Index des démonstrations rédigées

Chapitre 6 — Sommes

Exercice 1 **04-01**

Pour tout entier n *pair*, on pose $u_n = 2^{-n}$ et pour tout entier n *impair*, on pose $u_n = 3^{-n}$.

Alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente, mais la règle de D'Alembert ne permet pas de le démontrer.

Exercice 2 **04-02**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_0^1 \frac{t^n e^t}{1+e^t}\,dt.$$

1. Il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant K \int_0^1 t^n\,dt$$

Peut-on en déduire la nature de la série $\sum u_n$?

2. La suite de terme général $(n+1)u_n$ tend vers $e/_{1+e}$.

3. La série $\sum (-1)^n u_n$ est semi-convergente.

4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $x \in \mathbb{R}$ pour que la série $\sum u_n x^n$ converge.

Exercice 3 **04-03**

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \sim \frac{p}{n} \quad \text{alors que} \quad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \sim \ell n\, 2.$$

Exercice 4 **04-04**

La somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$$

est définie pour tout $x > 0$. De plus,

$$\forall\, x > 0, \quad S(x) \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \frac{2}{x^2} \leqslant S(x) \leqslant 1 + \frac{2}{x^2}$$

donc S tend vers 1 au voisinage de $+\infty$ et $S(x) \sim {}^2/_{x^2}$ au voisinage de $x = 0$.

Exercice 5 **04-05**

On considère les séries de termes généraux

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n + 2(-1)^n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

La série $\sum v_n$ converge par le critère spécial des séries alternées, les termes généraux u_n et v_n sont équivalents lorsque n tend vers $+\infty$. Le critère spécial des séries alternées ne peut pas s'appliquer à la série $\sum u_n$. Cependant, la série $\sum u_n$ est convergente et son reste est $\mathcal{O}(^1/_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 6 **04-06**

Pour tout $n \geqslant 2$, on pose

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{\ell n\, k}{k}.$$

1. Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$S_n \sim \frac{\ell n^2\, n}{2}.$$

Comme la série de terme général

$$u_n = \frac{\ell n\, n}{n} - \frac{\ell n^2\, n - \ell n^2(n-1)}{2}$$

est absolument convergente, il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$S_n = \frac{\ell n^2\, n}{2} + c + o(1).$$

2. Il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que

$$\sum_{k=1}^{n} k^{1/k} = n + \frac{\ell n^2\, n}{2} + K + o(1)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 7 **04-07**

Il existe un réel C tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + \sqrt{k}} = C - \frac{1}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Exercice 8 **04-08**

Il existe un réel λ tel que

$$\prod_{k=2}^{n} \Big(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\Big) \sim \frac{e^\lambda}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 9 **04-09**

1. La fonction ζ tend vers 1 au voisinage de $+\infty$ et

$$\zeta(n) = 1 + \frac{1}{2^n} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{3^n}\Big).$$

2. La fonction ζ tend vers $+\infty$ au voisinage de 1 et

$$\lim_{\alpha \to 1^+} (\alpha - 1)\zeta(\alpha) = 1.$$

3. Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(nk+1)} = \frac{\zeta(2)}{n} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

Exercice 10 **04-10**

Pour tout $x > 0$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+x)n!}.$$

1. Il existe une constante $K \geqslant 0$ telle que

$$\forall\, |h| \leqslant \frac{1}{2}, \quad \big|S(1+h) - S(1)\big| \leqslant K|h|.$$

2. Il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, x > 0, \quad xS(x) - S(x+1) = C.$$

3. Pour x voisin de 0, on a $S(x) \sim 1/x$.
4. Il existe deux réels a et b tels que

$$S(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \mathcal{O}(1/x^4)$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 11 — 04-11

1. La somme

$$G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$$

est définie pour tout $x > 0$ et

$$G(x) \underset{x \to +\infty}{=} \frac{\zeta(2)}{x} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^2}\Big).$$

Obtient-on un résultat aussi précis en comparant $G(x)$ à une intégrale ?
2. Lorsque x tend vers 0,

$$G(x) \sim -\ln x.$$

Exercice 12 — 04-12

1.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n} = \frac{9}{4}$$

2.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}$$

3.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)q^n = \frac{2}{(1-q)^3}$$

4.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 q^n = \frac{q(1+q)}{(1-q)^3}$$

et en particulier

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{2^{n-1}} = 16.$$

Exercice 13 — 04-13

1. Quel que soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, la famille complexe

$$\left(\frac{a^p b^q}{(p+q)!}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$$

est sommable.
2. Pour $a = b$, sa somme égale à $(a+1)e^a$ et, pour $a \neq b$, à

$$\frac{be^b - ae^a}{b - a}.$$

Exercice 14 — 04-14

La famille $(a_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ de terme général

$$a_{i,j} = \frac{i+j}{2^{i+j}}$$

est sommable et sa somme est égale à 8.

Exercice 15 — 04-15

1. Nature des séries

$$\sum \big(\zeta(n) - 1\big), \qquad \sum \frac{\zeta(n) - 1}{n} \qquad \text{et} \qquad \sum \frac{(-1)^n \zeta(n)}{n}.$$

2.

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n) - 1}{n} = 1 - \gamma \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n \zeta(n)}{n} = \gamma$$

en admettant que

$$\forall\, -1 \leqslant x < 1, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -x - \ln(1-x).$$

Exercice 16 — 04-16

Si $|a| < 1$, la famille $(a^{n(2q+1)})_{(n,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}}$ est sommable et

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{a^p}{1 - a^{2p}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{a^{2p-1}}{1 - a^{2p-1}}.$$

Exercice 17 — 04-17

Pour $k, n \geqslant 1$, on pose

$$x_{k,n} = \frac{(-1)^k}{k^2} \cdot \mathbb{1}_{[1 \leqslant n \leqslant k]}.$$

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_{k,n} = \frac{(-1)^k}{k}$$

donc la famille $(x_{k,n})_{(k,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable.
2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

2. a. La suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est bien définie et la série $\sum u_n$ est absolument convergente.
2. b.

$$\forall\, N \geqslant 1, \quad \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=n}^{N} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k}$$

2. c.

$$\forall\, N \geqslant 1, \quad \sum_{n=1}^{N} u_n = N u_{N+1} + \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k}$$

2. d. On a donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} x_{k,n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} x_{k,n} = -\ln 2$$

bien que la famille $(x_{k,n})_{(k,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ ne soit pas sommable.

Exercice 18 **04-19**

Nature des séries

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}} \quad \text{et} \quad \sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$$

en fonction du réel α.

Exercice 19 **04-20**

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{3k-1}{3k}.$$

Il existe deux réels a et b tels que $\ell n\, u_n = a\,\ell n\, n + b + o(1)$ et la série $\sum u_n$ est divergente.

Exercice 20 **04-21**

Soit $(a_i)_{i\in I}$, une famille de nombres complexes.

1. On suppose que la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable, de somme $S \in \mathbb{C}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie $F \subset I$ telle que

$$\Big|S - \sum_{i\in J} a_i\Big| \leqslant \varepsilon$$

pour toute partie finie J telle que $F \subset J \subset I$.

2. On suppose que la famille $(a_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et pour tout $R > 0$, il existe une partie finie $F \subset I$ telle que

$$\Big|z - \sum_{i\in F} a_i\Big| \geqslant R.$$

Exercice 21 **04-22**

Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, une application injective. La famille

$$\left(\frac{\sigma(n)}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

est-elle sommable ?

Exercice 22 **04-23**

Pour tout entier $p \geqslant 1$,

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\neq p}}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - p^2} = \frac{3}{4p^2}.$$

Exercice 23 **04-24**

La famille $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ de terme général

$$u_{m,n} = \frac{1}{m^2 n + m n^2 + 2mn}$$

est sommable.

Exercice 24 **pg23S3-a**

Donner un développement asymptotique à trois termes de la somme

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 25 **pg23S3-b**

Soit $\alpha > 1$. Pour tout entier $N \geqslant 1$, on pose

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Déterminer la nature de la série $\sum \frac{R_N}{S_N}$ en fonction de α.

Exercice 26 **pg23S3-c**

1. Nature de la série de terme général

$$u_n = \cos\Big[\pi n^2\,\ell n\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big].$$

2. Nature de la série de terme général

$$u_n = \ell n\Big(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\Big).$$

Exercice 27 **pg23S3-d**

Nature de l'intégrale généralisée suivante.

$$\int_0^{+\infty} \frac{t e^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}\,dt.$$

Exercice 28 **pg23S3-e**

Déterminer le terme général u_n de la série dont la n-ième somme partielle S_n est égale à $\frac{n}{n+1}$.

Exercice 29 **vt24S3-a**

Déterminer la nature de la série

$$\sum \frac{(-1)^n}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}.$$

Exercice 30 **vt24S3-c**

On considère la série $\sum u_n$ dont le terme général est *positif* et on suppose que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Démontrer que la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 31 **vt25S3-c**

1. Démontrer que la suite de terme général

$$\pi_p = \prod_{k=0}^{p} \Big(1 + \frac{1}{2^k}\Big)$$

converge vers une limite $\ell \in]1, +\infty[$.

2. On considère une série $\sum u_n$ de terme général positif, telle que

$$\forall\, n \geqslant 1, \qquad \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Démontrer que la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 32 vt25S4-a

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right).$$

1. Démontrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$$

et en déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers $+\infty$.

2. Démontrer que la série de terme général

$$v_k = \frac{1}{\sqrt{k}} + 2(\sqrt{k-1} - \sqrt{k})$$

est convergente. En déduire qu'il existe une constante réelle C_1 telle que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{=} 2\sqrt{n} + C_1 + o(1).$$

3. Démontrer de manière analogue qu'il existe une constante réelle C_2 telle que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ell n\, n + C_2 + o(1).$$

4. En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 33 vt25S4-b

Soient a et b, deux réels strictement supérieurs à 1. Exprimer la somme

$$S = \sum_{\substack{m,n\geqslant 1\\ m\wedge n=1}} \frac{1}{m^a n^b}$$

à l'aide de la fonction ζ.

Exercice 34 vt25S4-c

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $d(n)$, le nombre de diviseurs de n.

1. Pour tout entier $n \geqslant 2$, l'entier $d(n)$ est au moins égal à 2 et il est égal à 2 si, et seulement si, l'entier n est premier.

2. Pour tout $s > 1$, la série

$$\sum \frac{d(n)}{n^s}$$

est convergente et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d(n)}{n^s} = \zeta(s)^2.$$

Exercice 35 vt25S4-d

On note $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$, une énumération de la famille (dénombrable) des nombres premiers.

1. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la famille

$$\left(\frac{1}{p_0^{n_0} p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}}\right)_{(n_0,n_1,\dots,n_k)\in\mathbb{N}^{k+1}}$$

est sommable et que sa somme est égale à

$$\prod_{j=0}^{k} \frac{p_j}{p_j - 1}.$$

2. En déduire que

$$\forall\, s > 1, \qquad \frac{1}{\zeta(s)} = \lim_{k\to+\infty} \prod_{j=0}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_j^s}\right).$$

Exercice 36 Off2017-190

Soit $p \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que l'intégrale généralisée

$$S_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x - 1}\, e^{-nx}\, dx$$

converge pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

2. Démontrer que l'intégrale généralisée

$$\Gamma(a, b) = \int_0^{+\infty} x^a e^{-bx}\, dx$$

converge quels que soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\Gamma(a, b)$ sachant que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt = n!.$$

3. Démontrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

4. Démontrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad S_0 = (p+1)! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p+2}} + S_n.$$

En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x - 1}\, dx = (p+1)! \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+2}}.$$

Exercice 37 rms132-535

Déterminer deux réels a et b tels que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ell n(n+k) \underset{n\to+\infty}{=} n\, \ell n\, n + an + b + o(1).$$

Exercice 38 rms132-571

Pour $x > 1$, on pose

$$F(x) = \int_{\ell n\, x}^{2\,\ell n\, x} \frac{e^t}{t}\, dt.$$

1. Déterminer la limite de F au voisinage droit de 1.

2. Démontrer que F est injective.

Exercice 39 rms132-599

Pour $x > 0$, on pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}.$$

1. Étudier la continuité de f.
2. Calculer un équivalent de f au voisinage de $+\infty$.
3. Calculer un équivalent de f au voisinage de 0.

Exercice 40 rms132-1116

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$u_n = a\ln n + b\ln(n+1) + c\ln(n+2).$$

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ en fonction des réels a, b et c.

Exercice 41 rms132-1160

Déterminer la nature de la série

$$\sum \ln\Big(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\Big).$$

Exercice 42 rms132-1161

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $0 < u_0 < \pi$ et par la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sin u_n.$$

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
2. En considérant $u_{n+1} - u_n$, démontrer que la série $\sum u_n^3$ converge.
3. En considérant $\ln u_{n+1} - \ln u_n$, démontrer que la série $\sum u_n^2$ diverge.

