *lorsque la série de terme général positif $\sum \|u_n\|$ est convergente.*

8. ➙ *Dans un espace vectoriel de dimension finie, toute série absolument convergente est une série convergente.*

9. ➙ **Cas des séries numériques**
Soit $\sum u_n$, une série réelle dont le terme général est de signe constant (à partir d'un certain rang).
Une telle série est convergente si, et seulement si, elle est absolument convergente.

Séries semi-convergentes

10. ✍ *Une série $\sum u_n$ est* **semi-convergente** *lorsqu'elle est convergente sans être absolument convergente.*

11. ➙ *La somme d'une série semi-convergente et d'une série absolument convergente est semi-convergente.*

Théorème de comparaison

12. Les différents théorèmes de comparaison, qui relient tous l'ordre de grandeur du terme général u_n à celui du terme général d'une série connue $\sum v_n$, servent à vérifier si la série $\sum u_n$ est *absolument* convergente.
12.1 Il est donc *impossible* d'appliquer une version quelconque du Théorème de comparaison pour justifier la convergence d'une série *semi-convergente*.
12.2 **Méthode**
Il suffit à chaque fois d'étudier *l'ordre de grandeur du terme général* pour conclure.

13. La relation $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ est en fait une comparaison entre les quantités positives $\|u_n\|$ et $\|v_n\|$:

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n) \iff \|u_n\| \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(\|v_n\|).$$

En pratique, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de *réels positifs*.

14. **Condition suffisante de convergence absolue**
14.1 ➙ *Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et si $\sum v_n$ est absolument convergente, alors $\sum u_n$ est absolument convergente.*
14.2 Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si $\sum v_n$ est convergente, alors $\sum u_n$ est convergente.
14.3 Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente et si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors la série $\sum u_n v_n$ est absolument convergente.
14.4 Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors la série $\sum u_n^2$ est absolument convergente.

15. ➙ **Condition nécessaire de convergence absolue**
Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et si $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente, alors $\sum v_n$ n'est pas absolument convergente.

16. Critère de convergence absolue
En pratique, la comparaison par équivalent n'a d'utilité que pour les séries numériques.
16.1 ➞ *Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ est absolument convergente si, et seulement si, $\sum v_n$ est absolument convergente.*
16.2 ➞ *On suppose que $u_n \sim v_n$ et que v_n est de signe constant à partir d'un certain rang. Alors les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

Règle de Riemann

17. On applique ici les différentes versions du Théorème de comparaison en prenant une série de Riemann (convergente ou divergente) comme série de référence.
18. ✍ *La fonction ζ de Riemann est définie sur $]1, +\infty[$ par*

$$\forall\, x > 1, \qquad \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

19. ➞ *S'il existe $\alpha > 1$ tel que*

$$u_n = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^\alpha}\Big),$$

alors $\sum u_n$ converge absolument.
20. ➞ *S'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que*

$$\frac{1}{n^\alpha} = \mathcal{O}(\|u_n\|),$$

alors $\sum \|u_n\|$ diverge et la série $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente.

21. ➞ *S'il existe $\ell \neq 0$ et un réel α tels que*

$$u_n \sim \frac{\ell}{n^\alpha},$$

alors
— *ou bien $\alpha > 1$ et la série $\sum u_n$ converge absolument ;*
— *ou bien $\alpha \leqslant 1$ et la série $\sum u_n$ est divergente.*

I.2 Règle de D'Alembert

22. Comparaison logarithmique
La règle de D'Alembert donne une condition simple pour comparer une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à une suite géométrique. On la formule comme une condition suffisante pour que la série $\sum u_n$ soit absolument convergente ou pour que cette série soit grossièrement divergente.
22.1 Si u_n et v_n ne s'annulent pas et si

$$\frac{\|u_{n+1}\|}{\|u_n\|} \leqslant \frac{\|v_{n+1}\|}{\|v_n\|}$$

à partir d'un certain rang, alors $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.
22.2 S'il existe un réel q et un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall\, n \geqslant n_0, \qquad 0 \leqslant \frac{\|u_{n+1}\|}{\|u_n\|} \leqslant q < 1,$$

alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(q^n)$$

et la série $\sum u_n$ est absolument convergente.
22.3 S'il existe un réel q et un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall\, n \geqslant n_0, \qquad 1 < q \leqslant \frac{\|u_{n+1}\|}{\|u_n\|},$$

alors

$$q^n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(u_n)$$

et la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

23. ➞ *On suppose que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\|u_{n+1}\|}{\|u_n\|} = \ell.$$

23.1 Condition suffisante de convergence absolue
Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente.
23.2 Condition suffisante de divergence grossière
Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente.
23.3 *Lorsque* $\ell = 1$, on doit s'abstenir de conclure. →**[27]**
24. ➞ **Séries de Poisson**
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum z^n/n!$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z).$$

25. ➞ **Exponentielle de matrice**
Quelle que soit la matrice $A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$, la série de matrices

$$\sum \frac{1}{n!} \cdot A^n$$

est absolument convergente. La somme de cette série est une matrice carrée, notée $\exp(A)$.

Défauts de la règle de D'Alembert

26. Pour tout entier n *pair*, on pose $u_n = 2^{-n}$ et pour tout entier n *impair*, on pose $u_n = 3^{-n}$.
Alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente, mais la règle de D'Alembert ne permet pas de le démontrer.
27. Si $\sum u_n$ est une série de Riemann, convergente ou divergente, alors le quotient u_{n+1}/u_n tend vers 1 : la règle de D'Alembert ne s'applique à aucune série de Riemann.
La règle de Riemann [**17**] est donc plus souvent utilisable que la règle de D'Alembert — ce qui ne signifie pas qu'elle soit toujours plus pratique à utiliser.

I.3 Applications de la convergence absolue

28. Constante d'Euler
Les ***nombres harmoniques***

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

sont les sommes partielles de la ***série harmonique***.
28.1 La série

$$\sum \Big[\frac{1}{n} - \ell\mathrm{n}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)\Big]$$

est absolument convergente.
28.2 Il existe une constante γ, dite ***constante d'Euler***, telle que

$$H_n = \ell\mathrm{n}\, n + \gamma + o(1).$$

29. Formule de Stirling
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$w_n = \ell\mathrm{n}\, \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}.$$

29.1 La série $\sum(w_{n+1} - w_n)$ est absolument convergente.
29.2 ➞ *Il existe une constante $K > 0$ telle que*

$$n! \sim K n^n e^{-n} \sqrt{n}.$$

La constante K est égale à $\sqrt{2\pi}$. →**[33]**
29.3

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

30. Contractions d'un compact

30.1 ✍ *Une application est* **contractante** *lorsqu'elle est lipschitzienne et admet une constante de Lipschitz $k < 1$.*

30.2 Soient E, un espace vectoriel de dimension finie ; K, une partie compacte de E ; $f : K \to K$, une application contractante et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite définie par $u_0 \in K$ et la relation

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Alors la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est absolument convergente.

30.3 L'application f admet un unique point fixe, qui est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, quelle que soit la valeur initiale u_0 choisie.

Entraînement

31. Questions pour réfléchir

1. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série $\sum(x_{n+1} - x_n)$ sont de même nature. On peut donc étudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au moyen de la série $\sum(x_{n+1} - x_n)$.
2. Nature de la série $\sum n^{(-1)^n}$.
3. Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et si $\sum u_n$ diverge grossièrement, alors $\sum v_n$ diverge grossièrement.
4. Une série de Riemann est convergente si, et seulement si, elle est absolument convergente.
5. Une série géométrique est convergente si, et seulement si, elle est absolument convergente.
6. Une série géométrique est divergente si, et seulement si, elle est grossièrement divergente.
7. Soit $\sum u_n$, une série réelle.

7.a Si $\sum u_n$ est semi-convergente, alors les deux séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ divergent.

7.b Si $\sum u_n$ est semi-convergente, que dire du signe de u_n ?

8. La somme de deux séries semi-convergentes est-elle encore une série semi-convergente ?
9. Pour toute suite d'entiers $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$,

$$u_n! \sim \sqrt{2\pi} u_n^{u_n} e^{-u_n} \sqrt{u_n}.$$

32. L'espace $\mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$ est muni de la norme produit $\|\cdot\|_\infty$. Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_d(\mathbb{K})$ et pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\|A^n\|_\infty \leqslant d^{n-1}\|A\|_\infty^n.$$

33. Intégrales de Wallis

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\,\mathrm{d}t.$$

1. La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_{2n} = \frac{\pi}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n} \quad \text{et} \quad W_{2n+1} = \frac{2^{2n}}{2n+1}\binom{2n}{n}^{-1}$$

et, lorsque n tend vers $+\infty$, →[29.3]

$$\binom{2n}{n}^2 \sim \frac{2^{4n}}{n\pi}.$$

3.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \,\ell\mathrm{n}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) = \ell\mathrm{n}\,\frac{2}{\pi}$$

34. Calculs explicites

34.1

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}\cos n\pi = {}^2\!/_3$$

34.2

$$\forall\, x > 0, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

34.3 Soit $x \neq 0 \pmod{2\pi}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \sin kx = \frac{\sin(\frac{nx}{2})\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \cos kx = \frac{\cos(\frac{nx}{2})\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}$$

2. Pour $x = 0$, on retrouve la valeur de ces sommes partielles par passage à la limite.
3. Si la série de terme général $u_n = \sin nx$ est convergente, alors u_n tend vers 0 et comme

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n \cos x + \cos nx \sin x,$$

alors $\sin x = 0$.

4. Pour tout $x \neq 0 \pmod{\pi}$, les séries $\sum \sin nx$ et $\sum \cos nx$ sont grossièrement divergentes quoique leurs sommes partielles restent bornées.

