1. *On considère une application continue* $f : E \to E$*. Démontrer que son graphe*

$$\Gamma = \{(x, f(x)),\ x \in E\}$$

est une partie fermée de $E \times E$*.*

2. *On suppose que* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une application bornée et que son graphe* Γ *est une partie fermée de* $\mathbb{R}^2$*. Démontrer que* f *est continue.*

1. Considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points du graphe Γ : pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = (x_n, f(x_n))$. Supposons que cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément $\ell = (\alpha, \beta)$ de $E \times E$.

Par définition de la topologie produit, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \alpha \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \beta.$$

Par continuité de f,

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\alpha)$$

(Théorème de composition des limites) et donc, par unicité de la limite,

$$\ell = (\alpha, \beta) = (\alpha, f(\alpha)) \in \Gamma.$$

On a ainsi prouvé que le graphe Γ était fermé.

2. Supposons que la fonction f ne soit pas continue au point $\alpha \in \mathbb{R}$. Par caractérisation séquentielle de la continuité, il existe (au moins) une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ telle que la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Comme l'application f est supposée bornée, cette suite divergente possède au moins deux valeurs d'adhérence distinctes.

✍ *Une suite divergente peut ne pas avoir de valeur d'adhérence (cas d'une suite qui tend vers l'infini) ou une seule valeur d'adhérence (comme la suite dont les termes sont 0,1,0,2,0,3,0,4,0,5,0,6...).*

En revanche, une suite dont les termes sont contenus dans une partie compacte est convergente si, et seulement si, elle admet une seule valeur d'adhérence. Par compacité, une telle suite admet au moins une valeur d'adhérence. Donc l'alternative est la suivante :

- *ou bien la suite admet une seule valeur d'adhérence (et elle converge vers cette valeur) ;*
- *ou bien la suite admet au moins deux valeurs d'adhérence (comme* $u_n = (-1)^n$ *par exemple).*

Il existe donc deux suites extraites $(x_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(x_{\psi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ qui convergent vers α, telles que

$$\lim_{k\to+\infty} x_{\varphi(k)} = \beta_1 \neq \beta_2 = \lim_{k\to+\infty} x_{\psi(k)}.$$

On a donc

$$\lim_{k\to+\infty} (x_{\varphi(k)}, f(x_{\varphi(k)})) = (\alpha, \beta_1) \quad \text{et} \quad \lim_{k\to+\infty} (x_{\psi(k)}, f(x_{\psi(k)})) = (\alpha, \beta_2).$$

Ainsi, (α, β_1) et (α, β_2) appartiennent à l'adhérence du graphe Γ. Comme Γ est supposé fermé, on en déduit que (α, β_1) et (α, β_2) appartiennent à Γ et donc que

$$\beta_1 = f(\alpha) = \beta_2,$$

d'où la contradiction.

✍ *En supposant que* f *était bornée, on a pu invoquer un argument de compacité. Sans cet argument, le résultat est clairement faux : la fonction* f *définie par*

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall\, x \neq 0, \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

est une application de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui n'est pas continue (elle n'est pas bornée au voisinage de* 0*), alors que son graphe est fermé :*

$$\Gamma = [xy = 1] \cap \{(0, 0)\}$$

est l'union d'un singleton (qui est fermé) et de l'image réciproque du fermé $\{1\}$ *par l'application continue* $[(x, y) \mapsto xy]$ *(application polynomiale en fonction des deux coordonnées* x *et* y*).*