Exercice 43 rms132-1162

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

1. Vérifier que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\Big(\frac{1}{n\sqrt{n}}\Big).$$

2. Déterminer la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.
3. Démontrer que $u_n \sim v_n$. Conclusion ?

Exercice 44 rms132-1163

On considère une suite positive $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et la relation de récurrence suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2}}{2}.$$

1. Démontrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n \leqslant \frac{a_n}{2}.$$

2. Démontrer que : si la série $\sum a_n$ converge, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. La réciproque est-elle vraie ? On pourra considérer la suite de terme général

$$u_n = \frac{n}{n+1}.$$

Exercice 45 rms132-1213

1. Calculer la limite de

$$R_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\Big(1 + \frac{k}{n}\Big).$$

2. Calculer un équivalent de

$$S_n = \prod_{k=1}^{n} (n+k)^{1/n}.$$

Solution 1 — 04-01

Comme $0 < {}^1\!/_3 < {}^1\!/_2$, il est clair que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant ({}^1\!/_2)^n$$

et comme $0 < {}^1\!/_2 < 1$, la série géométrique $\sum ({}^1\!/_2)^n$ est convergente.

D'après le Théorème de comparaison pour les séries de terme général positif, la série $\sum u_n$ est donc absolument convergente.

❧ Lorsque $n = 2p$ est un indice pair,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_{2p+1}}{u_{2p}} = \frac{3^{-(2p+1)}}{2^{-(2p)}} = \frac{1}{3} \cdot \Big(\frac{2}{3}\Big)^n$$

et lorsque $n = 2p + 1$ est un indice impair,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_{2p+2}}{u_{2p+1}} = \frac{2^{-(2p+2)}}{3^{-(2p+1)}} = \frac{1}{2} \cdot \Big(\frac{3}{2}\Big)^n.$$

Le quotient u_{n+1}/u_n alterne donc entre des valeurs proches de zéro (lorsque n est pair) et des valeurs infiniment grandes (lorsque n est impair), donc ce quotient **n'a pas de limite** et on ne peut donc pas appliquer la règle de D'Alembert.

Solution 2 — 04-02

1. La fonction

$$f = \Big[t \mapsto \frac{e^t}{1+e^t}\Big]$$

est continue sur le segment $[0, 1]$ et donc bornée : il existe donc un réel $K > 0$ tel que

$$\forall\, t \in [0, 1], \quad 0 \leqslant \frac{t^n e^t}{1+e^t} \leqslant K t^n.$$

Par positivité de l'intégrale,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant K \int_0^1 t^n \,dt = \frac{K}{n+1}$$

donc $u_n = \mathcal{O}({}^1\!/_n)$.

❧ Comme la série harmonique $\sum {}^1\!/_n$ est divergente, on ne peut pas appliquer le théorème de comparaison. *On ne peut donc pas* déduire la nature de la série $\sum u_n$ de l'encadrement précédent.

2. On intègre par parties :

$$\begin{aligned}(n+1)u_n &= \int_0^1 (n+1)t^n f(t)\,dt \\ &= \Big[t^{n+1} f(t)\Big]_0^1 - \int_0^1 t^{n+1} f'(t)\,dt \\ &= \frac{e}{1+e} - \int_0^1 t^{n+1} f'(t)\,dt.\end{aligned}$$

Comme f' est continue sur le segment $[0, 1]$, le raisonnement de la question précédente montre que

$$(n+1)u_n = \frac{e}{1+e} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n}\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{e}{1+e}.$$

On en déduit que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{1+e} \cdot \frac{1}{n}$$

et comme $\sum {}^1\!/_n$ est une série divergente de terme général positif, on peut *cette fois* appliquer le théorème de comparaison et en déduire que la série $\sum u_n$ est *divergente*.

3. Comme $|(-1)^n u_n| = u_n$, on a déjà démontré que la série $\sum(-1)^n u_n$ n'était pas absolument convergente. On a vérifié plus haut que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendait vers 0. Enfin, comme la fonction f est positive,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in [0,1], \quad 0 \leqslant t^{n+1} f(t) \leqslant t^n f(t)$$

donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$$

par positivité de l'intégrale. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 en décroissant, la série alternée $\sum(-1)^n u_n$ est bien convergente (critère spécial des séries alternées).

4. On sait que la série $\sum u_n x^n$ converge pour $x = -1$ et diverge pour $x = 1$.

Pour $|x| < 1$, on a $u_n x^n = o(x^n)$ (puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0). Par comparaison avec la série géométrique $\sum x^n$, on en déduit que la série $\sum u_n x^n$ est absolument convergente et donc convergente.

Enfin, pour $|x| > 1$,

$$u_n x^n \sim \frac{e}{1+e} \cdot \frac{x^n}{n}$$

et par croissances comparées $u_n x^n$ tend vers l'infini lorsque n tend vers $+\infty$, donc la série $\sum u_n x^n$ est grossièrement divergente.

Ainsi, la série $\sum u_n x^n$ est convergente si, et seulement si, $-1 \leqslant x < 1$.

Solution 3 04-03

Pour chaque entier $1 \leqslant k \leqslant p$, il est clair que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+k} &\underset{n\to+\infty}{\sim} {}^1\!/\!_n \\ &\underset{n\to+\infty}{=} {}^1\!/\!_n + o({}^1\!/\!_n). \end{aligned}$$

On peut sommer terme à terme un nombre $\boxed{\textbf{fixé}}$ de développements asymptotiques, donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{n+k} &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{p}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{p}{n}. \end{aligned}$$

❧ Cette méthode ne peut pas s'appliquer pour étudier la somme

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{n+k}$$

car cette fois le nombre de termes n'est pas fixé (il y a $(n+1)$, ils sont donc de plus en plus nombreux).

❧ On compare cette somme à une intégrale. Tout d'abord, sur une figure,

$$\forall\, q > n, \quad \int_n^q \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=n}^{q-1} \frac{1}{k}$$

et d'autre part, sur une figure aussi,

$$\forall\, q > n, \quad \sum_{k=n+1}^{q} \frac{1}{k} \leqslant \int_n^q \frac{dt}{t}.$$

On en déduit, selon la manipulation habituelle, que

$$\ell n\, \frac{q}{n} + \frac{1}{q} - \frac{1}{n} \leqslant \sum_{k=n+1}^{q} \frac{1}{k} \leqslant \ell n\, \frac{q}{n}.$$

En particulier, pour $q = 2n$, on obtient

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad \ell n\, 2 - \frac{1}{2n} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leqslant \ell n\, 2.$$

Le majorant et le minorant tendent tous les deux vers $\ell n\, 2$, donc

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell n\, 2$$

d'après le Théorème d'encadrement.
❧ La même comparaison de somme et d'intégrale pouvait s'appliquer pour $q = n + p$. Mais dans ce cas le Théorème d'encadrement donnait seulement

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

ce qui est moins précis que ce qu'on attendait.

Solution 4 — 04-04

Pour $x \leqslant 0$, le terme général $u_n = e^{-x\sqrt{n}}$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Pour $x > 0$,

$$n^2 u_n = \exp(-x\sqrt{n} + 2\,\ell n\, n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $u_n = \mathcal{o}(1/n^2)$ et la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

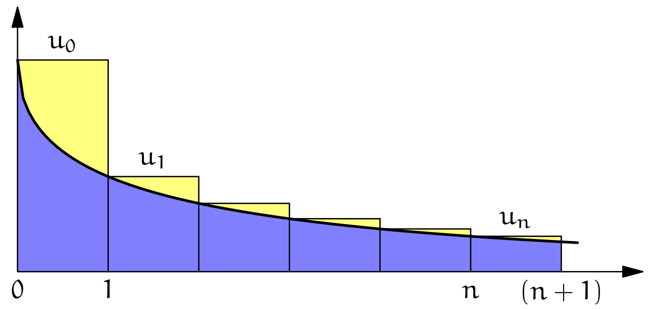
La fonction S est donc définie sur $]0, +\infty[$ (et seulement sur cet intervalle).
❧ La somme d'une série de terme général *positif* majore chacun des termes de la série, donc

$$\forall\, x > 0, \quad S(x) \geqslant 1 = e^{-x\sqrt{0}}.$$

❧ Soit $x > 0$. La fonction

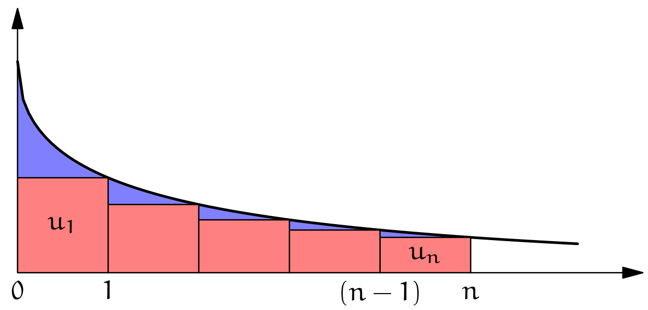
$$f = \left[t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}\right]$$

est une fonction continue et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.



On en déduit que

$$\forall\, n \geqslant 0, \quad \int_0^{n+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k$$



et que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \int_0^{n} f(t)\,dt.$$

En posant $t = u^2$, on a $dt = 2u\,du$, donc

$$\forall\, a \geqslant 0, \qquad \int_0^a e^{-x\sqrt{t}}\,dt = 2\int_0^{\sqrt{a}} ue^{-xu}\,du.$$

En intégrant par parties,

$$\int_0^{\sqrt{a}} ue^{-xu}\,du = \frac{-\sqrt{a}}{x}\cdot e^{-x\sqrt{a}} + \frac{1-e^{-x\sqrt{a}}}{x^2}$$

et l'expression trouvée tend vers $1/x^2$ lorsque a tend vers $+\infty$.

Comme la série $\sum u_n$ converge, on peut donc faire tendre n vers $+\infty$ et passer à la limite dans l'encadrement des sommes partielles, ce qui donne :

$$\frac{2}{x^2} \leqslant S(x) \leqslant 1 + \frac{2}{x^2}.$$

❧ D'après ce qui précède,

$$\forall\, x > 0, \quad 1 \leqslant S(x) \leqslant 1 + \frac{2}{x^2},$$

donc $S(x)$ tend vers 1 au voisinage de $+\infty$ (par encadrement).

On a aussi démontré que

$$\forall\, x > 0, \quad \frac{2}{x^2} \leqslant S(x) \leqslant \frac{2}{x^2} + 1$$

ce qui prouve que

$$S(x) = \frac{2}{x^2} + \mathcal{O}(1) = \frac{2}{x^2} + o(1/x^2)$$

au voisinage de 0. Autrement dit,

$$S(x) \sim \frac{2}{x^2}.$$

Solution 5 **04-05**

On démontre la convergence de la série alternée $\sum u_n$ au moyen d'un développement asymptotique de u_n :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{2}{n^2} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^3}\Big). \tag{1}$$

(Le terme général tend évidemment vers 0, mais on peut vérifier que $|u_n|$ n'est pas une fonction *décroissante* de n : il est donc impossible d'appliquer le Critère spécial des séries alternées.)

Posons donc

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{et} \quad w_n = u_n - v_n.$$

On peut évidemment appliquer le Critère spécial des séries alternées à $\sum v_n$. D'autre part, on a démontré avec (1) que

$$w_n \sim \frac{-2}{n^2},$$

donc $\sum w_n$ est une série absolument convergente.

En tant que somme de deux séries convergentes, la série $\sum u_n$ est convergente.

❧ Notons R_n, R_n^1 et R_n^2, les restes respectifs des séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$. D'après l'inégalité triangulaire,

$$\forall\, n \geqslant 1, \qquad |R_n| \leqslant |R_n^1| + |R_n^2|. \tag{2}$$

D'après le Critère spécial des séries alternées,

$$\forall\, n \geqslant 1, \qquad |R_n^1| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

donc

$$R_n^1 = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n}\Big). \tag{3}$$

Comme $\sum 1/n^2$ est une série *convergente* de terme général *positif* et que $w_n \sim -2/n^2$, alors

$$R_n^2 \sim -2\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

(théorème de sommation des ordres de grandeur). On *sait* que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n},$$

donc

$$R_n^2 \sim \frac{-2}{n}. \tag{4}$$

On déduit alors de (2), (3) et (4) que

$$R_n = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

✍ *Pour obtenir une meilleure précision, il faudrait améliorer l'ordre de grandeur du reste de $\sum v_n$: le Critère spécial fournit un encadrement simple mais (ou : donc) assez grossier du reste.*

Solution 6 **04-06**

1. La fonction f définie par

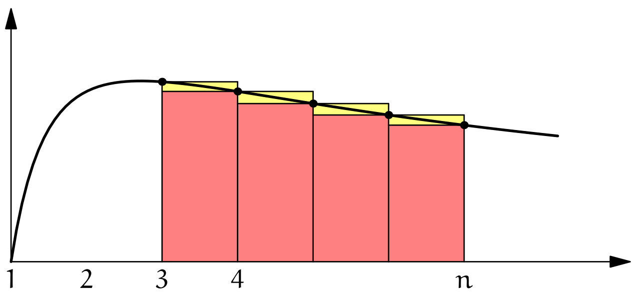
$$\forall\, t > 1, \quad f(t) = \frac{\ell n\, t}{t}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\forall\, t > 1, \quad f'(t) = \frac{1 - \ell n\, t}{t^2}$$

donc f est décroissante sur $[e, +\infty[$ et $\max_{t>0} f(t) = f(e) = e^{-1}$.