35. Comparaison à une série géométrique

Étudier la nature des séries suivantes en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

$$\sum \frac{\lambda^n}{1+\lambda^{2n}} \qquad \sum \frac{\lambda^{2n}}{1+\lambda^{2n}} \qquad \sum \frac{1}{1+\lambda^{2n}}$$

36. Calculs de sommes

Il faut parfois calculer une décomposition en éléments simples pour faire apparaître une somme télescopique.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n+6}{n(n+1)(n+2)} = 4 \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^4+n^2+1} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2} \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \ell\mathrm{n}\Big(1 - \frac{1}{n^2}\Big) = -\,\ell\mathrm{n}\,2$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4} \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \ell\mathrm{n}\Big(1 + \frac{(-1)^n}{n}\Big) = 0$$

37. Fonction ζ de Riemann

1. La fonction ζ **[18]** est positive et décroissante sur $]1, +\infty[$.
2. En admettant que $\zeta(2) = {}^{\pi^2}\!/_6$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{3} - 3, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{-\pi^2}{12}.$$

Pouvait-on prévoir le signe de la dernière somme ?

38. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = {}^{x^n}\!/_n$.

1. La série $\sum u_n(x)$ converge si, et seulement si, $-1 \leqslant x < 1$.
2. Il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in [-1, 0], \quad \Big|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x)\Big| \leqslant \alpha_n.$$

3. Pour tout $n \geqslant 1$, le reste $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x)$ est défini sur $[0, 1[$ mais n'est pas borné sur cet intervalle.

39. Soit $\sum a_n$, une série absolument convergente.
39.1 La série $\sum a_n x^n$ converge pour tout $|x| \leqslant 1$.
39.2 La série $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.
40. Développements asymptotiques
Un développement asymptotique du terme général permet parfois de décomposer une série en somme de séries dont la nature est connue.
40.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \ell n\, n + a\, \ell n(n+1) + b\, \ell n(n+2).$$

La série $\sum (-1)^n u_n$ est absolument convergente si, et seulement si, $a = -2$ et $b = 1$. Dans ce cas, sa somme est égale à $-\ell n\, 2$.
40.2 Pour quelles valeurs de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ la série de terme général

$$u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$$

est-elle convergente ? Quelle est sa somme ?
40.3 Nature des séries

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}} \quad \text{et} \quad \sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$$

en fonction du réel α.
41. Calculs de sommes [28]
41.1 Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(n+k)} = \frac{H_n}{n}.$$

41.2

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ell n\, 2$$

41.3

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)} = 2\,\ell n\, 2 \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = 3 - 4\,\ell n\, 2$$

41.4 Pour tout entier $p \geqslant 1$,

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq p}}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - p^2} = \frac{3}{4p^2}.$$

42. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = (2 - \sqrt{3})^n \qquad \text{et} \qquad v_n = (2 + \sqrt{3})^n.$$

Comme $u_n + v_n$ est un entier pair pour tout $n \in \mathbb{N}$, les deux séries $\sum \sin \pi u_n$ et $\sum \sin \pi v_n$ sont absolument convergentes.
43. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$u_n = \frac{1}{3^n n!} \prod_{k=1}^{n} (3k-2) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n^{3/4}}.$$

On peut démontrer que la série $\sum u_n$ diverge de deux manières.
43.1 À partir d'un certain rang,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

donc il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\exists\, n_0 \geqslant 1,\ \forall\, n \geqslant n_0, \quad u_n \geqslant K v_n.$$

43.2 Comme la série

$$\sum \Big(\frac{2}{3}\, \ell n\, \frac{n+1}{n} + \ell n\, \frac{u_{n+1}}{u_n} \Big)$$

est absolument convergente, il existe une constante $A > 0$ telle que

$$u_n \sim \frac{A}{n^{2/3}}.$$

44. Nature des séries suivantes.

$$\sum \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch} 2n} \qquad \sum \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\sum \Big(\frac{n}{n+1} \Big)^{n^2} \qquad \sum \sin\Big(n\pi + \frac{\pi}{n} \Big)$$

$$\sum \frac{1}{n \cos^n \theta} \qquad \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

$$\sum \ell n\Big(1 + \frac{(-1)^n}{n+1} \Big) \qquad \sum \cos\big(\pi\sqrt{n^2+n+1} \big)$$

$$\sum \sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n} \qquad \sum \frac{(-1)^n}{\ell n\big(n + (-1)^n \big)}$$

$$\sum \frac{(-1)^n}{\ell n\, n + (-1)^n} \qquad \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$$

45. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_0^1 \frac{t^n e^t}{1 + e^t}\, \mathrm{d}t.$$

45.1 Il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant K \int_0^1 t^n\, \mathrm{d}t$$

mais on ne peut pas déduire la nature de la série $\sum u_n$ de la relation $u_n = \mathcal{O}(1/n)$.
45.2 La suite de terme général $(n+1)u_n$ tend vers $e/_{1+e}$.
45.3 La série $\sum (-1)^n u_n$ est semi-convergente.
45.4 Soit $x \in \mathbb{R}$. La série $\sum u_n x^n$ converge si, et seulement si, $x \in [-1, 1[$.

II

Intégrales sur $I = [a, +\infty[$

46. On suppose connu le concept d'***intégrale*** pour une fonction continue par morceaux sur un segment.
46.1 On s'intéresse ici à une première généralisation de ce concept en l'étendant aux fonctions continues par morceaux sur un intervalle semi-ouvert de la forme $[a, +\infty[$.
Le maniement de ces intégrales est très semblable à celui des séries absolument convergentes.
46.2 On étudiera plus tard le cas des fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque, qui est très semblable à celui des familles sommables.
46.3 On se limite aux fonctions à valeurs réelles ou complexes : le symbole $\mathbb{K}$ désignera tantôt $\mathbb{R}$, tantôt $\mathbb{C}$. Ce qui suit peut être étendu facilement aux fonctions à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie.

II.1 Convergence d'une intégrale généralisée

47. Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{K}$, une fonction continue par morceaux.
47.1 ✍ *L'***intégrale généralisée de** f **sur** $[a, +\infty[$ *est dite* **convergente** *lorsque la fonction*

$$F = \left[x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

tend vers une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Dans ce cas, cette limite est notée

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

47.2 Lorsque la fonction F tend vers l'infini ou n'a pas de limite, on dit que l'***intégrale généralisée de f est divergente***.
Cette expression signifie en fait que l'intégrale de f sur l'intervalle $[a, +\infty[$ n'existe pas.
47.3 Si f est à valeurs *positives*, alors la fonction F est croissante.
L'intégrale généralisée de f sur $[a, +\infty[$ est donc convergente si, et seulement si, la fonction F est majorée.
On peut noter, *dans ce cas particulier*,

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$$

le fait que l'intégrale généralisée de f soit divergente.
47.4 ➙ **Théorème de comparaison**
Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $I = [a, +\infty[$ telles que

$$\forall\, t \in [a, +\infty[, \qquad 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$$

et si l'intégrale généralisée de g sur l'intervalle I est convergente, alors l'intégrale généralisée de f sur I est convergente et

$$0 \leqslant \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

48. **Exemples fondamentaux**
Les exemples les plus utiles sont des fonctions positives. →[50.4]
48.1 L'***intégrale de Riemann*** $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est convergente si, et seulement si, le réel α est strictement supérieur à 1. Dans ce cas,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

48.2 L'***intégrale exponentielle*** $\int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t$ est convergente si, et seulement si, le réel a est strictement positif. Dans ce cas,

$$\int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}.$$

49. Supposons que l'intégrale généralisée de f sur $[a, +\infty[$ soit convergente.
49.1 Pour tout $x \geqslant a$, l'intégrale généralisée de f sur $[x, +\infty[$ est aussi convergente et

$$\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

49.2 Par analogie avec les séries, l'intégrale (usuelle)

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est appelée ***intégrale partielle*** et l'intégrale généralisée

$$R(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est appelée ***reste***.
49.3 Comme pour les séries convergentes, le reste tend vers 0 au voisinage de $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

49.4 ➙ **Généralisation du Théorème fondamental**
Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{K}$, une fonction continue. Si l'intégrale généralisée de f sur $[a, +\infty[$ est convergente, alors le reste

$$\left[x \mapsto \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ dont la dérivée est égale à $-f$.
49.5 Le reste R est la primitive de $-f$ qui tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

II.2 Fonctions intégrables

50. On considère une fonction $f : [a, +\infty[\to \mathbb{K}$, continue par morceaux.
50.1 La fonction $|f|$ est une fonction continue par morceaux et positive.
50.2 Par analogie avec les séries, on dit que l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est ***absolument convergente*** lorsque l'intégrale généralisée de la fonction positive $|f|$ est convergente.
50.3 ✍ *Une fonction continue par morceaux $f : [a, +\infty[\to \mathbb{K}$ est dite* **intégrable sur l'intervalle** $I = [a, +\infty[$ *lorsque l'intégrale généralisée*

$$\int_a^{+\infty} \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t$$

est convergente.
50.4 Une fonction de signe constant f est intégrable sur l'intervalle $[a, +\infty[$ si, et seulement si, l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est convergente. →[48]
51. ➙ **Théorème de comparaison (version globale)**
Soit f, une fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$. S'il existe une fonction intégrable g telle que

$$\forall\, t \in [a, +\infty[, \qquad \big|f(t)\big| \leqslant g(t),$$

alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$.
52. ➙ *Si la fonction f est intégrable sur l'intervalle $[a, +\infty[$, alors l'intégrale généralisée de f sur $[a, +\infty[$ est convergente et*

$$\left|\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^{+\infty} \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t.$$

Fonctions localement intégrables

53. On considère une fonction f continue par morceaux sur l'intervalle $[a, +\infty[$.

53.1 Une propriété est vraie ***au voisinage de*** $+\infty$ lorsqu'elle est vraie sur un intervalle de la forme $[\alpha, +\infty[$ (pour un réel α convenablement choisi).

53.2 ✍ *La fonction f est* **intégrable au voisinage de** $+\infty$ *si, et seulement si, il existe un intervalle $[\alpha, +\infty[$ sur lequel f est intégrable.*

53.3 ➞ *Si f est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et intégrable au voisinage de $+\infty$, alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$.*

54. **Théorème de comparaison (versions locales)**
La version locale du Théorème de comparaison est plus simple à appliquer que la version globale **[51]**.

