> *Soient $(e_1, \dots, e_p)$, une famille libre de vecteurs de E, espace vectoriel de dimension finie. Pour tout vecteur $a \in E$, on pose*
> $$F_a = \mathrm{Vect}(e_1 + a,\ e_2 + a, \dots, e_p + a)$$
> *et on note G, un supplémentaire de F_0 dans E.*
> **1.** *Pour tout $a \in G$, les sous-espaces F_a et G sont supplémentaires dans E.*
> **2.** *Si a et b sont deux vecteurs distincts de G, alors $F_a \neq F_b$. Illustrer par une figure quand G est une droite du plan E.*

1. La réponse sera plus générale que la question, nous allons donner une condition nécessaire et suffisante sur $a \in E$ pour que les sous-espaces vectoriels F_a et G soient supplémentaires dans E.

❧ Soit $a \in E$. Comme F et G sont supplémentaires dans E, il existe une famille de scalaires $(\alpha_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ et un vecteur $g_0 \in G$ tels que

$$a = \underbrace{\Big(\sum_{k=1}^{p} \alpha_k \cdot e_k\Big)}_{\in F} + g_0. \qquad (\star)$$

Comme $g_0 \in G$, que $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et que F et G sont en somme directe,

— ou bien $g_0 \in F \cap G$ et dans ce cas $g_0 = 0_E$;

— ou bien $g_0 \notin F$ et dans ce cas la famille $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p, g_0)$ est libre.

❧ On sait que F et G sont supplémentaires. Pour que F_a et G soient supplémentaires, il faut donc que $\dim F = \dim F_a$ et comme la famille $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ est libre, il faut que la famille $(a + e_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ soit libre elle aussi.

Considérons une famille de scalaires $(\lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ telle que

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot (a + e_k) = 0_E \qquad \text{et posons} \qquad \Lambda = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k. \qquad (\dagger)$$

On déduit alors de $(\star)$ et de $(\dagger)$ que

$$\sum_{k=1}^{p} (\lambda_k + \Lambda.\alpha_k) \cdot e_k + \Lambda \cdot g_0 = 0_E.$$

➻ Si $g_0 \neq 0_E$ (c'est-à-dire si $a \notin F$), alors la famille $(e_1, \dots, e_p, g_0)$ est libre et il faut $\Lambda = 0$ et

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant p, \quad 0 = \lambda_k + \Lambda.\alpha_k = \lambda_k.$$

On en déduit que la famille $(e_1 + a, \dots, e_p + a)$ est libre.

➻ Si $g_0 = 0_E$ (c'est-à-dire pour $a \in F$), alors la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est libre et il faut que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant p, \quad \lambda_k + \Lambda.\alpha_k = 0. \qquad (\ddagger)$$

En sommant ces égalités, on obtient

$$\Lambda\Big(1 + \sum_{k=1}^{p} \alpha_k\Big) = 0.$$

Si la somme $A = \alpha_1 + \cdots + \alpha_p$ est différente de -1, on en déduit que $\Lambda = 0$ et donc $(\ddagger)$ que $\lambda_k = 0$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$.

➻ En revanche, si $g_0 = 0_E$ et si $A = -1$, alors

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_k \cdot (e_k + a) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \cdot e_k + A \cdot a = a - a = 0_E$$

et il existe au moins un scalaire α_k non nul (puisque leur somme n'est pas nulle !). Dans ce cas, la famille $(e_1 + a, \dots, e_p + a)$ est liée, donc $\dim F_a < \dim F$ et il est impossible que F_a et G soient supplémentaires dans E.

✍ *Dans la suite, on supposera donc que $g_0 \neq 0_E$ ou que $A \neq -1$ et donc que la famille $(e_1+a, \dots, e_p+a)$ est libre. (L'énoncé supposait que les α_k étaient tous nuls et donc que $A = 0$.)*

Sous ces hypothèses, nous savons que

$$\dim F_a + \dim G = \dim F + \dim G = \dim E,$$

donc il suffit de vérifier que $F_a \cap G = \{0_E\}$ pour conclure.

❧ Considérons un vecteur $x \in F_a \cap G$. Il existe donc une famille de scalaires $(\xi_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ tels que

$$x = \sum_{k=1}^{p} \xi_k \cdot (e_k + a) \overset{(\star)}{=} \sum_{k=1}^{p} \xi_k \cdot e_k + \Xi \cdot \Big(\sum_{k=1}^{p} \alpha_k \cdot e_k + g_0\Big) = \sum_{k=1}^{p} (\xi_k + \Xi\alpha_k) \cdot e_k + g_0$$

où on a posé $\Xi = \xi_1 + \cdots + \xi_p$. Comme x et g_0 appartiennent au sous-espace G, on en déduit que

$$G \ni x - g_0 = \sum_{k=1}^{p} (\xi_k + \Xi\alpha_k) \cdot e_k.$$

Mais $F = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et G sont en somme directe, donc il faut que $x - g_0 = 0_E$ et comme la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est libre, il faut que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant p, \quad \xi_k + \Xi\alpha_k = 0.$$

En sommant ces égalités, on en déduit que

$$\Xi + \Xi A = 0.$$

Or, par hypothèse, $A \neq -1$, donc $\Xi = 0$. Par conséquent,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant p, \quad \xi_k = -\Xi\alpha_k = 0 \quad \text{et finalement} \quad x = \sum_{k=1}^{p} \xi_k \cdot (e_k + a) = 0_E.$$

On a ainsi démontré que $F_a \cap G = \{0_E\}$ et on peut enfin conclure que F_a et G sont supplémentaires dans E.

2. Soient a et b, deux vecteurs de G. On suppose que $F_a = F_b$. En particulier, le vecteur

$$\sum_{k=1}^{p} (e_k + a) = \underbrace{\Big(\sum_{k=1}^{p} e_k\Big)}_{\in F} + p \cdot a$$

appartient à F_b, donc il existe des scalaires $(\beta_1, \dots, \beta_p)$ tels que

$$\Big(\sum_{k=1}^{p} e_k\Big) + p \cdot a = \sum_{k=1}^{p} \beta_k \cdot (e_k + b) = \sum_{k=1}^{p} \beta_k \cdot e_k + B \cdot b \quad \text{où} \quad B = \sum_{k=1}^{p} \beta_k.$$

On en déduit que

$$F \ni \sum_{k=1}^{p} (1 - \beta_k) \cdot e_k = -p \cdot a + B \cdot b \in G$$

et comme F et G sont en somme directe et que la famille $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ est libre,

$$-p \cdot a + B \cdot b = 0_E \qquad \text{et} \qquad \forall\, 1 \leqslant k \leqslant p, \quad \beta_k = 1.$$

Mais alors $B = p$ et finalement $a = b$.

Par contraposée, si a et b sont deux vecteurs distincts choisis dans le sous-espace G, alors les deux sous-espaces vectoriels F_a et F_b sont distincts.