❧ La figure suivante :



justifie l'encadrement

$$\forall\, n \geqslant 4, \quad \sum_{k=4}^{n} f(k) \leqslant \int_3^n f(t)\, dt \leqslant \sum_{k=3}^{n-1} f(k).$$

On en déduit que

$$f(2) + \int_3^n f(t)\, dt + f(n) \leqslant S_n \leqslant f(2) + f(3) + \int_3^n f(t)\, dt. \tag{5}$$

Or

$$\forall\, n \geqslant 4, \quad \int_3^n \frac{1}{t}\, \ell n\, t\, dt = \Big[\frac{1}{2}\, \ell n^2\, t\Big]_3^n$$

et comme f tend vers 0 au voisinage de $+\infty$, on déduit de (5) que

$$S_n - \frac{\ell n^2\, n}{2} = \mathcal{O}(1) \tag{6}$$

et donc (ce qui est moins précis) que

$$S_n \sim \frac{\ell n^2\, n}{2}. \tag{7}$$

❧ Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\ell n(n-1) = \ell n\Big[n\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big] = \ell n\, n - \frac{1}{n} + \mathcal{O}(1/n^2)$$

et par conséquent

$$\ell n^2(n-1) = \ell n^2\, n - \frac{2\,\ell n\, n}{n} + \mathcal{o}\Big(\frac{\ell n\, n}{n^2}\Big)$$

d'où enfin

$$u_n = \mathcal{O}\Big(\frac{\ell n\, n}{n^2}\Big) = \mathcal{O}\Big(\frac{\ell n\, n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{n\sqrt{n}}\Big) = o\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big) \tag{8}$$

relation qui prouve que $\sum u_n$ est absolument convergente (par comparaison avec une série de Riemann convergente).

En notant U, la somme de la série $\sum u_n$, on a donc

$$\sum_{k=2}^{n} u_k = U + o(1)$$

lorsque n tend vers $+\infty$, mais aussi (somme télescopique)

$$\sum_{k=2}^{n} u_k = S_n - \sum_{k=2}^{n} \frac{\ell n^2 k - \ell n^2 (k-1)}{2} = S_n - \frac{\ell n^2 n}{2}.$$

On en déduit que

$$S_n = \frac{\ell n^2 n}{2} + U + o(1)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Ce développement asymptotique est plus précis que (7), et aussi plus précis que (6) (*toute suite convergente est bornée* mais la réciproque est fausse).

✍ *On peut facilement être plus précis ! En effet, par définition de* c,

$$c = \sum_{k=2}^{+\infty} u_k = \sum_{k=2}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

c'est-à-dire

$$S_n = \frac{\ell n^2 n}{2} + c - \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

et le Théorème de sommation des ordres de grandeur nous dit que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\Big(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}\Big) = o\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)$$

d'après (8). *Finalement,*

$$S_n = \frac{\ell n^2 n}{2} + c + o\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big). \tag{9}$$

2. On fait le lien avec ce qui précède :

$$\forall\, k \geqslant 1, \qquad k^{1/k} = \exp \frac{\ell n\, k}{k} = \exp[f(k)].$$

D'après le développement limité à l'ordre 2 de exp au voisinage de 0, il existe une suite $(v_k)_{k\geqslant 1}$ telle que

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad k^{1/k} = 1 + f(k) + v_k \quad \text{et que} \quad v_k \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\big(f^2(k)\big). \tag{10}$$

Comme

$$f^2(k) = \frac{\ell n^2 k}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{k\sqrt{k}} = o\Big(\frac{1}{k^{3/2}}\Big)$$

et que la série $\sum {}^{1}\!/_{k\sqrt{k}}$ est une série *convergente* de terme général *positif* (série de Riemann), on en déduit que $\sum v_k$ est (absolument) convergente et donc qu'il existe un réel

$$T = \sum_{k=1}^{+\infty} v_k$$

tel que

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = T - \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k = T + o(1)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

On déduit alors de (14) que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^{1/k} &= \sum_{k=1}^{n} 1 + \sum_{k=1}^{n} f(k) + \sum_{k=1}^{n} v_k \\ &= n + S_n + [T + o(1)] \\ &= n + \left[\frac{\ell n^2 n}{2} + c + o(1)\right] + [T + o(1)] \\ &= n + \frac{\ell n^2 n}{2} + \underbrace{(c+T)}_{K} + o(1)\end{aligned}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution 7 04-07

Lorsque k tend vers $+\infty$,

$$u_k = \frac{1}{k^2 + \sqrt{k}} \sim \frac{1}{k^2}.$$

Or $\sum \frac{1}{k^2}$ est une série *convergente* de terme général *positif*, donc la série $\sum u_k$ est (absolument) convergente et d'après le théorème de sommation des équivalents,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

✍ *Il est bon de connaître l'équivalent classique du reste de la série de Riemann.*

Par conséquent, en notant U, la somme de la série $\sum u_k$,

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = U - \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = U - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

✍ *Comparer la somme à une intégrale est toujours une bonne idée, mais l'intégrale qu'on obtient ici n'est pas très agréable...*

Complément

Un usage futé des séries télescopiques permet d'obtenir une meilleure précision sur l'ordre de grandeur du reste de la série.

❧ La série télescopique de terme général

$$\delta_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, k \geqslant 2, \quad \delta_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}$$

est convergente et

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \sum_{k=1}^{n} \delta_k = \frac{1}{n}.$$

Par conséquent, la somme de cette série est *nulle* et

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \delta_k = \frac{-1}{n}.$$

❧ Les calculs précédents ont montré que

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

lorsque n tendait vers $+\infty$. On va donc poser

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad v_k = u_k + \delta_k.$$

En tant que somme de deux séries convergentes, la série $\sum v_k$ est convergente et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \delta_k = R_n + \frac{-1}{n}.$$

Or, pour tout $k \geqslant 2$,

$$v_k = \frac{1}{k^2+\sqrt{k}} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}$$

et, lorsque k tend vers $+\infty$,

$$v_k \sim \frac{-1}{k^3}$$

(à vérifier par développement limité). La série $\sum {}^{-1}/_{k^3}$ est une série *convergente* dont le terme général est *de signe constant*. Par conséquent, toujours en appliquant les théorèmes de sommation des relations de comparaison,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{-1}{k^3} \sim \frac{-1}{2n^2}$$

et donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

❧ Bien entendu, on peut continuer de la même manière, en considérant une nouvelle série télescopique $\sum \varepsilon_k$ de somme nulle et telle que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \varepsilon_k = \frac{1}{2n^2}.$$

On considère la série de terme général

$$\begin{aligned} w_k &= v_k + \varepsilon_k = u_k + \delta_k + \varepsilon_k \\ &= v_k - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2(k-1)^2} \end{aligned}$$

et comme

$$w_k \sim \frac{-1}{k^3\sqrt{k}}$$

(*vérifier* cet équivalent !) alors

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k \sim \frac{-2}{5n^2\sqrt{n}}$$

(encore les théorème de sommation des relations de comparaison) et finalement

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{2}{5n^2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n^2\sqrt{n}}\right).$$

Solution 8 **04-08**

Tous les facteurs du produit

$$p_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$$

sont strictement positifs, donc le logarithme de p_n est la somme partielle de rang n de la série de terme général

$$u_k = \ell n\left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right).$$

D'après le développement limité à l'ordre 2 de $\ell n(1+x)$ au voisinage de $x=0$, il existe une suite $(v_k)_{k\geqslant 2}$ telle que

$$\forall\, k\geqslant 2,\quad u_k=\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}-\frac{1}{2k}+v_k$$

et que

$$v_k \underset{k\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{k^{3/2}}\Big).$$

❧ Comme $\sum {}^1/_{k^{3/2}}$ est une série *convergente* de terme général *positif*, la série $\sum v_k$ est (absolument) convergente. D'après le théorème de sommation des ordres de grandeur et l'équivalent bien connu des restes des séries de Riemann,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k=\mathcal{O}\Big(\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k\sqrt{k}}\Big)=\mathcal{O}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)$$

lorsque n tend vers $+\infty$. En notant σ_3, la somme de la série $\sum v_k$, on en déduit que

$$\sum_{k=2}^{n} v_k=\sigma_3+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

❧ Comme ${}^1/_{\sqrt{k}}$ tend vers 0 en décroissant, la série $\sum {}^{(-1)^k}/_{\sqrt{k}}$ vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées. Par conséquent, cette série est convergente et, pour tout $n\geqslant 1$, le reste d'ordre n est majoré en valeur absolue par le premier terme négligé, donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}=\mathcal{O}\Big(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\Big)=\mathcal{O}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)$$

lorsque n tend vers $+\infty$. En notant σ_1, la somme de cette série alternée, on en déduit que

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}=\sigma_1+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

❧ Enfin, la série $\sum {}^1/_{2k}$ est une série *divergente* de terme général *positif* (série harmonique) et plus précisément

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2k}=\frac{\ell n\, n}{2}+C+o(1)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

❧ Finalement,

$$\sum_{k=2}^{n} u_k=\frac{-\ell n\, n}{2}+\underbrace{(\sigma_1+C+\sigma_3)}_{K}+o(1)$$

lorsque n tend vers $+\infty$. En composant par exp, on en déduit que

$$p_n=\exp\Big(\frac{-\ell n\, n}{2}\Big)\cdot\exp(K)\cdot\exp[o(1)]\sim\frac{e^K}{\sqrt{n}}$$

lorsque n tend vers $+\infty$ (puisque exp tend vers 1 au voisinage de 0).

✍ *Si on ne connaît pas la constante d'Euler et qu'on sait seulement que* $H_n\sim \ell n\, n$*, c'est-à-dire* $H_n=\ell n\, n+o(\ell n\, n)$*, alors on a seulement*

$$\sum_{k=2}^{n} u_k=\frac{-\ell n\, n}{2}+o(\ell n\, n)$$

et l'ordre de grandeur de $\exp[o(\ell n\, n)]$ *est* inconnu *(on ne peut même pas savoir si une telle quantité est bornée).*

Solution 9 **04-09**

1. On rappelle que $\sum {}^{1}/_{k^\alpha}$ est convergente pour tout $\alpha > 1$.

❧ On commence par remarquer que

$$\forall\, \alpha > 1, \quad \zeta(\alpha) = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}. \tag{11}$$

La fonction f définie par

$$\forall\, t > 0, \quad f(t) = \frac{1}{t^\alpha} = e^{-\alpha \ell n\, t}$$

est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$. Cela permet de majorer la somme au second membre de (11) par une intégrale :

$$\forall\, p \geqslant 3, \quad \sum_{k=3}^{p} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{3^\alpha} + \int_3^p \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Ce serait mieux avec une figure !

Comme la série converge et que

$$\int_3^p \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1} \cdot \Big(\frac{1}{3^{\alpha-1}} - \frac{1}{p^{\alpha-1}}\Big) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \frac{1}{(\alpha-1)3^{\alpha-1}}$$

on peut faire tendre p vers $+\infty$ dans (11) :

$$\forall\, \alpha > 1, \quad 0 \leqslant \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{(\alpha-1)3^{\alpha-1}}$$

On en déduit que

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{3^\alpha}\Big) \tag{12}$$

et donc que

$$\zeta(\alpha) = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{3^\alpha}\Big)$$

lorsque α tend vers $+\infty$.

En particulier, ζ tend vers 1 au voisinage de $+\infty$.

2. On procède de manière analogue mais avec un encadrement :

$$\forall\, \alpha > 0, \quad \frac{1}{\alpha-1} \leqslant \zeta(\alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{1^\alpha} \tag{13}$$

où

$$\frac{1}{\alpha-1} = \lim_{p\to+\infty} \int_1^p \frac{dt}{t^\alpha}.$$

On déduit immédiatement de (13) que $(\alpha-1)\zeta(\alpha)$ tend vers 1 lorsque α tend vers 1. Par conséquent,

$$\zeta(\alpha) \underset{\alpha\to1}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}.$$

En particulier, ζ tend vers $+\infty$ au voisinage de 1.

3. Pour tout entier $n \geqslant 1$ fixé,

$$\frac{1}{k(nk+1)} \sim \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{k^2}$$

et comme la série $\sum {}^{1}/_{k^2}$ converge absolument, on en déduit que la somme étudiée

$$S_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(nk+1)}$$

est bien définie pour tout $n \geqslant 1$.

On ne peut pas appliquer un théorème de sommation des ordres de grandeur : ces théorèmes s'appliquent aux sommes partielles ou aux restes de séries et pas au cas où, comme ici, le terme général dépend d'un paramètre.

Néanmoins, il est intelligent de commencer par calculer un développement asymptotique : pour tout entier $k \geqslant 1$ *fixé*, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\frac{1}{k(nk+1)} = \frac{1}{nk^2} - \frac{1}{n^2k^3} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big). \tag{14}$$

Pour le moment, on n'a rien prouvé mais on a *au moins compris pourquoi* on compare

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(nk+1)} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Comme

$$\forall\, k, n \geqslant 1, \quad \frac{1}{k(nk+1)} - \frac{1}{nk^2} = \frac{-1}{nk^2(nk+1)},$$

alors

$$\forall\, k, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \frac{1}{nk^2} - \frac{1}{k(nk+1)} \leqslant \frac{1}{n^2k^3}.$$

À n fixé, les quantités qui apparaissent dans cet encadrement sont les termes généraux de trois séries convergentes, ce qui permet de sommer ces encadrements de $k = 1$ jusqu'à l'infini :

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \frac{1}{n}\zeta(2) - S_n \leqslant \frac{1}{n^2}\zeta(3).$$

On déduit de ce nouvel encadrement que

$$\frac{1}{n}\zeta(2) - S_n = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

c'est-à-dire

$$S_n = \frac{\zeta(2)}{n} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

✍ *En poussant plus loin le développement* (14) *et en reprenant les encadrements, on obtiendrait un développement plus précis de la somme étudiée. Par exemple :*

$$S_n = \frac{\zeta(2)}{n} - \frac{\zeta(3)}{n^2} + \frac{\zeta(4)}{n^3} - \frac{\zeta(5)}{n^4} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^5}\Big).$$

Solution 10 **04-10**

1. Il est clair que

$$\forall\, x > 0, \quad u_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{n!}\Big)$$

et comme la série de Poisson $\sum 1/n!$ est absolument convergente, on déduit du théorème de comparaison que la série $\sum u_n(x)$ est absolument convergente.