54.1 ➞ *Soit f, une fonction continue par morceaux sur $I = [a, +\infty[$. S'il existe une fonction g, intégrable au voisinage de $+\infty$, telle que*

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}\big(g(t)\big),$$

alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

54.2 ➞ *Soit f, une fonction continue par morceaux sur $I = [a, +\infty[$. Si*

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t),$$

alors : f est intégrable sur $[a, +\infty[$ si, et seulement si, g est intégrable au voisinage de $+\infty$.

55. **Exemples**

55.1 La fonction $[t \mapsto \frac{1}{1+t^2}]$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.$$

55.2 La fonction $[t \mapsto \exp(-\sqrt{t})]$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

55.3 La fonction $[t \mapsto \ell n(1+e^{-t})]$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

55.4 Pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction $[t \mapsto e^{-t^n}]$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Intégrales semi-convergentes

56. ✍ *Si l'intégrale généralisée de f est convergente bien que la fonction f ne soit pas intégrable, on dit que l'intégrale généralisée*

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est **semi-convergente**.

57. **Exemple fondamental**
La fonction continue f définie par $f(0) = 1$ et

$$\forall\, t > 0, \qquad f(t) = \frac{\sin t}{t}$$

n'est pas intégrable sur $I = [0, +\infty[$ mais l'intégrale généralisée de f sur I est convergente.

Entraînement

58. Il n'est ni nécessaire, ni suffisant qu'une fonction tende vers 0 au voisinage de l'infini pour qu'elle soit intégrable au voisinage de $+\infty$.

59. Si une application $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est uniformément continue et intégrable au voisinage de $+\infty$, alors elle tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

60. Soient $0 < a < b$. L'intégrale

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos xt\,\mathrm{d}t$$

est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

61. En posant

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,$$

on définit une fonction φ sur $\mathbb{R}$ et

$$\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\big(e^{-x^2}\big).$$

62. Pour tout $\lambda > 0$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}|\sin t|\,\mathrm{d}t = \frac{e^{\lambda\pi}+1}{(1+\lambda^2)(e^{\lambda\pi}-1)}.$$

63. Soit f, une fonction continue et strictement positive sur $I = [0, +\infty[$. On suppose qu'il existe un réel $0 \leqslant \alpha < 1$ tel que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \alpha.$$

Alors f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

64. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}_+$ la fonction f définie par

$$f(t) = \exp\Big(\frac{\sin^2 t}{t^\alpha}\Big) - 1$$

est-elle continue par morceaux sur $I = [0, +\infty[$? Cette fonction est intégrable sur I pour $1 < \alpha < 2$.

65. La fonction f définie par

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

est dérivable sur $]0, +\infty[$. De plus,

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ell n\, x$$

car l'expression $\frac{\sin t - t}{t^2}$ est bornée sur $]0, +\infty[$.

III

Séries numériques

III.1 Critère spécial des séries alternées

66. ✍ *La série numérique (réelle) $\sum u_n$ est* **alternée** *lorsque le produit $(-1)^n u_n$ est de signe constant.*

67. ➙ *On considère une série numérique alternée $\sum u_n$.*
Si la suite de terme général $|u_n|$ tend vers 0 en décroissant, *alors*

1. *la série $\sum u_n$ est convergente ;*
2. *pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste d'ordre n est du signe du premier terme négligé :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad R_n \times u_{n+1} \geqslant 0$$

3. *et dominé par le premier terme négligé :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |R_n| \leqslant |u_{n+1}|.$$

68. En particulier, si la série $\sum u_n$ vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées **[67]**, alors la somme de la série est du signe du premier terme et son module est inférieur au module du premier terme.

69. La ***transformation d'Abel*** permet d'étendre le critère spécial des séries alternées aux séries complexes.

70. Transformation d'Abel
Étant données deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on pose

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \quad \text{et} \quad V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

70.1 Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

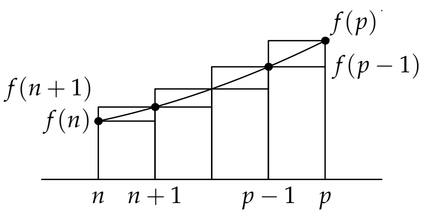
$$\sum_{n=0}^{N} u_n V_n = U_N V_N + \sum_{n=0}^{N-1} U_n (V_n - V_{n+1}).$$

70.2 Si la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et si la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 en décroissant, alors la série $\sum u_n V_n$ est somme d'une suite de limite nulle et d'une série absolument convergente.
70.3 Si la série $\sum z_n$ est convergente, alors la série $\sum {}^{z_n}/_n$ est convergente.
70.4 Pour tout $0 < x < 2\pi$, la série $\sum {}^{\cos nx}/_n$ est convergente.

III.2 Comparaison d'une série et d'une intégrale

71. L'intégrale d'une fonction sur un intervalle étant une sorte de somme, il est souvent fructueux de comparer une intégrale à une somme.
Cela n'est possible *facilement* que dans le cas des fonctions monotones.

72. Cas d'une fonction croissante
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, une fonction continue par morceaux et croissante.



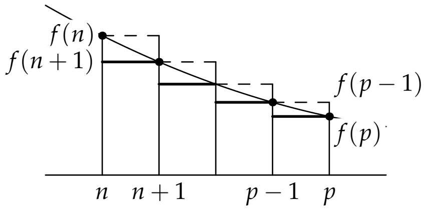
Étant donnés deux entiers $n \leqslant p$ tels que $[n, p] \subset I$,

$$\sum_{k=n}^{p-1} f(k) \leqslant \int_n^p f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} f(k)$$

et donc

$$f(n) + \int_n^p f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{p} f(k) \leqslant \int_n^p f(x)\,\mathrm{d}x + f(p).$$

73. Cas d'une fonction décroissante
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, une fonction continue par morceaux et décroissante.



Étant donnés deux entiers $n \leqslant p$ tels que $[n, p] \subset I$,

$$\sum_{k=n+1}^{p} f(k) \leqslant \int_n^p f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n}^{p-1} f(k).$$

et donc

$$f(p) + \int_n^p f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n}^{p} f(k) \leqslant f(n) + \int_n^p f(t)\,\mathrm{d}t.$$

74. Soit $f : [n, +\infty[\to \mathbb{R}$, une fonction continue par morceaux, positive et décroissante sur l'intervalle $I = [n, +\infty[$.
La fonction f est intégrable sur I si, et seulement si, la série $\sum f(k)$ est convergente et dans ce cas

$$\int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} f(k) \leqslant f(n) + \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Applications

75. Séries convergentes
75.1 Pour $\alpha > 1$ et tout entier $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1 + \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

75.2 Pour tout $\alpha > 1$,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

75.3 Lorsque α tend vers $+\infty$,

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{3^\alpha}\Big).$$

76. Séries divergentes
76.1 Équivalent des nombres harmoniques [28]

$$H_n \sim \ell\mathrm{n}\, n$$

76.2 Lorsque n tend vers $+\infty$, pour $\alpha < 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

76.3

$$\ell\mathrm{n}\, n! \sim n\,\ell\mathrm{n}\, n$$

76.4 Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \sim \frac{p}{n} \quad \text{alors que} \quad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \sim \ell\mathrm{n}\, 2.$$

76.5

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} = \frac{2}{3} n\sqrt{n} + \mathcal{O}(\sqrt{n})$$

77. *Suite de* [**28**] – Soit $a \in \mathbb{R}_+$. La série $\sum a^{H_n}$ converge si, et seulement si, $a < 1/e$. [**76.1**]

78.
$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k\,\ell\mathrm{n}^2\,k} \sim \frac{1}{\ell\mathrm{n}\,n}$$

79.
$$\sum_{k=2}^{n} \ell\mathrm{n}^2\,k \sim n\,\ell\mathrm{n}^2\,n$$

80.
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\,\ell\mathrm{n}\,k} = \ell\mathrm{n}(\ell\mathrm{n}\,n) + \mathcal{O}(1)$$

81.
$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{\ell\mathrm{n}\,k}{k} = \ell\mathrm{n}\,2.\,\ell\mathrm{n}\,n + \frac{\ell\mathrm{n}^2\,2}{2} + o(1)$$

82. La somme
$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$$
est définie pour tout $x > 0$. De plus,
$$\forall\, x > 0, \quad S(x) \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \frac{2}{x^2} \leqslant S(x) \leqslant 1 + \frac{2}{x^2}$$
donc S tend vers 1 au voisinage de $+\infty$ et $S(x) \sim 2/x^2$ au voisinage de $x = 0$.

83. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose :
$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\,\ell\mathrm{n}\,k}.$$

83.1 Par comparaison avec une intégrale, la suite de terme général
$$u_n = S_n - \ell\mathrm{n}(\ell\mathrm{n}\,n)$$
est bornée.

83.2 La série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge absolument et il existe une constante c telle que
$$S_n - \ell\mathrm{n}(\ell\mathrm{n}\,n) - c \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2\,\ell\mathrm{n}\,k}$$
donc
$$S_n = \ell\mathrm{n}(\ell\mathrm{n}\,n) + c + \frac{1}{n\,\ell\mathrm{n}\,n} + o\Big(\frac{1}{n\,\ell\mathrm{n}\,n}\Big).$$

III.3 Sommation des relations de comparaison

84. On considère ici une série $\sum u_n$ dont le terme général est comparable (avec $\mathcal{O}$, o ou $\sim$) au terme général d'une suite *positive* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de telle sorte qu'on puisse en déduire la nature de la série $\sum u_n$.
En pratique, $\sum a_n$ est une série géométrique ou une série de Riemann.

Séries convergentes

85. Dans le cas où les deux séries $\sum u_n$ et $\sum a_n$ sont convergentes, on compare les ordres de grandeur de leurs restes, qui sont des infiniment petits.