✍ *On peut aussi déduire la convergence de la série* $\sum u_n(x)$ *du Critère spécial des séries alternées. De cette manière, on ne prouve pas que la série est absolument convergente, mais on obtient facilement une estimation du reste d'ordre* n.

❧ Pour $|h| \leqslant 1/2$, on a $1 + h > 0$. Les réels $S(1+h)$ et $S(1)$ sont donc les sommes de deux séries convergentes. Par linéarité de la somme,

$$\begin{aligned} S(1+h) - S(1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\Big[\frac{1}{n+1+h} - \frac{1}{n+1}\Big] \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{h}{(n+1)(n+1+h)}. \end{aligned}$$

Comme $|h| \leqslant 1/2$,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad n+1+h \geqslant \frac{1}{2}$$

et par conséquent

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n!} \frac{h}{(n+1)(n+1+h)}\right| \leqslant \frac{2}{(n+1)!}\,|h|$$

ce qui prouve que

$$\forall\,|h| \leqslant \frac{1}{2}, \quad \big|S(1+h) - S(1)\big| \leqslant K\,|h|$$

où K est la somme d'une série convergente :

$$K = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)!}.$$

✍ *Cette propriété qui ressemble à la propriété de Lipschitz (mais qui n'est pas la propriété de Lipschitz) montre que la fonction S est continue au point $x = 1$.*

2. Par linéarité de la somme, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} xS(x) - S(x+1) &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{n!(n+x)} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1+x)} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{n!(n+x)} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{(n+1)!(n+1+x)} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{n!(n+x)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n!(n+x)} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Cela prouve que l'expression $xS(x) - S(x+1)$ est bien indépendante de $x > 0$.

3. On a démontré que S était continue au point $x = 1$. Par composition de limites, $S(1+x)$ tend donc vers $S(1)$ lorsque x tend vers 0 et l'identité précédente permet alors de conclure que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} xS(x) = S(1) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$S(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}.$$

✍ *On a remarqué plus haut que les conditions d'application du Critère spécial des séries alternées étaient satisfaites. En particulier,*

$$\forall\, x > 0, \quad \left|S(x) - \frac{1}{x}\right| = \left|R_0(x)\right| \leqslant \left|u_1(x)\right| = \frac{1}{1+x} \leqslant 1.$$

Cela prouve en particulier (et sans effort) que

$$S(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x} + \mathcal{O}(1),$$

ce qui est plus précis que l'équivalent précédent !

4. D'après l'identité établie au **[2.]**,

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{C}{x} + \frac{S(x+1)}{x} \\ &= \frac{C}{x} + \frac{C}{x(x+1)} + \frac{S(x+2)}{x(x+1)} \\ &= \frac{C}{x} + \frac{C}{x(x+1)} + \frac{C}{x(x+1)(x+2)} + \frac{S(x+3)}{x(x+1)(x+2)}. \end{aligned}$$

Pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{(-1)^n}{(n+x)n!}\right| \leqslant \frac{1}{x\,n!}.$$

Par inégalité triangulaire,

$$\forall\, x > 0, \quad \left|S(x)\right| \leqslant \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}$$

et en particulier

$$S(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x}\Big)$$

ce qui prouve que

$$\frac{S(x+3)}{x(x+1)(x+2)} \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^4}\Big).$$

Par ailleurs, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(x+1)} &= \frac{1}{x^2}\cdot\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^{-1} = \frac{1}{x^2}\cdot\Big[1-\frac{1}{x}+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big]\\ &= \frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^4}\Big)\\ \frac{1}{x(x+1)(x+2)} &= \frac{1}{x^3}+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^4}\Big)\end{aligned}$$

et finalement

$$S(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{C}{x}+\frac{C}{x^2}+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^4}\Big)$$

(*sans* terme en $1/x^3$).

Solution 11 **04-11**

1. Pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x > 0$, on pose

$$u_n(x) = \frac{1}{n+n^2x} = \frac{1}{n^2x}\cdot\Big(\frac{1}{1+\frac{1}{nx}}\Big).$$

Il est clair que

$$\forall\, z > 0, \quad 1-z \leqslant \frac{1}{1+z} \leqslant 1$$

et donc que

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x > 0, \quad \frac{1}{n^2x}-\frac{1}{n^3x^2} \leqslant u_n(x) \leqslant \frac{1}{n^2x}.$$

En sommant sur n, on en déduit que

$$\forall\, x > 0, \quad \frac{\zeta(2)}{x}-\frac{\zeta(3)}{x^2} \leqslant G(x) \leqslant \frac{\zeta(2)}{x}$$

c'est-à-dire

$$\forall\, x > 0, \quad \left|G(x)-\frac{\zeta(2)}{x}\right| \leqslant \frac{\zeta(3)}{x^2}$$

et donc en particulier que

$$G(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\zeta(2)}{x}+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^2}\Big).$$

❧ La fonction

$$\Big[t \mapsto \frac{1}{t+t^2x}\Big]$$

est évidemment continue et décroissante sur $[1,+\infty[$.

Pour tout entier $N \geqslant 1$,

$$\int_1^N \frac{dt}{t(1+tx)} = \int_1^N \Big(\frac{1}{t}-\frac{x}{1+xt}\Big)\,dt = \ell n\Big(\frac{N}{1+xN}\cdot\frac{1+x}{1}\Big)$$

donc

$$\lim_{N\to+\infty}\int_1^N \frac{dt}{t(1+tx)} = \ell n\,\frac{1+x}{x} = \ell n\Big(1+\frac{1}{x}\Big).$$

En comparant **(faire une figure !)** la somme partielle

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k+k^2x} \quad \text{à l'intégrale} \quad \int_1^N \frac{dt}{t+t^2x}$$

et en faisant tendre ensuite N vers $+\infty$, on obtient que

$$\forall\, x>0, \qquad \ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big) \leqslant G(x) \leqslant \ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big)+\frac{1}{x+1}.$$

Cet encadrement prouve seulement que $G(x)$ est compris entre $1/x$ et $2/x$ lorsque x tend vers $+\infty$, c'est moins précis que l'équivalent trouvé plus haut.

2. En revanche, lorsque x tend vers 0, on peut récrire l'encadrement précédent sous la forme

$$\forall\, x>0, \qquad -\ln x+\ln(1+x) \leqslant G(x) \leqslant -\ln x+\frac{1}{1+x}+\ln(1+x)$$

ce qui prouve que

$$G(x) \underset{x\to 0}{=} -\ln x+\mathcal{O}(1) \sim -\ln x.$$

Solution 12 **04-12**

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = v_n = \frac{1}{3^n}.$$

Le produit de Cauchy de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série $\sum w_n$ définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \frac{n+1}{3^n}.$$

Comme la série géométrique de raison $0 < 1/3 < 1$ est absolument convergente, la série $\sum w_n$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\Big) = \frac{1}{(1-1/3)^2} = \frac{9}{4}.$$

2. Cette fois, on pose

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n = q^n.$$

Le produit de Cauchy est la série $\sum w_n$ définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad w_n = (n+1)q^n.$$

Comme $0 < q < 1$, la série géométrique $\sum q^n$ est absolument convergente, donc la série $\sum w_n$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)q^n = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Avec le changement d'indice $n = k+1$, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} nq^n = \sum_{n=1}^{+\infty} nq^n &= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)q^{k+1} \\ &= q\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)q^k \end{aligned}$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

Variante. On peut aussi poser

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad u_n = v_n = q^n$$

mais $u_0 = q^0 = 1$ et $v_0 = 0$. Dans ce cas,

$$w_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k v_{n-k} + u_n v_0 = nq^n$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} w_n &= \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} q^n\Big)\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} q^n\Big)\\ &= \Big(\frac{1}{1-q}\Big)\Big(\frac{1}{1-q} - 1\Big) = \frac{q}{(1-q)^2}.\end{aligned}$$

3. On pose

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (n+1)q^n \quad \text{et} \quad v_n = q^n.$$

Dans ce cas, le produit de Cauchy a pour terme général

$$\begin{aligned}w_n &= \sum_{k=0}^{n} (k+1) q^k q^{n-k}\\ &= \Big(\sum_{k=1}^{n+1} k\Big)\, q^n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\, q^n.\end{aligned}$$

Comme la série géométrique $\sum q^n$ est absolument convergente ($0 < q < 1$) et que la série $\sum u_n$ est absolument convergente (on l'a démontré ci-dessus, grâce au Théorème de Cauchy), la série $\sum w_n$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\Big) = \frac{1}{(1-q)^2} \cdot \frac{1}{1-q}.$$

Par conséquent,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)q^n = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

4. On remarque que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad n^2 = (n+1)(n+2) - 3n - 2$$

(astuce attribuée à Newton *himself* dans le folklore). Par combinaison linéaire de séries convergentes, la série $\sum n^2 q^n$ est convergente et

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 q^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)q^n&\\ - 3\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} q^n&.\end{aligned}$$

Après quelques simplifications, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 q^n = \frac{q(1+q)}{(1-q)^3}.$$

❧ Avec le changement d'indice $k = n-1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{2^{n-1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)(k+2)\,(1/2)^k.$$

En appliquant la formule trouvée plus haut (possible, car $0 < 1/2 < 1$), on en déduit que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{2^{n-1}} = \frac{2}{(1-1/2)^3} = 16.$$

Solution 13 **04-13**

1. Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on pose
$$u_{p,q} = \frac{a^p b^q}{(p+q)!}.$$

❧ On note $\alpha = \max\{|a|, |b|\}$ et on remarque que
$$\forall\,(p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad |u_{p,q}| \leqslant \frac{\alpha^{p+q}}{(p+q)!}.$$

Nous allons démontrer que la famille de *réels positifs*
$$(v_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} = \left(\frac{\alpha^{p+q}}{(p+q)!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$$

est sommable. À cet effet, il est naturel de considérer la partition
$$\mathbb{N}^2 = \bigsqcup_{s\in\mathbb{N}} I_s$$

où les couples (p,q) sont regroupés selon la somme de leurs éléments :
$$I_s = \big\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \;:\; p+q = s\big\}.$$

Pour tout $s \in \mathbb{N}$, l'ensemble d'indices I_s est *fini*, donc les sommes partielles
$$\sigma_s = \sum_{(p,q)\in I_s} v_{p,q}$$

sont bien définies. On constate sans peine que
$$\sigma_s = (s+1)\cdot\frac{\alpha^s}{s!} > 0$$

et on en déduit que
$$\frac{\sigma_{s+1}}{\sigma_s} = \frac{s+2}{s+1}\cdot\frac{s!}{(s+1)!}\cdot\alpha \xrightarrow[s\to+\infty]{} 0.$$

Comme la limite est strictement inférieure à 1, la règle de D'Alembert nous assure que la série $\sum \sigma_s$ est absolument convergente.

D'après le Premier théorème de Fubini, la famille $(v_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est une famille sommable.

D'après le Théorème de comparaison, la famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est aussi une famille sommable.

2. Nous pouvons donc appliquer le Second théorème de Fubini pour calculer la somme de cette famille, en réutilisant la partition définie plus haut.

❧ Commençons par supposer que $a = b$, de telle sorte que
$$\forall\,s \in \mathbb{N},\ \forall\,(p,q) \in I_s, \quad u_{p,q} = \frac{a^s}{s!}.$$

On en déduit que
$$\forall\,s \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{(p,q)\in I_s} u_{p,q} = \frac{(s+1)a^s}{s!}$$

et que
$$\begin{aligned}
\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} &= \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(s+1)a^s}{s!}\\
&= \sum_{s=0}^{+\infty} s\cdot\frac{a^s}{s!} + \sum_{s=0}^{+\infty}\frac{a^s}{s!}\\
&= a\sum_{s=1}^{+\infty}\frac{a^{s-1}}{(s-1)!} + \sum_{s=0}^{+\infty}\frac{a^s}{s!}\\
&= (a+1)e^a.
\end{aligned}$$

❧ Pour $a \neq b$, la formule de la somme géométrique donne

$$\sum_{(p,q)\in I_s} u_{p,q} = \sum_{p=0}^{s} \frac{a^p b^{s-p}}{s!} = \frac{1}{s!}\left(\frac{b^{s+1}-a^{s+1}}{b-a}\right)$$

pour tout $s \in \mathbb{N}$ et le Second théorème de Fubini nous dit que

$$\begin{aligned}\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} u_{n,p} &= \sum_{s=0}^{+\infty}\Big(\sum_{(n,p)\in I_s} u_{n,p}\Big)\\ &= \frac{b}{b-a}\cdot\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{b^s}{s!} - \frac{a}{b-a}\cdot\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{a^s}{s!}\\ &= \frac{be^b - ae^a}{b-a}.\end{aligned}$$

Solution 14 **04-14**

On considère une famille de réels *positifs* indexée par l'ensemble dénombrable $I = \mathbb{N}^2$.