86. Si $\sum u_n$ est une série absolument convergente, alors
$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = \mathcal{O}\Big(\sum_{k=n}^{+\infty} |u_k|\Big).$$

87. ➙ *Soit $\sum a_n$, une série convergente de terme général* positif*.*

87.1 *Si $u_n = \mathcal{O}(a_n)$, alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente et*
$$\sum_{k=n}^{+\infty} |u_k| = \mathcal{O}\Big(\sum_{k=n}^{+\infty} a_k\Big).$$

87.2 *Si $u_n = o(a_n)$, alors*
$$\sum_{k=n}^{+\infty} |u_k| = o\Big(\sum_{k=n}^{+\infty} a_k\Big).$$

87.3 *Si $u_n \sim a_n$, alors*
$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \Big(\sum_{k=n}^{+\infty} a_k\Big).$$

Séries divergentes

88. Dans le cas de séries divergentes dont les termes généraux sont de signe constant, on compare les ordres de grandeur des sommes partielles, qui sont des infiniment grands.

89. On considère deux suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en supposant que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

89.1 S'il existe deux réels A et B tels que
$$0 \leqslant x_n \leqslant Ay_n + B$$
à partir d'un certain rang, alors $x_n = \mathcal{O}(y_n)$.

89.2 On suppose que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ et un réel $A_\varepsilon > 0$ tels que
$$\forall\, n \geqslant N_\varepsilon, \quad 0 \leqslant x_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2} y_n + A_\varepsilon.$$
Alors $x_n = o(y_n)$.

90. ➙ *Soit $\sum a_n$, une série divergente de terme général* positif*. On note S_n (resp. A_n), les sommes partielles de la série $\sum u_n$ (resp. de la série $\sum a_n$).*

90.1 *Si $u_n = \mathcal{O}(a_n)$, alors $S_n = \mathcal{O}(A_n)$.*

90.2 *Si $u_n = o(a_n)$, alors $S_n = o(A_n)$.*

90.3 *Si $u_n \sim a_n$, alors $S_n \sim A_n$.*

Applications

91. Calcul approchée de la somme d'une série convergente
Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors on peut considérer que la somme partielle d'ordre n est une valeur approchée de la somme de la série, l'erreur commise étant le reste d'ordre n :
$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + R_n.$$

91.1 Si $u_n = \mathcal{O}(1/n^\alpha)$ avec $\alpha > 1$, alors $R_n = \mathcal{O}(1/n^{\alpha-1})$.

91.2 Si $u_n = \mathcal{O}(q^n)$ avec $0 < q < 1$, alors $R_n = \mathcal{O}(q^n)$.

92. Théorème de Cesaro
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k = \ell.$$

93. Constante d'Euler [28]

93.1
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{k} - \ell\mathrm{n}\,\frac{k+1}{k}\Big) \sim \frac{1}{2n}$$

93.2
$$H_n = \ell\mathrm{n}\,n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

94. Suites récurrentes et équivalents
On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle, qui vérifie une relation de la forme

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=f(u_n)$$

où f est une fonction dérivable sur un voisinage de 0. Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=f'(0)$$

et la valeur de $f'(0)$ permet de préciser l'ordre de grandeur de l'infiniment petit u_n.

94.1 Convergence géométrique
Si $|f'(0)|<1$, alors il existe $0<q<1$ tel que

$$u_n=o(q^n).$$

94.2 Convergence rapide
On suppose que $f'(0)=0$.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 plus vite que toute suite géométrique.
2. Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ au voisinage de 0, alors il existe une constante $K>0$ telle que

$$|f(x)|\leqslant K\,x^2$$

au voisinage de 0 et $u_n=\mathcal{O}(q^{2^n})$ pour un certain réel $0<q<1$.

94.3 Convergence lente
Si $f'(0)=1$, alors

$$u_{n+1}=f(u_n)=u_n+o(u_n).$$

Avec un développement limité plus précis de f, on peut trouver un réel α tel que la suite de terme général

$$v_n=u_{n+1}^\alpha-u_n^\alpha$$

converge vers une limite *finie non nulle* ℓ.

1. Le réel α, s'il existe, est nécessairement négatif.
2. Si v_n tend vers $\ell\in\mathbb{R}_+^*$, alors $u_n\sim\sqrt[\alpha]{n\ell}$.
3. Si $f(x)=\ell\mathrm{n}(1+x)$, alors $\alpha=-1$ et $u_n\sim{}^2/_n$.
4. Si $f(x)=\sin x$, alors $\alpha=-2$ et $u_n\sim\sqrt{^3/_n}$.

Entraînement

95. Questions pour réfléchir

1. Soit f, une fonction continue et décroissante telle que la série $\sum f(n)$ converge. Pourquoi la comparaison de cette série avec une intégrale donne-t-elle une estimation médiocre de la somme de cette série ?
2. Peut-on déduire de [**76**.3] un équivalent de $n!$ lorsque n tend vers l'infini ?
3. *Suite de* [**87**] – Pourquoi ne compare-t-on pas les sommes partielles des deux séries ?
4. On suppose qu'il existe deux réels A et B tels que

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad 0\leqslant x_n\leqslant Ay_n+B.$$

Peut-on en déduire que $x_n=\mathcal{O}(y_n)$?

96. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite décroissante et positive telle que la série $\sum u_n$ converge. Alors

$$\forall\, p\in\mathbb{N},\quad 2R_p\geqslant 2p.u_{2p}\geqslant 0$$

et nu_n tend vers 0.

97. Existence et signe des sommes suivantes.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\qquad\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\qquad\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n8^n}{(2n)!}$$

98. Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}=o\Big(\frac{1}{n!}\Big).$$

99. On considère les séries de termes généraux

$$u_n=\frac{(-1)^n}{n+2(-1)^n}\quad\text{et}\quad v_n=\frac{(-1)^n}{n}.$$

La série $\sum v_n$ converge par le critère spécial des séries alternées, les termes généraux u_n et v_n sont équivalents lorsque n tend vers $+\infty$. Le critère spécial des séries alternées ne peut pas s'appliquer à la série $\sum u_n$. Cependant, la série $\sum u_n$ est convergente et son reste est $\mathcal{O}(^1/_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

100. La série de terme général

$$u_n=\ell\mathrm{n}\big[2n+(-1)^n\big]-\ell\mathrm{n}\,2n$$

est convergente sans être absolument convergente.

101. Pour tout $n\geqslant 2$, on pose

$$S_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{\ell\mathrm{n}\,k}{k}.$$

101.1 Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$S_n\sim\frac{\ell\mathrm{n}^2\,n}{2}.$$

Comme la série de terme général

$$u_n=\frac{\ell\mathrm{n}\,n}{n}-\frac{\ell\mathrm{n}^2\,n-\ell\mathrm{n}^2(n-1)}{2}$$

est absolument convergente, il existe une constante $c\in\mathbb{R}$ telle que

$$S_n=\frac{\ell\mathrm{n}^2\,n}{2}+c+o(1).$$

101.2 Il existe une constante $K\in\mathbb{R}$ telle que

$$\sum_{k=1}^{n}k^{1/k}=n+\frac{\ell\mathrm{n}^2\,n}{2}+K+o(1)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

102. Pour tout $n\geqslant 2$, on pose

$$u_n=\sum_{k=2}^{n}\ell\mathrm{n}^2\,k.$$

La série $\sum{}^1/_{u_n}$ est convergente. [**78**], [**79**]

103. Pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, on note

$$u_n=\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{2k+1}.$$

Comme la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\frac{\ell\mathrm{n}\,2}{2}$ et que

$$u_{n+1}-u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{32n^3},$$

alors

$$u_n\underset{n\to+\infty}{=}\frac{\ell\mathrm{n}\,2}{2}-\frac{1}{64n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

104. Application de la règle de Riemann
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$S_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \quad \text{et, si } \alpha > 1, \quad R_n(\alpha) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

1. Nature des séries $\sum R_n(\alpha)$ et $\sum {}^{R_n(\alpha)}/_{S_n(\alpha)}$. **[75.2]**
2. *Suite de* **[76.2]** – Nature de la série

$$\sum \frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1} + S_n(1/2)}.$$

3. *Suite de* **[76.5]** – On pose $u_n = n^\alpha S_n(-1/2)$. Nature des séries $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n u_n$ en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$.

105. Comparer l'ordre de grandeur du reste d'ordre n des séries

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum \frac{(-1)^n}{n}$$

qu'on peut déduire du critère spécial des séries alternées **[67]** avec celui qu'on peut déduire du théorème **[87]**.

106. Si $a_n = (-1)^n$ et $u_n = 1/n$, alors $u_n = o(a_n)$ et la série $\sum a_n$ est divergente. Cependant,

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \sim \ell n\, n \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} a_k = \mathcal{O}(1).$$

Expliquer.

107. Série harmonique alternée
Pour tout $n \geqslant 1$, on pose

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

1. Le réel R_0 est égal à $-\ell n\, 2$. **[41.2]**
2. Pour tout $n \geqslant 1$,

$$R_n - R_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \quad \text{et} \quad R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}.$$

3. Le reste R_n est équivalent à ${}^{(-1)^{n+1}}/_{2n}$ et la série $\sum R_n$ est semi-convergente.

108. Il existe un réel C tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + \sqrt{k}} = C - \frac{1}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

109. *Suite de* **[28]** – Il existe un réel C tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k + \sqrt{k}} = \ell n\, n + C + o(1).$$

110. *Suite de* **[28]** – Il existe un réel λ tel que

$$\prod_{k=2}^{n} \Big(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\Big) \sim \frac{e^\lambda}{\sqrt{n}}.$$

111. Comparaison avec des intégrales
1. La fonction ζ tend vers 1 au voisinage de $+\infty$ et

$$\zeta(n) = 1 + \frac{1}{2^n} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{3^n}\Big).$$

2. La fonction ζ tend vers $+\infty$ au voisinage de 1 et

$$\lim_{\alpha \to 1^+} (\alpha - 1)\zeta(\alpha) = 1.$$

3. Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(nk+1)} = \frac{\zeta(2)}{n} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

112. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall\, x > 0, \quad u_k(x) = \frac{x}{x^2 + k^2}.$$

1. Pour tout $x > 0$, la série $\sum u_k(x)$ converge. On note $S(x)$, sa somme et

$$\forall\, x > 0, \quad R_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x).$$

2. Pour tout $x > 0$,

$$\frac{\pi}{2} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + k^2} \leqslant \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}.$$

3. Comparer

$$\lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k(x).$$

4. Pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$R_n(x) \geqslant \operatorname{Arctan} \frac{x}{n}.$$

S'il existe une suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x > 0, \quad 0 \leqslant R_n(x) \leqslant M_n,$$

alors la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.