❧ Dans un premier temps, nous allons démontrer que cette famille est sommable en appliquant le premier théorème de Fubini à la partition

$$I = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

où $I_n = \big\{(i,j) \in I \ :\ i+j = n\big\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (tranches diagonales).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble d'indices I_n est fini, donc on peut poser

$$s_n = \sum_{(i,j)\in I_n} a_{i,j}.$$

Quel que soit $(i,j) \in I_n$, le terme $a_{i,j}$ est toujours égal à $n/2^n$ et comme l'ensemble I_n compte $(n+1)$ indices :

$$(0,n), (1,n-1), \dots, (n-1,1), (n,0)$$

on en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad s_n = \frac{n(n+1)}{2^n}.$$

On en déduit que

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{n+2}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} < 1$$

ce qui prouve que la série $\sum s_n$ est absolument convergente (règle de D'Alembert), c'est-à-dire que la famille $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.

D'après le premier théorème de Fubini, la famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in I}$ est donc sommable.

❧ Comme la famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in I}$ est sommable, on peut appliquer le second théorème de Fubini pour calculer la somme :

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in I} a_{i,j} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{(i,j)\in I_n} a_{i,j}\Big)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n}\\ &= \frac{1}{(1-1/2)^3} = 8.\end{aligned}$$

✍ *Le calcul explicite de la dernière somme peut se déduire du Théorème sur le produit de Cauchy (cf* ***[04-12]****) ou d'un des principaux résultats du cours sur les séries entières.*

❧ On pouvait aussi calculer la somme en appliquant le second théorème de Fubini avec d'autres partitions de I.

Pour tout $(i,j) \in I$, on pose

$$b_{i,j} = \frac{i}{2^{i+j}} \quad \text{et} \quad c_{i,j} = \frac{j}{2^{i+j}}$$

de telle sorte que

$$\forall\,(i,j) \in I, \quad 0 \leqslant b_{i,j} \leqslant a_{i,j} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant c_{i,j} \leqslant a_{i,j}.$$

Comme la famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in I}$ est sommable, on en déduit que les deux familles $(b_{i,j})_{(i,j)\in I}$ et $(c_{i,j})_{(i,j)\in I}$ sont sommables (théorème de comparaison).

En appliquant le second théorème de Fubini, on obtient

$$\sum_{(i,j)\in I} b_{i,j} = \sum_{i=0}^{+\infty}\Big(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{i}{2^{i+j}}\Big)$$

(partition de I au moyen des $K_i = \{(i,j),\ j \in \mathbb{N}\}$, tranches verticales) ainsi que

$$\sum_{(i,j)\in I} c_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty}\Big(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{j}{2^{j+i}}\Big)$$

(partition de I au moyen des $L_j = \{(i,j),\ i \in \mathbb{N}\}$, tranches horizontales). Les indices étant muets, on en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in I} b_{i,j} = \sum_{(i,j)\in I} c_{i,j} &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i}{2^i}\Big(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^j}\Big)\\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{i}{2^{i-1}}\\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i+1}{2^i}.\end{aligned}$$

En interprétant cette somme au moyen d'un produit de Cauchy (cf **[04-12]**), on trouve qu'elle est égale à $2^2 = 4$ et finalement

$$\sum_{(i,j)\in I} a_{i,j} = \sum_{(i,j)\in I} b_{i,j} + \sum_{(i,j)\in I} c_{i,j} = 2 \times 4 = 8.$$

Solution 15 **04-15**

1. D'après **[Ch.4 - 27.3]**,

$$\zeta(n) = 1 + \frac{1}{2^n} + \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{2^n} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{3^n}\Big).$$

❧ On en déduit que

$$\zeta(n) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} (1/2)^n.$$

Comme la série *géométrique* $\sum (1/2)^n$ est absolument convergente, la série $\sum [\zeta(n) - 1]$ est donc absolument convergente.

❧ Il est clair que

$$\frac{\zeta(n)-1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\big(\zeta(n) - 1\big)$$

et comme $\sum [\zeta(n) - 1]$ est *absolument* convergente, la série

$$\sum \frac{\zeta(n)-1}{n}$$

est absolument convergente.

❧ Enfin, l'Astuce taupinale nous indique que

$$\frac{(-1)^n\zeta(n)}{n} = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n[\zeta(n)-1]}{n}.$$

La série

$$\sum \frac{(-1)^n\zeta(n)}{n}$$

est donc convergente, en tant que somme de la série harmonique alternée

$$\sum \frac{(-1)^n}{n}$$

(série alternée et $1/n$ tend vers 0 en décroissant) et d'une série absolument convergente (étudiée précédemment).

2. Nous allons utiliser la Formule d'Euler, qui donne un développement asymptotique des nombres harmoniques :

$$H_N = \ell n\, N + \gamma + o(1) \tag{15}$$

lorsque N tend vers $+\infty$. (Voir Chapitre 4 - III.3)

❧ Nous allons aussi utiliser une formule issue du cours sur les Séries entières :

$$\forall\, x \in\,]-1, 1[, \quad -\ell n(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}. \tag{16}$$

Cette formule est vraie encore pour $x = -1$:

$$-\ell n\, 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}. \tag{17}$$

❧ **(a). Sommabilité de deux familles réelles**

Convenons de noter $I = \mathbb{N}^{**} \times \mathbb{N}^{**}$ où (notation très personnelle !)

$$\mathbb{N}^{**} = \mathbb{N}^* \setminus \{1\},$$

et posons

$$x_{k,n} = \frac{1}{nk^n} \quad \text{et} \quad y_{k,n} = (-1)^n x_{k,n} = \frac{(-1)^n}{nk^n}$$

pour tout $(k, n) \in I$.

❧ La famille $(x_{k,n})_{(k,n)\in I}$ est une famille de *réels positifs*. Nous allons démontrer qu'elle est sommable grâce au Premier théorème de Fubini.

Pour cela, nous considérons la partition

$$I = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^{**}} I_n \tag{18}$$

où $I_n = \{(k, n) \in I,\ k \in \mathbb{N}^{**}\}$.

Pour tout entier $n \geqslant 2$, la sous-famille

$$(x_{k,n})_{(k,n)\in I_n} = \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{k^n}\right)_{k\in\mathbb{N}^{**}}$$

est sommable puisque, au facteur constant $1/n$ près, c'est une série de Riemann d'exposant $n \geqslant 2$. Sa somme est égale à

$$s_n = \sum_{k=2}^{+\infty} x_{k,n} = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^n} = \frac{1}{n} \cdot [\zeta(n) - 1]$$

et on a montré précédemment que la série $\sum s_n$ était absolument convergente.

D'après le Premier théorème de Fubini, la famille $(x_{k,n})_{(k,n)\in I}$ est bien sommable et

$$\sum_{(k,n)\in I} x_{k,n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n) - 1}{n}. \tag{19}$$

❧ Comme $|y_{k,n}| = x_{k,n}$ pour tout $(k, n) \in I$ et que, d'après l'étude précédente, la famille $(x_{k,n})_{(k,n)\in I}$ est sommable, la famille $(y_{k,n})_{(k,n)\in I}$ est sommable.

❧ **(b). Calcul de la première somme**

Considérons maintenant une autre partition :

$$I = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}^{**}} J_k \tag{20}$$

où $J_k = \{(k, n) \in I,\ n \in \mathbb{N}^{**}\}$.

Pour tout entier $k \geqslant 2$, en tant que sous-famille d'une famille sommable, la famille $(x_{k,n})_{(k,n)\in J_k}$ est sommable et d'après (16), sa somme s'exprime comme suit :

$$\sigma_k = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{nk^n} = \frac{-1}{k} - \ell n\Big(1 - \frac{1}{k}\Big).$$

De plus, d'après le Théorème de Fubini (le Premier ou le Second, puisque le terme général est positif), la famille $(\sigma_k)_{k\in\mathbb{N}^{**}}$ est sommable et

$$\sum_{(k,n)\in I} x_{k,n} = \sum_{k=2}^{+\infty} \sigma_k = -\sum_{k=2}^{+\infty}\Big(\frac{1}{k} + \ell n\,\frac{k-1}{k}\Big). \tag{21}$$

Par télescopage partiel,

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{N}\Big(\frac{1}{k} + \ell n\,\frac{k-1}{k}\Big) &= \sum_{k=2}^{N}\frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{N}[\ell n(k-1) - \ell n\, k] \\ &= (H_N - 1) + (\ell n\, 1 - \ell n\, N) \\ &\underset{N\to+\infty}{=} (\gamma - 1) + o(1)\end{aligned}$$

d'après la Formule d'Euler (15). Finalement, en combinant (19) et (21),

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n)-1}{n} &= \sum_{(k,n)\in I} x_{k,n} \\ &= -\sum_{k=2}^{+\infty}\Big(\frac{1}{k} + \ell n\,\frac{k-1}{k}\Big) = 1 - \gamma.\end{aligned}$$

❧ **(c). Calcul de la deuxième somme**

On l'a vu plus haut, la famille $(y_{k,n})_{(k,n)\in I}$ est sommable. En appliquant le Second théorème de Fubini aux deux partitions (18) et (20), on arrive à

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\Big[\frac{(-1)^n}{n}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^n}\Big] = \sum_{k=2}^{+\infty}\Big[\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1/k)^n}{n}\Big]$$

c'est-à-dire (avec (16))

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{\zeta(n)-1}{n} = \sum_{k=2}^{+\infty}\Big[-\frac{-1}{k} - \ell n\Big(1 - \frac{-1}{k}\Big)\Big].$$

D'après (17),

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{\zeta(n)-1}{n} &= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n\zeta(n)}{n} - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n\zeta(n)}{n} - (1 - \ell n\, 2).\end{aligned}$$

D'autre part, avec le télescopage partiel habituel,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=2}^{N}\Big[-\frac{-1}{k} - \ell n\Big(1 - \frac{-1}{k}\Big)\Big] \\ &= \sum_{k=2}^{N}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{N-1}\ell n\Big(\frac{k+1}{k}\Big) - \ell n\Big(1 + \frac{1}{N}\Big) \\ &= (H_N - 1) - [\ell n\, N - \ell n\, 2] - \ell n\Big(1 + \frac{1}{N}\Big) \\ &= (\ell n\, 2 - 1 + \gamma) + o(1) \qquad \text{(pour } n \to +\infty)\end{aligned}$$

avec la formule d'Euler (15). On obtient ainsi

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n\zeta(n)}{n} = \gamma.$$

Solution 16 **04-16**

Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$.

❧ Quels que soient les entiers n et q, on pose

$$I_n = \{(n, q),\ q \in \mathbb{N}\} \quad \text{et} \quad J_q = \{(n, q),\ n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Il est clair que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(J_q)_{q\in\mathbb{N}}$ sont deux partitions de $I = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.

❧ Nous allons démontrer que la famille $(u_{n,q})_{(n,q)\in I}$ de terme général

$$u_{n,q} = a^{n(2q+1)}$$

est sommable en appliquant le (premier) théorème de Fubini à la famille $(v_{n,q})_{(n,q)\in I}$ de terme général *positif*

$$v_{n,q} = |u_{n,q}| = |a|^{n(2q+1)} = (|a|^{2q+1})^n.$$

Pour tout $q \in \mathbb{N}$, la série $\sum_n v_{n,q}$ est absolument convergente en tant que série géométrique de raison $0 \leqslant |a|^{2q+1} < 1$, donc la famille $(v_{n,q})_{(n,q)\in J_q}$ est sommable et sa somme est égale à

$$V_q = \sum_{n=1}^{+\infty} v_{n,q} = \frac{|a|^{2q+1}}{1 - |a|^{2q+1}}.$$

Comme $|a| < 1$, alors

$$V_q \underset{q\to+\infty}{\sim} \frac{|a|^{2q+1}}{1} = |a| \cdot (|a|^2)^q$$

et comme la série géométrique de raison $0 \leqslant |a|^2 < 1$ est absolument convergente, la série $\sum V_q$ est absolument convergente.

D'après le théorème de Fubini, la famille $(u_{n,q})_{(n,q)\in I}$ est donc sommable.

❧ Nous pouvons donc calculer la somme de cette famille en appliquant de deux manières différentes le (second) théorème de Fubini.

Pour tout $q \in \mathbb{N}$, la famille $(u_{n,q})_{(n,q)\in J_q}$ est sommable (en tant que sous-famille d'une famille sommable). Comme

$$\forall\, n \geqslant 1, \qquad u_{n,q} = (a^{2q+1})^n,$$

la somme de cette famille est égale à

$$s_q = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,q} = \frac{a^{2q+1}}{1 - a^{2q+1}}.$$

Pour tout $n \geqslant 1$, la famille $(u_{n,q})_{(n,q)\in I_n}$ est sommable (en tant que sous-famille d'une famille sommable). Comme

$$\forall\, q \in \mathbb{N}, \quad u_{n,q} = a^n \cdot (a^{2n})^q,$$

la somme de cette famille est égale à

$$\sigma_n = \sum_{q=0}^{+\infty} u_{n,q} = a^n \cdot \frac{1}{1 - a^{2n}}.$$

D'après le théorème de Fubini, les familles $(s_q)_{q\in\mathbb{N}}$ et $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ sont sommables et leurs sommes sont toutes les deux égales à la somme de la famille sommable $(u_{n,q})_{(n,q)\in I}$. Donc

$$\sum_{(n,q)\in I} u_{n,q} = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{a^{2q+1}}{1 - a^{2q+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{1 - a^{2n}}$$

et le changement d'indice $p = q + 1$ montre que

$$\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{a^{2q+1}}{1 - a^{2q+1}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{a^{2p-1}}{1 - a^{2p-1}}.$$

Solution 17 **04-17**

1. Pour tout $(k,n) \in I$, on pose $a_{k,n} = |x_{k,n}|$. Par définition, la famille $(x_{k,n})_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si, et seulement si, la famille $(a_{k,n})_{(k,n)\in I}$ est sommable.

Comme les $a_{k,n}$ sont des **réels positifs**, le premier Théorème de Fubini va nous permettre de voir si cette famille est sommable.

► Considérons la partition

$$I = \bigsqcup_{k\geqslant 1} I^k$$

où on a posé

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad I^k = \{(k,n),\ n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la sous-famille $(a_{k,n})_{(k,n)\in I^k}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum_n a_{k,n}$ est convergente.

Or le terme général de cette série est nul à partir d'un certain rang (précisément pour tout $n > k$), donc la série est convergente. On pose alors

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \sigma_k = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{k,n} = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k}.$$

Il est alors clair que la série $\sum \sigma_k$ est divergente (série harmonique), ce qui prouve que la famille $(a_{k,n})_{(k,n)\in I}$ n'est pas sommable et par conséquent que la famille $(x_{k,n})_{(k,n)\in I}$ n'est pas sommable.

► On peut aussi considérer la partition

$$I = \bigsqcup_{n\geqslant 1} I_n$$

où on a posé

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \{(k,n),\ k \in \mathbb{N}^*\}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la sous-famille $(a_{k,n})_{(k,n)\in I_n}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum_k a_{k,n}$ (de terme général positif) est convergente.

Comme il s'agit de la série de Riemann $\sum \frac{1}{k^2}$ (privée des $(n-1)$ premiers termes), c'est bien une série convergente et on peut donc poser

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \tau_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

D'après le premier Théorème de Fubini, la famille $(a_{k,n})_{(k,n)\in I}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum \tau_n$ est convergente. Or (comparaison $\sum / \int$ classique)

$$\tau_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

donc la série $\sum \tau_n$ est divergente.

On a ainsi re-démontré que la famille $(x_{k,n})_{(k,n)\in I}$ n'était pas sommable, mais d'une manière qui demandait d'être un peu plus savant.

2. a. La série $\sum(-1)^k/k^2$ est une série alternée et comme la suite de terme général $|(-1)^k/k^2| = 1/k^2$ tend vers 0 en décroissant, on peut appliquer le Critère spécial des séries alternées.

D'après ce théorème, u_n est bien défini en tant que reste d'ordre $(n-1)$ d'une série convergente; il est du signe du premier terme négligé : $(-1)^n/n^2$, c'est-à-dire du signe de $(-1)^n$ et

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad |u_n| \leqslant \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}.$$

D'après le Théorème de comparaison pour les séries de terme général positif, la série $\sum|u_n|$ est convergente, donc la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

2. b. Soit $N \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=n}^{N}\frac{(-1)^k}{k^2} &= \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k}{k^2}\cdot \mathbb{1}_{[1\leqslant n\leqslant k\leqslant N]}\\ &= \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^k}{k^2}\cdot \mathbb{1}_{[1\leqslant n\leqslant k\leqslant N]}\\ &= \sum_{k=1}^{N}\underbrace{\sum_{n=1}^{k}\frac{(-1)^k}{k^2}}_{(\star)}\\ &= \sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k}{k}\end{aligned}$$

puisque $(\star)$ est une somme de k termes tous égaux.

2. c. On doit remarquer que

$$\forall\, 1\leqslant n\leqslant N,\quad u_n = \sum_{k=n}^{N}\frac{(-1)^k}{k^2} + u_{N+1}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} u_n &= Nu_{N+1} + \sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{k=n}^{N}\frac{(-1)^k}{k^2}\right)\\ &= Nu_{N+1} + \sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k}{k}\end{aligned}$$

d'après la question précédente.

2. d. Comme $|u_n| \leqslant {}^1/_{n^2}$ pour tout $n \geqslant 1$, on en déduit que

$$\lim_{N\to+\infty} Nu_{N+1} = 0.$$

Par ailleurs, la série $\sum(-1)^k/k$ vérifie aussi les conditions d'application du Critère spécial des séries alternées, donc elle est convergente.

Par passage à la limite dans la relation précédente, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}$$

et on sait que cette dernière somme est égale à $-\ell n\, 2$ (résultat classique).

✍ *On a donc démontré que les deux sommes*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} x_{k,n} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \qquad \textit{et} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} x_{k,n} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}$$

étaient égales ***bien que*** *la famille $(x_{k,n})_{(k,n)\in I}$ ne soit pas sommable !*

❧ *Le second Théorème de Fubini énonce donc une* ***condition suffisante*** *pour permuter deux signes $\sum$, mais il ne s'agit pas d'une condition nécessaire — alors que le premier Théorème de Fubini énonce une* ***condition nécessaire et suffisante*** *pour qu'une famille de* ***réels positifs*** *soit sommable.*

Solution 18 — 04-19

Rappelons les deux théorèmes que nous allons employer dans la suite. Un peu de rigueur ne peut pas nuire...

Critère spécial des séries alternées.

Si $\sum u_n$ est une série alternée telle que $|u_n|$ tende vers 0 en décroissant, alors la série $\sum u_n$ est convergente.

Théorème de comparaison par équivalence.

Si $u_n \sim v_n$ lorsque n tend vers $+\infty$ et si les v_n sont de signe constant, alors la série $\sum u_n$ est convergente si, et seulement si, la série $\sum v_n$ est convergente.

❧ Si $\alpha > 0$, les deux séries étudiées sont alternées et leurs termes généraux tendent bien vers 0. En revanche, la *décroissance* de $|u_n|$ n'est pas évidente, ce qui doit rendre prudent : le Critère spécial des séries alternées ne s'applique peut-être pas !

❧ Pour tout $n \geqslant 2$, on pose

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}.$$

Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} \cdot \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^{-1} \\ &= \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} \cdot \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right] \\ &= \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} - \frac{1}{n^{3\alpha/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3\alpha/2}}\right). \end{aligned} \tag{Eq. 1}$$

On pose alors

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad v_n = u_n - \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}}$$

de telle sorte que

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} + v_n$$

et que, d'après (Eq. 1),

$$v_n \sim \frac{-1}{n^{3\alpha/2}} \tag{Eq. 2}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Par ailleurs, la série (de Riemann)

$$\sum \frac{1}{n^{3\alpha/2}}$$

est une série dont le terme général est de signe constant et on sait que cette série converge si, et seulement si, $3\alpha/2 > 1$, c'est-à-dire si $\alpha > 2/3$. On déduit alors de la relation de comparaison (Eq. 2) que la série $\sum v_n$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 2/3$ (Théorème de comparaison par équivalence).

Pour tout $\alpha > 0$, le Critère spécial des séries alternées s'applique évidemment à la série

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}},$$

qui est donc convergente. Ainsi donc,

— si $\alpha > 2/3$, la série $\sum u_n$ est convergente (somme de deux séries convergentes) ;
— si $0 < \alpha \leqslant 2/3$, la série $\sum u_n$ est divergente (somme d'une série convergente et d'une série divergente) ;
— si $\alpha = 0$, le dénominateur s'annule pour tous les entiers n impairs !
— si $\alpha < 0$, la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

Finalement, la série $\sum u_n$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 2/3$.

✍ *Pour des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ dont les termes généraux* ne sont pas *de signe constant, le Théorème de comparaison dit seulement que : si $a_n \sim b_n$, alors la série $\sum a_n$ est* absolument convergente *si, et seulement si, la série $\sum b_n$ est* absolument convergente.

En appliquant ce théorème à la relation :

$$u_n \sim \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}},$$

on peut seulement *démontrer que la série $\sum u_n$ est absolument convergente pour tout $\alpha > 2$ et qu'elle* n'est pas *absolument convergente pour $\alpha \leqslant 2$. Il est* impossible *d'en déduire que la série est (semi-)convergente dans le cas $3/2 < \alpha \leqslant 2$.*

❧ La même méthode s'applique pour la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}.$$

Si $\alpha > 0$, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\Big(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\Big)^{-1} \\ &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\Big[1-\frac{(-1)^n}{n^\alpha}+o\Big(\frac{1}{n^\alpha}\Big)\Big] \\ &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha}-\frac{1}{n^{2\alpha}}+o\Big(\frac{1}{n^{2\alpha}}\Big). \end{aligned}$$

On pose donc

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad v_n = u_n - \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

de telle sorte que

$$v_n \sim \frac{-1}{n^{2\alpha}}$$

lorsque n tend vers $+\infty$. La série de Riemann

$$\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$$

est une série dont le terme général est de signe constant. Donc, d'après le Théorème de comparaison par équivalence, la série $\sum v_n$ est convergente si, et seulement si, la série de Riemann

$$\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$$

est convergente, c'est-à-dire si $\alpha > 1/2$.

Par ailleurs, il est clair que la série

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

converge pour tout $\alpha > 0$ (d'après le Critère spécial des séries alternées).

En conclusion, puisque

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + v_n,$$

la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1/2$ (même discussion que plus haut).

Solution 19 **04-20**

Comme u_n est un produit de réels *strictement positifs*,

$$\ln u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\Big(1-\frac{1}{3k}\Big)$$

et comme $\ln(1-x) \sim -x$ lorsque x tend vers 0, il semble logique de comparer $\ln u_n$ à la somme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{3k}.$$

❧ On pose donc

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad v_k = \ln\Big(1-\frac{1}{3k}\Big)+\frac{1}{3k}$$

de telle sorte que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \ln u_n = \frac{-1}{3}H_n + \sum_{k=1}^{n} v_k,$$

où on a noté H_n, la n-ième somme partielle de la série harmonique.

D'après le développement limité à l'ordre deux de $\ln(1+x)$ au voisinage de $x=0$,

$$v_k = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{k^2}\Big)$$

lorsque k tend vers $+\infty$. Comme la série de Riemann $\sum 1/k^2$ est une série *convergente* de terme général *positif*, la série $\sum v_k$ est *absolument convergente*, et donc convergente. On en déduit que

$$\ln u_n = \frac{-1}{3}H_n + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

pour tout $n \geqslant 1$, puis que

$$\ell n\, u_n = \frac{-1}{3}\big[\ell n\, n + \gamma + \mathcal{o}(1)\big] + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k + \mathcal{o}(1)$$

d'après le développement asymptotique "bien connu" des nombres harmoniques et le fait que le reste d'une série convergente soit *toujours* $\mathcal{o}(1)$.

En posant

$$a = \frac{-1}{3} \quad \text{et} \quad b = \frac{-\gamma}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k,$$

on obtient bien que

$$\ell n\, u_n = a\,\ell n\, n + b + \mathcal{o}(1)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

❧ En posant maintenant $K = e^b$, on en déduit que

$$u_n = \exp[\ell n\, u_n] = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \times K \times e^{\mathcal{o}(1)}$$

et comme exp tend vers 1 au voisinage de 0, on en déduit enfin que

$$u_n \sim \frac{K}{\sqrt[3]{n}}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Comme la série de Riemann

$$\sum \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

est une série *divergente* de terme général *positif*, cette relation démontre que la série $\sum u_n$ est divergente.

✍ *L'expression $\mathcal{o}(1)$ indique une quantité* (variable...) *qui tend vers 0. Comme la fonction* exp *tend vers 1 au voisinage de 0, l'expression $e^{\mathcal{o}(1)}$ indique une quantité qui tend vers 1. Cette remarque est très utile pour mettre en évidence une équivalence, puisque :*

$$a_n \sim b_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad b_n = a_n \times e^{\mathcal{o}(1)}.$$

✍ *Il faut toujours savoir* quel est le paramètre variable dans une expression...

Lorsqu'on écrit

$$\ell n\Big(1 - \frac{1}{3k}\Big) \sim \frac{-1}{3k}$$

il est clair que c'est le paramètre k qui varie (et qui tend vers $+\infty$).