113. Pour tout $x > 0$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+x)n!}.$$

1. Il existe une constante $K \geqslant 0$ telle que

$$\forall\, |h| \leqslant \frac{1}{2}, \quad \big|S(1+h) - S(1)\big| \leqslant K|h|.$$

2. Il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, x > 0, \quad xS(x) - S(x+1) = C.$$

3. Pour x voisin de 0, on a $S(x) \sim 1/x$.
4. Il existe deux réels a et b tels que

$$S(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \mathcal{O}(1/x^4)$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

114. La somme

$$G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$$

est définie pour tout $x > 0$ et

$$G(x) \underset{x \to +\infty}{=} \frac{\zeta(2)}{x} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^2}\Big).$$

Obtient-on un résultat aussi précis en comparant $G(x)$ à une intégrale ?

115. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite de réels strictement positifs telle que la série $\sum u_n$ diverge. On note S_n, la n-ième somme partielle de cette série.
1. Pour $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, à partir d'un certain rang,

$$0 \leqslant \frac{u_n}{S_n} \leqslant \frac{u_n}{S_n^\alpha}$$

et si u_n/S_n tend vers 0, alors

$$\frac{u_n}{S_n} \sim \ell n \frac{S_n}{S_{n-1}}.$$

2. Pour $\alpha > 1$,
$$\frac{u_n}{S_n^\alpha} \leqslant \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}.$$
3. Nature de la série $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ en fonction du réel α.

116. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 1$ et la relation de récurrence suivante :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} u_k}.$$
1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, strictement positive et tend vers 0.
2. La série $\sum u_n$ diverge.
3. Il existe une fonction dérivable f telle que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ et que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$
On en déduit [**94.3**] que $u_n \sim \sqrt{1/2n}$, ce qui confirme la divergence de la série $\sum u_n$.

IV

Ensembles dénombrables

117. Les ensembles dénombrables sont en quelque sorte les plus petits des ensembles infinis.
117.1 ✍ *Un ensemble E est* **dénombrable** *s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur E.*
117.2 L'ensemble $\mathbb{N}$ est dénombrable.
117.3 Si E est dénombrable, alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux distincts tels que
$$E = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}.$$
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une ***énumération*** de E.
117.4 L'application
$$\left[n \mapsto (-1)^n \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right]$$
est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$: l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs est dénombrable.
118.1 ✍ *Un ensemble E est* **au plus dénombrable** *lorsqu'il existe une bijection d'une partie de $\mathbb{N}$ sur E.*
118.2 Un ensemble est au plus dénombrable si, et seulement si, il est fini ou dénombrable.
118.3 ➙ *S'il existe une injection de E dans $\mathbb{N}$, alors l'ensemble E est au plus dénombrable.*
118.4 ➙ **Axiome du choix**
S'il existe une surjection de E_1 sur E_2, alors il existe une bijection d'une partie E_0 de E_1 sur E_2.
118.5 ➙ *S'il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur E, alors l'ensemble E est au plus dénombrable.*
118.6 Les parties infinies de $\mathbb{N}$ (famille des entiers pairs ; famille des entiers impairs ; famille des entiers premiers...) sont des ensembles dénombrables.
118.7 ➙ *Toute partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.*

Opérations sur les ensembles dénombrables

119. Produit d'ensembles dénombrables
On sait que le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles finis est encore un ensemble fini.
119.1 Le produit cartésien d'un ensemble fini non vide et d'un ensemble dénombrable est un ensemble dénombrable.
119.2 Quels que soient les entiers $0 \leqslant p \leqslant n$, on pose
$$\varphi\Big(\frac{n(n+1)}{2} + p\Big) = (p, n-p).$$
L'application φ ainsi définie est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^2$.
119.3 ➙ *Pour tout entier $d \geqslant 2$, l'ensemble $\mathbb{N}^d$ est dénombrable.*
119.4 On suppose que les ensembles E_1, ..., E_d sont dénombrables et, pour tout $1 \leqslant k \leqslant d$, on note φ_k, une bijection de $\mathbb{N}$ sur E_k. Alors l'application φ définie par
$$\forall\, (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d, \quad \varphi(n_1, \dots, n_d) = \big(\varphi_1(n_1), \dots, \varphi_d(n_d)\big)$$
est une bijection de $\mathbb{N}^d$ sur le produit cartésien $E_1 \times \cdots \times E_d$.
119.5 ➙ *Un produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.*
119.6 ➙ *Un produit fini d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.*

120. Unions d'ensembles dénombrables
Soit $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$, une famille d'ensembles dénombrables. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note φ_k, une bijection de $\mathbb{N}$ sur E_k.
120.1 Pour tout $q \in \mathbb{N}$ et tout $0 \leqslant r < d$, on pose
$$\varphi(qd + r) = \varphi_r(q).$$
Alors l'application φ est une surjection de $\mathbb{N}$ sur l'union finie $E_1 \cup \cdots \cup E_d$.
120.2 Quel que soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, on pose
$$\varphi(n, k) = \varphi_k(n).$$
Alors l'application φ est une surjection de $\mathbb{N}^2$ sur l'union dénombrable
$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k.$$
120.3 ➙ *L'union d'une famille finie ou dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est un ensemble au plus dénombrable.*

121. Soit $f : E \to F$, une application.
L'***image*** de f, notée $f_*(E)$, est définie par
$$f_*(E) = \{f(x),\ x \in E\} = \{y \in F : \exists\, x \in E,\ y = f(x)\}.$$
121.1 ➙ *Soit E, un ensemble au plus dénombrable. Pour toute application $f : E \to F$, l'ensemble $f_*(E)$ est au plus dénombrable.*
121.2 Si les ensembles E_1 et E_2 sont des parties au plus dénombrables de $\mathbb{C}$, alors les ensembles
$$E_1 + E_2 = \{x + y,\ (x, y) \in E_1 \times E_2\}$$
et
$$E_1 \cdot E_2 = \{xy,\ (x, y) \in E_1 \times E_2\}$$
sont des parties au plus dénombrables de $\mathbb{C}$.

Exemples classiques

122. ➙ *Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^2$ sont dénombrables.*

123. ➙ *L'ensemble*
$$\mathbb{Q} = \Big\{\frac{p}{q},\ (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*\Big\}$$
des nombres rationnels est dénombrable.

124. Support d'une famille sommable
On cherche une condition suffisante pour définir la somme d'une famille de vecteurs comptant une infinité de termes. La notion de ***série convergente*** permet de définir une telle somme dans le cas (très) particulier où la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est indexée par $\mathbb{N}$.

124.1 Soit $(u_k)_{k\in I}$, une famille de vecteurs de $(E, \|\cdot\|)$ indexée par un ensemble quelconque I. (On ne suppose pas que l'ensemble I est ordonné.)
On note $\mathfrak{P}_0(I)$, l'ensemble des parties *finies* de I et, pour toute partie *finie* $J \in \mathfrak{P}_0(I)$, on note

$$s(J) = \sum_{k\in J} \|u_k\| \in \mathbb{R}_+.$$

124.2 ✍ *Une famille $(u_k)_{k\in I}$ de nombres réels ou complexes est dite* **sommable** *lorsque l'ensemble*

$$\{s(J),\ J \in \mathfrak{P}_0(I)\}$$

est une partie bornée de $\mathbb{R}$.
124.3 ✍ *Plus généralement, dans un espace vectoriel normé* ***de dimension finie****, une famille de vecteurs $(u_k)_{k\in I}$ est sommable si, et seulement si, la famille de réels positifs $(\|u_k\|)_{k\in I}$ est sommable.*
124.4 Si la famille $(u_k)_{k\in I}$ est sommable, alors pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble

$$I_\varepsilon = \{k \in I \,:\, |u_k| \geqslant \varepsilon\}$$

est fini.
124.5 ➞ *Si $(u_k)_{k\in I}$ est une famille sommable, alors son* **support**

$$I_0 = \{k \in I \,:\, u_k \neq 0\}$$

est au plus dénombrable.
125. L'ensemble $\mathbb{Z}[X]$ des polynômes à coefficients entiers et l'ensemble $\mathbb{Q}[X]$ des polynômes à coefficients rationnels sont dénombrables.

$$\mathbb{Z}[X] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_n[X] \qquad \mathbb{Q}[X] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}_n[X]$$

126. Un nombre complexe z est un ***entier algébrique*** lorsqu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ *non nul* tel que $P(z) = 0$.
L'ensemble des entiers algébriques est une partie dénombrable de $\mathbb{C}$.
127. Pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe une application surjective de $\mathbb{N}^n$ sur l'ensemble des parties à n éléments de $\mathbb{N}$.
L'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.
128. L'ensemble $X^\star$ des mots (finis) écrits sur un alphabet fini X est dénombrable.

Contre-exemples classiques

129. Tout réel positif x admet un, et un seul, ***développement décimal propre*** : il existe une suite $(d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'entiers compris entre 0 et 9 telle que

$$\exists\, N_0 \in \mathbb{Z}_-,\ \forall\, n \leqslant N_0, \quad d_n = 0$$

et que

$$\forall\, N \in \mathbb{Z},\ \exists\, n \geqslant N, \quad d_n \neq 9.$$

On peut déduire la ***partie entière*** et la ***partie fractionnaire*** de x par la relation :

$$x = \underbrace{\sum_{n=N_0}^{0} d_n 10^{-n}}_{\in\mathbb{N}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} d_n 10^{-n}}_{\in[0,1[}.$$

129.1 **Procédé d'extraction diagonale**
Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, une suite réelle.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $(d_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$, le développement décimal propre de x_k.
On pose $d_n = 0$ pour tout entier $n \leqslant 0$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$,
— si $d_{n,n} \neq 0$, on pose $d_n = d_{n,n} - 1 \in \{0, 1, \dots, 8\}$;
— si $d_{n,n} = 0$, on pose $d_n = 1$.