Lorsqu'on écrit

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ell n\, n$$

il est clair que c'est le paramètre n qui varie (et qui tend vers $+\infty$). Le paramètre k, en tant que variable muette *(ou* variable locale*), n'existe tout simplement pas...*

Lorsqu'on écrit

$$v_k = \mathcal{o}\Big(\frac{1}{k}\Big) \implies \sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{o}\Big(\frac{1}{k}\Big)$$

*le paramètre variable dans la première relation est k tandis que le paramètre variable dans la seconde est n. Écrire une telle implication est donc une monstrueuse absurdité. Et si vous lisez votre cours avec un peu de soin, vous verrez que cela n'a **rien** à voir avec un théorème de sommation des relations de comparaison.*

Solution 20 **04-21**

1. On revient à la définition de la somme en commençant par le cas des familles réelles positives, puis en traitant le cas des familles réelles quelconques et en étendant le résultat aux familles complexes.
❧ Si $a_i \in \mathbb{R}_+$ pour tout $i \in I$, alors (par définition)

$$S = \sup_{J \in \mathfrak{P}_0(I)} \sum_{i \in J} a_i$$

où $\mathfrak{P}_0(I)$ est l'ensemble des parties **finies** de I. Par définition de la borne supérieure,

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, J_\varepsilon \in \mathfrak{P}_0(I), \quad S - \varepsilon \leqslant \sum_{i \in J_\varepsilon} a_i \leqslant S$$

et comme les a_i sont tous positifs,

$$S - \varepsilon \leqslant \sum_{i \in J} a_i \leqslant S$$

pour toute partie finie $J \in \mathfrak{P}_0(I)$ telle que $J_\varepsilon \subset J$.
❧ Si les a_i sont des réels de signe quelconque, alors les deux familles de réels positifs $(a_i^+)_{i \in I}$ et $(a_i^-)_{i \in I}$ sont sommables et, par définition,

$$S = \sum_{i \in I} a_i^+ - \sum_{i \in I} a_i^-.$$

On applique ce qui précède aux deux familles positives sommables : pour $\varepsilon > 0$, il existe deux parties $J_\varepsilon^+ \in \mathfrak{P}_0(I)$ et $J_\varepsilon^- \in \mathfrak{P}_0(I)$ telles que

$$\sum_{i \in I} a_i^+ - \varepsilon \leqslant \sum_{i \in J_\varepsilon^+} a_i^+ \leqslant \sum_{i \in I} a_i^+ \quad \text{et} \quad \sum_{i \in I} a_i^- - \varepsilon \leqslant \sum_{i \in J_\varepsilon^-} a_i^- \leqslant \sum_{i \in I} a_i^-.$$

En posant $J_\varepsilon = J_\varepsilon^+ \cup J_\varepsilon^- \in \mathfrak{P}_0(I)$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} a_i^+ - \varepsilon \leqslant \sum_{i \in J_\varepsilon^+} a_i \leqslant \sum_{i \in J_\varepsilon} a_i^+ \leqslant \sum_{i \in J} a_i^+ \leqslant \sum_{i \in I} a_i^+ \\ \text{et} \quad \sum_{i \in I} a_i^- - \varepsilon \leqslant \sum_{i \in J_\varepsilon^-} a_i^- \leqslant \sum_{i \in J_\varepsilon} a_i^- \leqslant \sum_{i \in J} a_i^- \leqslant \sum_{i \in I} a_i^- \end{aligned}$$

pour toute partie $J \in \mathfrak{P}_0(I)$ telle que $J_\varepsilon \subset J$.
Par différence,

$$S - \varepsilon \leqslant \sum_{i \in J} a_i \leqslant S + \varepsilon$$

pour toute partie $J \in \mathfrak{P}_0(I)$ telle que $J_\varepsilon \subset J$.
❧ Enfin, si les a_i sont des nombres complexes, alors les deux familles réelles $(\mathfrak{Re}\, a_i)_{i \in I}$ et $(\mathfrak{Im}\, a_i)_{i \in I}$ sont sommables et, par définition,

$$S = \sum_{i \in I} \mathfrak{Re}\, a_i + \mathbf{i} \sum_{i \in I} \mathfrak{Im}\, a_i.$$

✍ *Pour éviter de confondre avec l'indice de sommation* i, *on note ici* $\pm\mathbf{i}$ *les racines carrées complexes de* -1.

À nouveau, on applique ce qui précède aux deux familles réelles sommables : pour $\varepsilon > 0$, il existe deux parties finies $J_\varepsilon^r \in \mathfrak{P}_0(I)$ et $J_\varepsilon^i \in \mathfrak{P}_0(I)$ telles que

$$\begin{aligned} \forall\, J \in \mathfrak{P}_0(I), \quad J_\varepsilon^r \subset J \implies \left| \sum_{i \in J} \mathfrak{Re}\, a_i - \sum_{i \in I} \mathfrak{Re}\, a_i \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{et} \quad \forall\, J \in \mathfrak{P}_0(I), \quad J_\varepsilon^i \subset J \implies \left| \sum_{i \in J} \mathfrak{Im}\, a_i - \sum_{i \in I} \mathfrak{Im}\, a_i \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

En posant $F = J_\varepsilon^r \cup J_\varepsilon^i \in \mathfrak{P}_0(I)$, on a (inégalité triangulaire)

$$\left| \sum_{i \in J} a_i - S \right| \leqslant \left| \sum_{i \in J} \mathfrak{Re}\, a_i - \sum_{i \in I} \mathfrak{Re}\, a_i \right| + \left| \sum_{i \in J} \mathfrak{Im}\, a_i - \sum_{i \in I} \mathfrak{Im}\, a_i \right| \leqslant \varepsilon$$

pour toute partie $J \in \mathfrak{P}_0(I)$ telle que $F \subset J$.

2. On suppose que $a_i \neq 0$ pour tout $i \in I$.

✍ *Supposer que l'index I est en fait le* ***support*** *de la famille ne change ni la nature de la famille (sommable ou non), ni la somme de cette famille (si elle est sommable).*

On décompose l'index I en quatre sous-index :

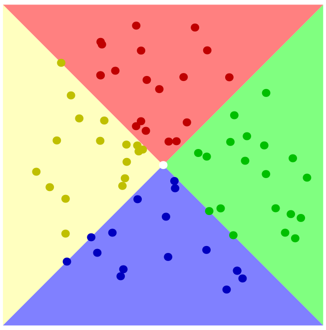
$$I_1 = \left\{i \in I \ :\ {}^{-\pi}\!/_4 < \operatorname{Arg}(a_i) \leqslant {}^{\pi}\!/_4\right\} \qquad I_2 = \left\{i \in I \ :\ {}^{\pi}\!/_4 < \operatorname{Arg}(a_i) \leqslant {}^{3\pi}\!/_4\right\}$$
$$I_3 = \left\{i \in I \ :\ {}^{3\pi}\!/_4 < \operatorname{Arg}(a_i) \leqslant {}^{5\pi}\!/_4\right\} \qquad I_4 = \left\{i \in I \ :\ {}^{5\pi}\!/_4 < \operatorname{Arg}(a_i) \leqslant {}^{7\pi}\!/_4\right\}$$

de telle sorte que chaque indice $i \in I$ appartienne à un, et un seul, sous-index I_k.

✍ *Comme les a_i ne sont pas nuls et que $]{-\pi}/4, 7\pi/4]$ est un intervalle semi-ouvert de longueur 2π, on a bien défini une partition de I : on a regroupé les complexes a_i en fonction du quart de plan dans lequel ils se trouvent.*

❧ De la sorte,

$$\text{si } i \in I_1,\text{ alors } \mathfrak{Re}\, a_i \geqslant \frac{|a_i|}{\sqrt{2}}, \qquad \text{si } i \in I_2,\text{ alors } \mathfrak{Im}\, a_i \geqslant \frac{|a_i|}{\sqrt{2}},$$
$$\text{si } i \in I_3,\text{ alors } \mathfrak{Re}\, a_i \leqslant -\frac{|a_i|}{\sqrt{2}}, \qquad \text{et si } i \in I_4,\text{ alors } \mathfrak{Im}\, a_i \leqslant -\frac{|a_i|}{\sqrt{2}}.$$



❧ Pour toute partie finie $F \subset I_1$,

$$\left|\sum_{i \in F} a_i\right| \geqslant \left|\mathfrak{Re} \sum_{i \in F} a_i\right| = \sum_{i \in F} \mathfrak{Re}\, a_i \geqslant \sum_{i \in F} \frac{|a_i|}{\sqrt{2}}.$$

De manière analogue, pour toute partie finie F contenue dans I_2, dans I_3 ou dans I_4,

$$\left|\sum_{i \in F} a_i\right| \geqslant \sum_{i \in F} \frac{|a_i|}{\sqrt{2}}.$$

❧ Par inégalité triangulaire, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et toute partie finie F contenue dans l'un des sous-index I_k,

$$\left|z - \sum_{i \in F} a_i\right| \geqslant \left|\sum_{i \in F} a_i\right| - |z| \geqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i \in F} |a_i|\right) - |z|.$$

❧ Comme la famille $(|a_i|)_{i \in I}$ n'est pas sommable, alors il existe (au moins) un entier $1 \leqslant k \leqslant 4$ tel que sous-famille $(|a_i|)_{i \in I_k}$ ne soit pas sommable (sommation par paquets — avec un nombre fini de paquets).

Pour tout $R > 0$, il existe donc une partie finie F contenue dans l'un des sous-index I_k telle que

$$\left|z - \sum_{i \in F} a_i\right| \geqslant R.$$

✍ *On a ainsi démontré (par contraposée) que, s'il existe un nombre complexe S tel que*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, F \subset I, \qquad \left|S - \sum_{i \in J} a_i\right| \leqslant \varepsilon$$

pour toute partie finie J telle que $F \subset J \subset I$, alors la famille $(a_i)_{i \in I}$ est sommable.

Solution 21 **04-22**

Tout d'abord, comme on étudie une famille de réels *positifs*, la somme

$$S_\sigma = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\sigma(n)}{n^2}$$

est bien définie (égale à $+\infty$ si, et seulement si, la famille n'est pas sommable).

❧ Considérons deux entiers $1 \leqslant n < p$ et supposons que

$$1 \leqslant \sigma(p) < \sigma(n).$$

On vérifie alors sans peine que

$$\frac{\sigma(n)}{n^2} + \frac{\sigma(p)}{p^2} \geqslant \frac{\sigma(p)}{n^2} + \frac{\sigma(n)}{p^2}. \tag{$\star$}$$

✍ *Si on interprète ces deux quantités comme des barycentres, le résultat est intuitivement clair : c'est en attribuant la plus forte pondération à la plus grande valeur qu'on obtient la plus grande moyenne.*

Comme $\sigma(n) > \sigma(p)$, la moyenne pondérée du système

$$\left[\left(1/n^2,\ \sigma(n)\right),\ \left(1/p^2,\ \sigma(p)\right)\right]$$

(où la plus grande valeur : $1/n^2$ est affectée du plus grand poids : $\sigma(n)$) est supérieure à la moyenne pondérée du système

$$\left[\left(1/n^2,\ \sigma(p)\right),\ \left(1/p^2,\ \sigma(n)\right)\right]$$

(où la plus petite valeur : $1/p^2$ est affectée du plus petit poids : $\sigma(n)$).

❧ Avec les notations précédentes, notons τ, la transposition de $\mathbb{N}^*$ qui échange les valeurs $\sigma(n)$ et $\sigma(p)$.

On a donc

$$\tau \circ \sigma(n) = \sigma(p) \qquad \text{et} \qquad \tau \circ \sigma(p) = \sigma(n).$$

Comme σ est *injective*,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^* \setminus \{n,\ p\}, \quad \sigma(k) \notin \{\sigma(n),\ \sigma(p)\} \qquad \text{et} \qquad \tau \circ \sigma(k) = \sigma(k).$$

On a donc

$$S_\sigma = \sum_{k \notin \{n,p\}} \frac{\sigma(k)}{k^2} + \frac{\sigma(n)}{n^2} + \frac{\sigma(p)}{p^2}$$

$$S_{\tau\circ\sigma} = \sum_{k \notin \{n,p\}} \frac{\sigma(k)}{k^2} + \frac{\sigma(p)}{n^2} + \frac{\sigma(n)}{p^2}$$

et on déduit de $(\star)$ que

$$S_\sigma \geqslant S_{\tau\circ\sigma}. \tag{$\dagger$}$$

✍ *En "remettant deux termes dans l'ordre", on a minoré la somme S_σ. Pourquoi s'arrêter à deux termes seulement ?*

❧ Fixons un entier $N \geqslant 2$. Il existe une application injective

$$\sigma_N\ :\ \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$$

telle que

$$\left\{\sigma(k),\ k \in \mathbb{N}^*\right\} = \left\{\sigma_N(k),\ k \in \mathbb{N}^*\right\}$$

et que

$$1 \leqslant \sigma_N(1) < \cdots < \sigma_N(N) \qquad \text{avec} \qquad \forall\, k > N, \quad \sigma_N(k) > \sigma_N(N).$$

❧ L'ensemble des valeurs prises par σ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$, donc il admet un plus petit élément n_1 (Axiome de bon ordre). Par injectivité, il existe un unique entier $k_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma(k_1) = n_1$.

Si $\sigma(1) = n_1$, on ne change rien.

Sinon, on compose σ par la transposition τ qui échange $\sigma(1)$ et n_1. L'application $\tau \circ \sigma$ est une application injective de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ et

$$\forall\, k > 1, \qquad \tau \circ \sigma(k) > \tau \circ \sigma(1) \overset{\text{déf.}}{=} n_1.$$

On recommence avec $\tau \circ \sigma$ et l'entier

$$n_2 = \min\big[\sigma_*(\mathbb{N}^*) \setminus \{n_1\}\big] = \min(\tau \circ \sigma)_*(\llbracket 2, +\infty \llbracket)$$

et ainsi de suite.

Avec N transpositions tout au plus, on aura "remis dans l'ordre" les N plus petites valeurs prises par σ.