La suite $(d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un développement décimal propre et le réel

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n 10^{-n}$$

est différent de tous les termes de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
129.2 ➞ *L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels n'est pas dénombrable.*
129.3 Un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
129.4 ➞ *L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes n'est pas dénombrable.*
130. **Produit infini d'ensembles**
130.1 L'application

$$\left[(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n 2^{-(n+1)}\right]$$

(dite ***représentation binaire***) est une surjection de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sur l'ensemble non dénombrable $[0,1]$.
130.2 Le produit cartésien d'une famille infinie d'ensembles de cardinal supérieur à 2 n'est pas dénombrable.
131. **Parties d'un ensemble**
131.1 **Indicatrice d'ensemble**
L'application $[A \mapsto \mathbb{1}_A]$ est une surjection de $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ sur l'ensemble non dénombrable $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.
131.2 Si l'ensemble E est infini, alors l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ des parties de E n'est pas dénombrable.

Entraînement

132. **Questions pour réfléchir**
1. S'il existe une surjection de E sur un ensemble non dénombrable F, alors E n'est pas dénombrable.
2. Le produit d'un nombre fini d'ensembles finis est fini. Quel est son cardinal ?
3. L'union d'une famille finie $(E_k)_{1\leqslant k\leqslant d}$ d'ensembles finis est un ensemble fini et

$$\max_{1\leqslant k\leqslant d} \#(E_k) \leqslant \#(E_1 \cup \cdots \cup E_d) \leqslant \sum_{k=1}^{d} \#(E_k).$$

Étudier les cas d'égalité dans cet encadrement.
4. L'union d'une famille dénombrable d'ensembles finis peut-elle être un ensemble fini ?
5. On suppose que $E = F \cup G$, où F est dénombrable et E n'est pas dénombrable. Alors G n'est pas dénombrable.

133. L'ensemble $\mathfrak{S}(\mathbb{N})$ des permutations de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.

V

Familles sommables

134. Par définition [**124.2**], une famille complexe $(u_k)_{k\in I}$ est sommable si, et seulement si, la famille de réels positifs $(|u_k|)_{k\in I}$ est sommable.

135. Comparaison avec les séries absolument convergentes

135.1 Lorsque $I = \mathbb{N}$, on peut définir la somme de la famille $(u_n)_{n\in I}$ au sens des séries :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} u_k$$

(seulement si la série $\sum u_n$ est convergente) ou au sens des familles sommables :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$$

(seulement si la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable).

135.2 ➙ *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum u_n$ est absolument convergente et dans ce cas,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n.$$

136. ➙ *Toute sous-famille d'une famille sommable est elle-même sommable : si la famille $(u_k)_{k\in I}$ est sommable, alors pour tout sous-index $I_0 \subset I$, la famille $(u_k)_{k\in I_0}$ est sommable.*

137. ➙ **Théorème de comparaison**

Si $(v_k)_{k\in I}$ est une famille sommable et si

$$\forall\, k \in I, \quad |u_k| \leqslant |v_k|,$$

alors la famille $(u_k)_{k\in I}$ est sommable.

V.1 Propriétés de la somme

138. Pour définir la somme d'une famille sommable, il faut discuter sur la nature du terme général.

138.1 ✍ *Si $(u_k)_{k\in I}$ est une famille sommable de réels positifs, alors*

$$\sum_{k\in I} u_k = \sup\Big\{\sum_{k\in J} u_k, \quad J \in \mathfrak{P}_0(I)\Big\}.$$

138.2 ✍ *Si $(u_k)_{k\in I}$ est une famille sommable de nombres réels, alors $(u_k^+)_{k\in I}$ et $(u_k^-)_{k\in I}$ sont deux familles sommables de réels positifs et*

$$\sum_{k\in I} u_k = \sum_{k\in I} u_k^+ - \sum_{k\in I} u_k^-.$$

138.3 ✍ *Si $(u_k)_{k\in I}$ est une famille sommable de nombres complexes, alors $\big(\mathfrak{Re}(u_k)\big)_{k\in I}$ et $\big(\mathfrak{Im}(u_k)\big)_{k\in I}$ sont deux familles sommables de nombres réels et*

$$\sum_{k\in I} u_k = \sum_{k\in I} \mathfrak{Re}(u_k) + i \sum_{k\in I} \mathfrak{Im}(u_k).$$

138.4 Soient $(u_k)_{k\in I}$, une famille sommable de vecteurs de E, espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{B} = (e_\ell)_{1\leqslant\ell\leqslant d}$, une base de E.

Alors, pour tout $1 \leqslant \ell \leqslant d$, la famille de scalaires $\big(e_\ell^*(u_k)\big)_{k\in I}$ est sommable et le vecteur

$$\sum_{\ell=1}^{d} \Big(\sum_{k\in I} e_\ell^*(u_k)\Big) \cdot e_\ell,$$

qui ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ choisie, est pris comme définition de la somme.

139. Caractérisation de la somme

Si la famille $(u_k)_{k\in I}$ est une famille sommable de vecteurs d'un espace vectoriel de dimension finie E, alors la somme de cette famille est l'unique vecteur $S \in E$ tel que

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, J_\varepsilon \in \mathfrak{P}_0(I),\ \forall\, J \in \mathfrak{P}_0(I), \qquad J_\varepsilon \subset J \implies \Big\| S - \sum_{k\in J} u_k \Big\| \leqslant \varepsilon.$$

140. ➙ **Permutation des termes**

Si $(u_k)_{k\in I}$ est une famille sommable, alors la famille $(u_{\sigma(k)})_{k\in I}$ est sommable et

$$\sum_{k\in I} u_{\sigma(k)} = \sum_{k\in I} u_k,$$

quelle que soit la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(I)$.

141. ➙ *Si la série complexe $\sum u_n$ est absolument convergente, alors, pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}.$$

142. ➙ **Inégalité triangulaire**

Si $(u_k)_{k\in I}$ est une famille sommable, alors

$$\Big|\sum_{k\in I} u_k\Big| \leqslant \sum_{k\in I} |u_k|.$$

Positivité de la somme

143. ➙ *Soit $(u_k)_{k\in I}$, une famille de réels positifs, sommable ou non. Pour toute partie $I_0 \subset I$,*

$$0 \leqslant \sum_{k\in I_0} u_k \leqslant \sum_{k\in I} u_k.$$

144. ➙ *Soient $(u_k)_{k\in I}$ et $(v_k)_{k\in I}$, deux familles sommables de réels. Si $u_k \leqslant v_k$ pour tout $k \in I$, alors*

$$\sum_{k\in I} u_k \leqslant \sum_{k\in I} v_k.$$

Additivité de la somme

145. ➙ *Soit $(u_k)_{k\in I}$, une famille sommable. On suppose que l'ensemble des indices est l'union de deux parties disjointes : $I = I_1 \sqcup I_2$. Alors*

$$\sum_{k\in I} u_k = \sum_{k\in I_1} u_k + \sum_{k\in I_2} u_k.$$

146. ➙ **Linéarité de la somme**

Soient $(u_k)_{k\in I}$ et $(v_k)_{k\in I}$, deux familles sommables. Pour tout scalaire λ, la famille $(\lambda u_k + v_k)_{k\in I}$ est sommable et

$$\sum_{k\in I} (\lambda u_k + v_k) = \lambda \sum_{k\in I} u_k + \sum_{k\in I} v_k.$$

V.2 Sommation par paquets

147. ✍ *Une* **partition** *de I est une famille $(I_j)_{j\in J}$ de parties deux à deux disjointes de I dont l'union est égale à I :*

$$I = \bigsqcup_{j\in J} I_j.$$

148. Méthode usuelle

En général, on définit une partition de l'index I au moyen d'une application

$$f\ :\ I \to E.$$

En effet, pour tout $i \in I$, il existe un, et un seul, $x \in E$ tel que $f(i) = x$, si bien qu'en posant

$$\forall\, x \in E, \quad I_x = \big\{i \in I\ :\ f(i) = x\big\},$$

on définit une partition $(I_x)_{x\in E}$ de I.

Théorème de Fubini

149. La première partie du théorème [**150**] sert à démontrer qu'une famille $(u_k)_{k\in I}$ est sommable en prenant $a_k = |u_k|$.
La seconde partie du théorème [**151**] permet de calculer la somme d'une famille sommable comme la somme d'une série (absolument) convergente.

150. → **Condition nécessaire et suffisante de sommabilité**
Soit $(a_k)_{k\in I}$, une famille de réels positifs *et $(I_j)_{j\in J}$, une partition de I.*
150.1 *S'il existe une sous-famille*

$$(a_k)_{k\in I_{j_0}}$$

qui n'est pas sommable, alors [**136**] *la famille $(a_k)_{k\in I}$ n'est pas sommable.*
150.2 *Si chaque sous-famille*

$$(a_k)_{k\in I_j}$$

est sommable, alors on peut définir les sommes partielles

$$\forall\, j \in J, \quad \sigma_j = \sum_{=k\in I_j}^{+\infty} a_k.$$

Dans ce cas, la famille $(a_k)_{k\in I}$ est sommable si, et seulement si, la famille des sommes partielles $(\sigma_j)_{j\in J}$ est sommable et, en cas de sommabilité,

$$\sum_{k\in I} a_k = \sum_{j\in J}\sum_{k\in I_j} a_k.$$

151. → **Calcul de la somme d'une famille sommable**
Soient $(u_k)_{k\in I}$, une famille complexe sommable et $(I_j)_{j\in J}$, une partition de I.
Pour tout $j \in J$, la famille $(u_k)_{k\in I_j}$ est sommable et

$$\sum_{k\in I} u_k = \sum_{j\in J}\Big(\sum_{k\in I_j} u_k\Big).$$

Application aux séries doubles

152. Une ***série double*** est une famille réelle ou complexe indexée par $I = \mathbb{N}^2$.
Dans ce cas, $J = \mathbb{N}$ et on considère en général la partition de I définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \big\{(m,n),\ m \in \mathbb{N}\big\}$$

ou par

$$\forall\, m \in \mathbb{N}, \quad I_m = \big\{(m,n),\ n \in \mathbb{N}\big\}.$$

153. Soit $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$, une famille de réels *positifs*.
153.1 **Convention**
Si $\sum u_k$ est une série divergente de terme général *positif*, alors la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$ et on peut alors noter

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_k = +\infty.$$

153.2 On pose

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sigma_n = \sum_{m\in\mathbb{N}} a_{m,n} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$
$$\text{et} \quad \forall\, m \in \mathbb{N}, \quad \tau_m = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{m,n} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

153.3 Les propriétés suivantes sont équivalentes.
1. La famille positive $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_m a_{m,n}$ est convergente et la série $\sum \sigma_n$ est convergente.
3. pour tout $m \in \mathbb{N}$, la série $\sum_n a_{m,n}$ est convergente et la série $\sum \tau_m$ est convergente.

154. Si la famille complexe $(x_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable, alors :
1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_m x_{m,n}$ converge absolument ;
2. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, la série $\sum_n x_{m,n}$ converge absolument ;
3. Les séries de termes généraux

$$s_n = \sum_{m=0}^{+\infty} x_{m,n} \qquad \text{et} \qquad t_m = \sum_{n=0}^{+\infty} x_{m,n}$$

convergent absolument et leurs sommes sont égales :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} s_n = \sum_{m=0}^{+\infty} t_m.$$

Exemples

155. La famille $\big(\frac{1}{k^\alpha}\mathbb{1}_{(k>n)}\big)_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si, et seulement si, $\alpha > 2$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha-1}}.$$

156. Soient a et b, deux réels strictement positifs. La famille des réels

$$u_{p,q} = e^{-ap-bq}$$

où (p,q) parcourt $\mathbb{N}^2$ est sommable. Quelle est sa somme ?

157. Condition sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que la famille

$$\Big(\frac{1}{(n+p+1)^\alpha}\Big)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$$

soit sommable.

158. Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ les familles suivantes sont-elles sommables ?

$$\Big(\frac{z^p}{q!}\Big)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \qquad \Big(\frac{z^{pq}}{p!q!}\Big)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$$

V.3 Produit de Cauchy

159. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$, deux séries complexes. On pose

$$\forall\, (k,\ell) \in \mathbb{N}^2, \quad x_{k,\ell} = u_k v_\ell.$$

159.1 Outre les partitions de $I = \mathbb{N}^2$ vues au [**152**], on considère la partition définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \big\{(k, n-k),\ 0 \leqslant k \leqslant n\big\} = [k+\ell = n].$$

159.2 → *Si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors la famille $(x_{k,\ell})_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.*
159.3 ✍ *Le* **produit de Cauchy** *des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série de terme général*

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{(k,\ell)\in I_n} x_{k,\ell}.$$

159.4 → *Si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors leur produit de Cauchy $\sum w_n$ est une série absolument convergente et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\Big).$$

159.5 Le produit de Cauchy est une opération commutative et associative sur les familles sommables.

160. **Séries de Poisson**
Quel que soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$, le produit de Cauchy de la série $\sum \lambda^n/n!$ par la série $\sum \mu^n/n!$ est la série $\sum (\lambda+\mu)^n/n!$. →[**186**]

161. Séries géométriques

161.1 Le produit de Cauchy de deux séries géométriques de raisons $q_1 \neq q_2$ admet

$$\frac{q_1^{n+1} - q_2^{n+1}}{q_1 - q_2}$$

pour terme général.

161.2 Le produit de Cauchy de deux séries géométriques de raison q admet $(n+1)q^n$ pour terme général.

162. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

La série $\sum u_n$ est convergente, mais le produit de Cauchy de $\sum u_n$ par $\sum u_n$ est une série divergente. Commenter.

Entraînement

163. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une famille sommable. Alors la famille

$$(x_k x_\ell)_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2}$$

est sommable et

$$\sum_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2} |x_k x_\ell| = \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k|\Big)^2.$$

En particulier [**1.129**],

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k|^2 \leqslant \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k|\Big)^2.$$

(Cette inégalité peut être démontrée facilement avec la théorie des séries.)

164. Soient $a > 1$ et $b > 1$. Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on pose

$$u_{p,q} = \frac{1}{a^p + b^q} \quad \text{et} \quad v_{p,q} = \frac{1}{\sqrt{a^p b^q}}.$$

La famille $(v_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable [**159.2**] et, par comparaison, la famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

165. *Suite de* [**161**] –

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n} = \frac{9}{4} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)q^n = \frac{2}{(1-q)^3} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 q^n = \frac{q(1+q)}{(1-q)^3}$$

et en particulier

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{2^{n-1}} = 16.$$

166. Quel que soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, la famille complexe

$$\Big(\frac{a^p b^q}{(p+q)!}\Big)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$$

est sommable. Pour $a = b$, sa somme égale à $(a+1)e^a$ et, pour $a \neq b$, à

$$\frac{be^b - ae^a}{b-a}.$$

167. La famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ de terme général

$$a_{i,j} = \frac{i+j}{2^{i+j}}$$

est sommable et sa somme est égale à 8.

168. La famille $(p_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ de terme général

$$p_{i,j} = \frac{1}{2^{i+1} j!}$$

est sommable et [**24**] sa somme est égale à e.

169.1 La famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ de terme général

$$u_{i,j} = \frac{i+j}{i!j!}$$

est sommable et [**24**] sa somme est égale à $2e^2$.

169.2 La famille $(p_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ de terme général

$$p_{i,j} = \Big(\frac{1}{2}\Big)^{i+j} u_{i,j}$$

est sommable et sa somme est égale à e.

170. *Suite de* [**41.4**] – Comparer les sommes

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{\substack{n=1\\ n\neq p}}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - p^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{\substack{p=1\\ p\neq n}}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - p^2}$$

et commenter.

171. Pour tout couple $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on pose

$$a_{p,q} = \frac{2p+1}{p+q+2} - \frac{p}{p+q+1} - \frac{p+1}{p+q+3}.$$

Comparer les sommes

$$\sum_{q=0}^{+\infty}\Big(\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q}\Big) \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{+\infty}\Big(\sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q}\Big)$$

et commenter le résultat.

172. Fonction ζ et constante d'Euler [28]

1. Nature des séries

$$\sum(\zeta(n)-1), \qquad \sum \frac{\zeta(n)-1}{n} \qquad \text{et} \qquad \sum \frac{(-1)^n \zeta(n)}{n}.$$

2.

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n)-1}{n} = 1 - \gamma \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n\zeta(n)}{n} = \gamma$$

en admettant que

$$\forall\ -1 \leqslant x < 1, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -x - \ell\text{n}(1-x).$$

173.

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \frac{\pi^2}{6}$$

174. Si $|a| < 1$, la famille $(a^{n(2q+1)})_{(n,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}$ est sommable et

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{a^p}{1-a^{2p}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{a^{2p-1}}{1-a^{2p-1}}.$$

175. La famille $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ de terme général

$$u_{m,n} = \frac{1}{m^2 n + mn^2 + 2mn}$$

est sommable.

176. Soit $\sum p_k$, une série convergente de terme général positif. En posant

$$\forall\,(n,k)\in\mathbb{N}^2,\qquad u_{n,k}=p_k\mathbb{1}_{(1\leqslant n\leqslant k)},$$

les sommes

$$R_n=\sum_{k=n}^{+\infty}p_k\qquad\text{et}\qquad S_k=\sum_{n=0}^{+\infty}u_{n,k}$$

sont bien définies pour tout $n\geqslant 1$ et tout $k\in\mathbb{N}$. De plus, la série $\sum R_n$ converge si, et seulement si, la série $\sum kp_k$ converge et, dans ce cas,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}R_n=\sum_{k=0}^{+\infty}kp_k.$$

177. On considère la famille réelle $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ de terme général

$$u_{p,q}=2^{-3q-p-(p+q)^2}$$

et la partition $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I définie par

$$\forall\,n\in\mathbb{N},\quad I_n=\big\{(p,q)\in I\;:\;p+q=n\big\}.$$

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la sous-famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in I_n}$ est sommable et

$$\sum_{(p,q)\in I_n}u_{p,q}=\frac{4}{3}\big[2^{-n(n+1)}-2^{-(n+1)(n+2)}\big].$$

2. La famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et sa somme est égale à $4/3$.

178. Pour k, $n\geqslant 1$, on pose

$$x_{k,n}=\frac{(-1)^k}{k^2}\cdot\mathbb{1}_{[1\leqslant n\leqslant k]}.$$

178.1 Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}x_{k,n}=\frac{(-1)^k}{k}$$

donc la famille $(x_{k,n})_{(k,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable.

178.2 Pour tout entier $n\geqslant 1$, on pose

$$u_n=\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}.$$

1. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie et la série $\sum u_n$ est absolument convergente.
2. $$\forall\,N\geqslant 1,\quad\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=n}^{N}\frac{(-1)^k}{k^2}=\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k}{k}$$
3. $$\forall\,N\geqslant 1,\quad\sum_{n=1}^{N}u_n=Nu_{N+1}+\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k}{k}$$
4. On a donc [**41.2**]

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}x_{k,n}=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}x_{k,n}=-\ell\mathrm{n}\,2$$

bien que la famille $(x_{k,n})_{(k,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ ne soit pas sommable.

179. On note $A=\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$.

179.1 Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n=\big\{(k,p)\in A\;:\;kp=n\big\}.$$

Si $(u_{k,p})_{(k,p)\in A}$ est une famille sommable, alors

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty}u_{k,p}=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{(k,p)\in I_n}u_{k,p}.$$

179.2 Soit $x\in\,]-1,1[$.

1. La famille $(x^{kp})_{(k,p)\in A}$ est sommable.
2. $$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{1-x^k}=\sum_{n=1}^{+\infty}d_nx^n$$

où d_n est le nombre des entiers naturels qui divisent n.

Questions, exercices & problèmes

Approfondissement

180. Séries de Bertrand
La série

$$\sum\frac{1}{n(\ell\mathrm{n}\,n)^\alpha}$$

est convergente si, et seulement si, $\alpha>1$.

181. Nature de la série

$$\sum\frac{1}{n\,\ell\mathrm{n}\,n\,\ell\mathrm{n}(\ell\mathrm{n}\,n)}.$$

182. Règle de Raabe-Duhamel
Soit $\sum u_n$, une série dont le terme général est strictement positif. Si le quotient u_{n+1}/u_n tend vers 1, la règle de D'Alembert ne permet pas de conclure.
Dans le cas particulier des séries de Riemann [**27**],

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\underset{n\to+\infty}{=}1-\frac{\alpha}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Nous allons en déduire une technique qui permet parfois de déterminer la nature de la série $\sum u_n$ en considérant la suite de terme général

$$v_n=\ell\mathrm{n}(n^\beta u_n)$$

pour une valeur de β bien choisie.

182.1 On suppose qu'il existe un réel α tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\underset{n\to+\infty}{=}1-\frac{\alpha}{n}+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

Avec $\beta=\alpha$, la série $\sum(v_{n+1}-v_n)$ est absolument convergente et il existe un réel $A>0$ tel que

$$u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{A}{n^\alpha}.$$

182.2 On suppose seulement que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\underset{n\to+\infty}{=}1-\frac{\alpha}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

1. Dans ces conditions,

$$v_{n+1}-v_n\underset{n\to+\infty}{=}\frac{\beta-\alpha}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

La nature de la série $\sum(v_{n+1}-v_n)$ s'en déduit si, et seulement si, $\alpha\neq\beta$.

2. Si $\alpha > 1$, alors il existe $1 < \beta < \alpha$. On en déduit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ et donc que la série $\sum u_n$ converge absolument.

3. Si $\alpha < 1$, alors il existe $\alpha < \beta \leqslant 1$. On en déduit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et donc que la série (de terme général positif) $\sum u_n$ diverge.

182.3 Cette méthode ne permet pas de déterminer la nature des séries de Bertrand [**180**].

183. Théorème de De Morgan

On considère une série de terme général $u_n = {}^1/_{\varphi(n)}$ et on étudie le quotient

$$r_n = \psi(n) \quad \text{où} \quad \psi(x) = \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}.$$

183.1 Que dire de r_n lorsque n tend vers $+\infty$ dans le cas des séries de Riemann ? dans le cas des séries de Bertrand [**180**] ?

183.2 * *Soit φ, une fonction croissante et strictement positive de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1, +\infty[$. On suppose que le quotient $\psi(x)$ tend vers une limite ℓ, finie ou infinie, lorsque x tend vers $+\infty$.*
Alors, par comparaison avec les séries de Riemann,

— *pour $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ converge ;*
— *pour $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ diverge.*

183.3 On pose $\varphi(t) = t\,\ell\mathrm{n}^2\,t$: la règle de De Morgan peut-elle s'appliquer ? Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

183.4 Utiliser la règle de De Morgan pour démontrer la convergence de la série

$$\sum\Big(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\,\ell\mathrm{n}\,\frac{n+1}{n}\Big).$$

184. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $u_n = {}^1/_n$ si n est un carré parfait et que $u_n = {}^1/_{n^2}$ dans le cas contraire. Nature de la série $\sum u_n$?

185. Espérance d'une variable aléatoire discrète

On considère une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, décroissante et de limite nulle, telle que $a_0 > 0$.

1. On pose $u_0 = 0$ et $u_n = n(a_{n-1} - a_n)$ pour tout $n \geqslant 1$.

1.a Que dire du signe de u_n ?

1.b
$$\forall\, N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{N-1} a_n - Na_N.$$

1.c
$$\forall\, N < P, \quad 0 \leqslant N(a_N - a_P) \leqslant \sum_{n=N+1}^{P} u_n.$$

2. La série $\sum a_n$ converge si, et seulement si, la série $\sum u_n$ converge et, dans ce cas, leurs sommes sont égales.

3. Soit X, une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Elle admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum \mathbf{P}(X > n)$ est convergente.
Dans ce cas,

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X > n).$$

186. Deux irrationnels

On pose

$$x_0 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad y_0 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

1. On suppose qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x. Si $n!u_n \in \mathbb{Z}$ et si $0 < n!|x - u_n| < 1$ pour tout n assez grand, alors x est irrationnel.

2. Le réel y_0 est irrationnel car

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{n!}\Big).$$

3. Le réel x_0 est irrationnel car

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 < \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n.n!}.$$

4. Comparer x_0 aux sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!}$$

et en déduire que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} = 2x_0 \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-2}{n!} = 0.$$

187. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+1} - \ell\mathrm{n}\, n.$$

1. Par concavité de ℓn,

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad u_n - u_{n-1} \leqslant \frac{n}{n^2+1} - \frac{1}{n} < 0.$$

2. Lorsque n tend vers $+\infty$, on a $u_n - u_{n-1} = \mathcal{O}({}^1/_{n^2})$ et la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel α.

3. La série $\sum(-1)^n(u_n - \alpha)$ est semi-convergente.

4. Comme $|u_n - \alpha| \leqslant {}^1/_2$ à partir d'un certain rang, la série $\sum(u_n - \alpha)^n$ est absolument convergente.

5. Comme $u_n \leqslant {}^1/_2$ pour tout $n \geqslant 1$, la série $\sum \frac{1}{n^{u_n}}$ diverge.

188. Produits infinis

À une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ de nombres réels *non nuls*, on associe la suite $(P_n)_{n\geqslant n_0}$ définie par

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad P_n = \prod_{k=n_0}^{n} u_k = u_{n_0}u_{n_0+1}\cdots u_n.$$

188.1 ✍ *Le* **produit infini** $\prod u_n$ *est dit* **convergent** *lorsque la suite $(P_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers un réel non nul, qui est alors noté*

$$\prod_{n=n_0}^{+\infty} u_n.$$

Le produit infini $\prod u_n$ **diverge** *lorsque la suite $(P_n)_{n\geqslant n_0}$ diverge ou tend vers 0.*

188.2 Exemples [36]

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \prod_{n=2}^{+\infty}\Big(1 - \frac{1}{n^2}\Big) = \frac{1}{2} \qquad \prod_{n=2}^{+\infty}\Big(1 + \frac{(-1)^n}{n}\Big) = 1$$

188.3 Si le produit infini $\prod u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ tend vers 1.

188.4 On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels strictement positifs.

1. Le produit infini $\prod u_n$ converge si, et seulement si, la série $\sum \ell\mathrm{n}\, u_n$ converge.

2. Le produit infini $\prod(1 + u_n)$ converge si, et seulement si, la série $\sum u_n$ converge.

3. On suppose que $0 < u_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors le produit infini $\prod(1 - u_n)$ converge si, et seulement si, la série $\sum u_n$ converge.

4. Une suite de terme général strictement positif $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, le produit infini $\prod({}^{v_{n+1}}/_{v_n})$ est convergent.

Pour aller plus loin

189. Produit de Cauchy

Soit E, une algèbre associative unitaire de dimension finie munie d'une norme sous-multiplicative $\|\cdot\|$.

189.1 Si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors la famille

$$(x_{k,\ell})_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2} = (u_k * v_\ell)_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2}$$

est sommable.

189.2 Le produit de Cauchy de ces deux séries, c'est-à-dire la série $\sum w_n$ de terme général

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k * v_{n-k},$$

est absolument convergent et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\Big) * \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\Big).$$

189.3 Si A et B sont deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent, alors

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A).$$

190. Familles absolument sommables

Ce qui suit est tiré du livre *Topologie* de Gustave CHOQUET (1964).

190.1 Soit $(a_i)_{i\in I}$, une famille de vecteurs de E, espace vectoriel normé par $\|\cdot\|$.

190.2 On note $\mathscr{F}$, l'ensemble des parties *finies* de I et, pour toute partie $J \in \mathscr{F}$, on note

$$A_J = \sum_{i\in J} a_i \in E.$$

190.3 ✍ *La famille $(a_i)_{i\in I}$ est* **sommable** *lorsqu'il existe un élément S de E possédant la propriété suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J_0 de I telle que, pour toute partie $J \in \mathscr{F}$ contenant J_0,*

$$\Big\|S - \sum_{i\in J} a_i\Big\| \leqslant \varepsilon.$$

L'élément S est appelé la **somme** *de la famille.*

190.4 La somme d'une famille sommable est bien définie, car il existe au plus un élément S de E qui possède la propriété précédente.

190.5 Soit $(a_i)_{i\in I}$, une famille sommable de vecteurs de E.
Pour toute permutation σ de I, la famille $(a_{\sigma(i)})_{i\in I}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I} a_{\sigma(i)} = \sum_{i\in I} a_i.$$

190.6 Si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ sont deux familles sommables de vecteurs de E, alors la famille $(c_i)_{i\in I}$ de terme général

$$\forall\, i \in I, \qquad c_i = a_i + b_i$$

est sommable et

$$\sum_{i\in I} c_i = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i.$$

190.7 Une famille $(a_i)_{i\in I}$ de réels positifs est sommable si, et seulement si, l'ensemble

$$\{A_J,\ J \in \mathscr{F}\}$$

des sommes finies est majoré. Dans ce cas,

$$\sum_{i\in I} a_i = \sup_{J\in\mathscr{F}} A_J.$$

190.8 ✍ *Une famille de vecteurs $(a_i)_{i\in I}$ est dite* **absolument sommable** *lorsque la famille de réels positifs $(\|a_i\|)_{i\in I}$ est sommable.*

190.9 Toute sous-famille d'une famille absolument sommable est elle aussi absolument sommable.

190.10 Dans un espace vectoriel de dimension finie, une famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable si, et seulement si, elle est absolument sommable.

190.11 Soient E, F et G, trois espaces vectoriels de dimension finie et f, une application bilinéaire de $E \times F$ dans G.
Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de vecteurs de E et si $(b_j)_{j\in J}$ est une famille sommable de vecteurs de F, alors la famille $(c_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ de terme général

$$\forall\, i \in I,\ \forall\, j \in J, \qquad c_{i,j} = f(a_i, b_j)$$

est une famille sommable de vecteurs de G et

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} f(a_i, b_j) = f\Big(\sum_{i\in I} a_i,\ \sum_{j\in J} b_j\Big).$$