✍ *Félicitations à ceux qui ont prononcé le mot magique : **tri sélection**.*

❧ L'application σ_N peut donc s'écrire sous la forme

$$\tau_N \circ \cdots \circ \tau_1 \circ \sigma$$

où τ_k est une transposition sur $\mathbb{N}^*$ ou l'identité de $\mathbb{N}^*$. De plus, chaque transposition vérifie les conditions d'application de (†), donc

$$\forall\, N \geqslant 2, \qquad S_\sigma \geqslant S_{\sigma_N}.$$

❧ Par construction,

$$1 \leqslant \sigma_N(1) \leqslant \sigma_N(2) \leqslant \cdots \leqslant \sigma_N(N)$$

donc

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant N, \qquad \sigma_N(k) \geqslant k.$$

✍ *Propriété bien connue des "extractrices".*

Comme S_{σ_N} est une somme de termes *positifs*, on en déduit que

$$S_{\sigma_N} \geqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{k^2} = H_N.$$

On a ainsi démontré que

$$\forall\, N \geqslant 2, \qquad S_\sigma \geqslant H_N$$

et comme on sait que la série harmonique est divergente, on en déduit que $S_\sigma = +\infty$.

❧ Quelle que soit l'application injective $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, la série

$$\sum \frac{\sigma(k)}{k^2}$$

est donc divergente.

Solution 22 **04-23**

L'entier p est fixé, le terme général de la série est donc équivalent à $1/n^2$, ce qui prouve que la série est convergente et que son reste d'ordre N est équivalent à $1/N$. On peut donc commencer par vérifier l'exactitude du résultat attendu : ça marche plutôt bien.

```
def somme_partielle(p, N):
  s = 0
  q = p**2
  for n in range(1, N):
    if n!=p:
      s += 1/(n**2-q)
  return s

for p in [2, 3, 4, 5]:
  valeur_theorique = 3/(4*p**2)
  print(valeur_theorique)
  for N in [1000, 10000, 100000]:
    s = somme_partielle(p, N)
    print(f"\t{s}")
```

✍ *Pour démontrer ce résultat, il faut passer par une série télescopique, donc* ***revenir aux sommes partielles*** *et procéder avec rigueur pour ne pas se perdre en cours de route.*

On rappelle la définition des ***nombres harmoniques*** *:*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

ainsi que leur développement asymptotique à $o(1/n)$ près :

$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ell n\, n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

❧ L'entier $p \geqslant 1$ est fixé une fois pour toutes et on vérifie sans peine que

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{p\}, \qquad \frac{1}{n^2 - p^2} = \frac{1}{2p}\Big(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p}\Big).$$

Nous allons calculer la somme partielle

$$S_{p+q} = \sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant p+q \\ n \neq p}} \frac{1}{n^2 - p^2}$$

pour $q \in \mathbb{N}^*$. Cette somme est la somme de deux sommes partielles :

$$S_{p+q} = \underbrace{\sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{n^2 - p^2}}_{S_{p-1}} + \underbrace{\sum_{n=p+1}^{p+q} \frac{1}{n^2 - p^2}}_{S_{p,q}}.$$

✍ *On a démontré que la série converge (absolument), il suffit d'étudier des sommes partielles bien choisies pour trouver la somme. Et si les notations sont elles aussi* bien choisies, *c'est plus simple.*

❧ Tout d'abord,

$$S_{p-1} = \frac{1}{2p}\Big(\sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{n-p} - \sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{n+p}\Big) = \frac{1}{2p}\Big(-\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=p+1}^{2p-1} \frac{1}{k}\Big) = \frac{1}{2p}\Big(\frac{1}{p} - H_{2p-1}\Big).$$

De la même manière,

$$S_{p,q} = \frac{1}{2p}\Big(\sum_{n=p+1}^{p+q} \frac{1}{n-p} - \sum_{n=p+1}^{p+q} \frac{1}{n+p}\Big) = \frac{1}{2p}\Big(\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k} - \sum_{k=2p+1}^{2p+q} \frac{1}{k}\Big) = \frac{1}{2p}(H_q + H_{2p} - H_{2p+q}).$$

✍ *On résume assez bien le* Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences *(1637) en rappelant un principe trop méconnu :* Une chose à la fois !

Par conséquent,

$$S_{p+q} = \frac{1}{2p}\Big(\frac{1}{p} + H_{2p} - H_{2p-1} + H_q - H_{2p+q}\Big) = \frac{3}{4p^2} - \frac{1}{2p}(H_{2p+q} - H_q).$$

Or

$$0 \leqslant H_{2p+q} - H_q = \sum_{k=q+1}^{q+2p} \frac{1}{k} \leqslant \frac{2p}{q+1} \tag{$\star$}$$

puisque la somme compte $2p$ termes qui sont tous majorés par le premier terme (pour lequel $k = q+1$). Comme p est fixé et que q tend vers $+\infty$, on en déduit que

$$\lim_{q\to+\infty} S_{p+q} = \frac{3}{4p^2}.$$

✍ *Un encadrement très simple de (⋆) nous a suffi pour conclure. On aurait pu utiliser le développement asymptotique des nombres harmoniques : lorsque q tend vers $+\infty$,*

$$H_q = \ell n\, q + \gamma + \frac{1}{2q} + o(1/q),$$
$$H_{2p+q} = \ell n(q+2p) + \gamma + \frac{1}{2q+4p} + o(1/q),$$
$$H_{2p+q} - H_q = \ell n\Big(1+\frac{2p}{q}\Big) + o(1/q) \sim \frac{2p}{q}.$$

On obtient un ordre de grandeur à peine plus précis !

Solution 23 — 04-24

Il s'agit d'une famille de réels *positifs*, donc il n'est pas nécessaire de prendre la valeur absolue pour appliquer le Théorème de Fubini-Tonelli.

✍ *On distingue parfois le Théorème de Fubini-Tonelli (caractérisation des familles sommables) et le Théorème de Fubini (associativité généralisée de la somme, ne s'applique qu'aux familles sommables).*

❧ Fixons $m \geqslant 1$. Il est alors clair que

$$u_{m,n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

et comme la série $\sum 1/n^2$ est absolument convergente, la sous-famille $(u_{m,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable. Sa somme sera notée σ_m :

$$\forall\, m \in \mathbb{N}^*, \quad \sigma_m = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{m,n}.$$

Remarquons alors que

$$\forall\, m, n \geqslant 1, \qquad u_{m,n} = \frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m+2}\cdot\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{m+n+2}\Big) \tag{$\star$}$$

si bien que

$$\forall\, m \geqslant 1, \qquad \sigma_m = \frac{1}{m(m+2)} \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{m+n+2}\Big). \tag{$\dagger$}$$

✍ *L'identité (⋆) résulte bien d'une décomposition en éléments simples. Comme la fraction est simple, peu importe la méthode pourvu qu'on obtienne rapidement le résultat.*

❧ *Le second membre de (†) fait bien apparaître une série convergente (on s'est contenté de mettre une constante en facteur), mais cette série apparaît maintenant comme la somme de deux séries divergentes. Ce péril apparaît assez fréquemment lorsqu'on cherche un télescopage et il n'y a qu'une seule manière de s'en tirer : revenir aux sommes partielles.*

Pour tout entier $N \geqslant m+2$,

$$\sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{m+n+2}\Big) = \sum_{n=1}^{m+2}\frac{1}{n} - \sum_{n=N+1}^{N+m+2}\frac{1}{n}.$$

La dernière somme compte $(m+1)$ termes et le plus grand terme de cette somme est le premier (pour $n = N+1$), donc

$$0 \leqslant \sum_{n=N+1}^{N+m+2}\frac{1}{n} \leqslant (m+1)\frac{1}{N+1}.$$

L'entier m étant fixé et N tendant vers $+\infty$, on en déduit que cette somme tend vers 0 et donc que

$$\forall\, m \geqslant 1, \quad \sigma_m = \frac{1}{m(m+2)}\cdot\sum_{k=1}^{m+2}\frac{1}{k}.$$

On connaît un équivalent simple des nombres harmoniques :

$$\sigma_m \underset{m\to+\infty}{\sim} \frac{1}{m^2}\cdot \ell n\, m = o\Big(\frac{1}{m\sqrt{m}}\Big).$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{m^{3/2}}$ est absolument convergente, on en déduit que la série $\sum \sigma_m$ est absolument convergente et donc que la famille $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ est sommable.

Solution 24 pg23S3-a

On sait que la série de Riemann $\sum 1/n^2$ est convergente. Par conséquent, le reste R_n est bien défini et il tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

❧ Le premier terme du développement asymptotique (dit *terme principal*) est en fait un équivalent de R_n. En comparant la somme à une intégrale comme on l'a fait en classe, on arrive à

$$R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

c'est-à-dire à

$$R_n - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(1/n)$$

et il s'agit maintenant de découvrir ce qui se cache sous ce $o(1/n)$.

✍ *Cet équivalent et tous les équivalents qui suivent ne sont pas vraiment au programme. Il faut donc savoir qu'on les obtient tous en comparant la somme à une intégrale et il n'est pas mauvais de retenir la formule générale, qu'il est facile de mémoriser.*

❧ Puisqu'on ne compare bien que ce qui est comparable, écrivons la partie principale de R_n comme le reste d'une série télescopique :

$$\frac{1}{n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\Big).$$

Il s'agit maintenant de calculer un équivalent de

$$\begin{aligned} R_n - \frac{1}{n} &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k}\Big) \\ &= -\sum_{k=n=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3-k^2}. \end{aligned}$$

Le terme général de ce nouveau reste est équivalent à $1/k^3$, qui est positif et terme général d'une série convergente. D'après le Théorème de sommation des équivalents,

$$R_n - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$$

et d'après l'équivalent calculé en cours

$$R_n - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{2n^2}.$$

Autrement dit,

$$R_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

et il s'agit cette fois de deviner ce qui se cache sous ce $o(1/n^2)$.

❧ Reprenons la méthode précédente, puisqu'elle a bien fonctionné !

Par sommation télescopique,

$$\frac{1}{n^2} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{k^2}\Big).$$

Nous allons donc étudier le reste

$$\begin{aligned} R_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \Big(\frac{-1}{k^3-k^2} + \frac{1}{2(k-1)^2} - \frac{1}{2k^2}\Big) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k^4-4k^3+2k^2}. \end{aligned}$$

Le terme général de ce reste est équivalent à $1/2k^4$ et, à nouveau d'après le Théorème de sommation des équivalents,

$$R_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k^4}$$

(puisque la série de référence $\sum {}^1/_{2k^4}$ est une série convergente dont le terme général est de signe constant).

Une nouvelle fois, on a vu en cours que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3n^3}$$

et finalement

$$R_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6n^3}$$

ou encore

$$R_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big).$$

✍ *Si on a du temps devant soi, on peut continuer aussi longtemps qu'on veut...*

Solution 25 pg23S3-b

Comme $\alpha > 1$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente, donc R_N est bien défini et S_N tend vers un réel $\zeta(\alpha) > 0$ lorsque N tend vers $+\infty$.

❧ La comparaison habituelle avec une intégrale nous assure que

$$R_N \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}}$$

et donc que

$$\frac{R_N}{S_N} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)\zeta(\alpha)} \, \frac{1}{N^{\alpha-1}}.$$

Par comparaison à une série de Riemann (dont le terme général est positif), la série $\sum \frac{R_N}{S_N}$ converge si, et seulement si, la série $\sum \frac{1}{N^{\alpha-1}}$ converge, c'est-à-dire si, et seulement si, $(\alpha-1) > 1$.

La série $\sum \frac{R_N}{S_N}$ converge donc si, et seulement si, $\alpha > 2$.

Solution 26 pg23S3-c

1. Comme ${}^1/_n$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned}\pi n^2 \ln\Big(1-\frac{1}{n}\Big) &= -\pi n^2\Big[\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^2} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\Big] \\ &= -n\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3n} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big).\end{aligned}$$

❧ Par conséquent,

$$u_n = (-1)^n \sin\Big[\frac{\pi}{3n} + \mathcal{O}\big(\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big] = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{(-1)^n}{n} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

La série $\sum {}^{(-1)^n}/_n$ est convergente (Critère spécial des séries alternées). D'autre part, la série de Riemann $\sum {}^1/_{n^2}$ est absolument convergente, donc toute série $\sum v_n$ telle que $v_n = \mathcal{O}({}^1/_{n^2})$ est absolument convergente (Théorème de comparaison par domination). Par conséquent, la série $\sum u_n$ est convergente, en tant que somme de deux séries convergentes.

✍ *Pour appliquer le Théorème de comparaison à partir de la relation*

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n,$$

*il faut que la série $\sum w_n$ soit **absolument convergente**, il ne suffit pas qu'elle soit convergente.*

On ne peut donc pas conclure à partir de la comparaison

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n K}{n}$$

puisque la série $\sum {}^1/_n$ est divergente.

❧ Comme

$$|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{n}$$

et que la série $\sum {}^1\!/_n$ est une série divergente dont le terme général est de signe constant (positif), alors la série $\sum |u_n|$ est divergente (Théorème de comparaison par équivalence). La série $\sum u_n$ est donc semi-convergente.

2. Cette fois,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \left[\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

On a décomposé le terme général en somme du terme général d'une série convergente

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

(Critère spécial des séries alternées) et du terme général d'une série divergente :

$$v_n \overset{\text{déf.}}{=} u_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$$

(Théorème de comparaison par équivalence, la série harmonique étant une série *divergente* de terme général *positif*).

Par conséquent, la série $\sum u_n$ est divergente.

Solution 27 — pg23S3-d

Pour $t \in I = [0, +\infty[$, on pose

$$f(t) = \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}.$$

Il est clair que la fonction f est continue sur l'intervalle I.

❧ Lorsque t tend vers $+\infty$,

$$t^\alpha f(t) \sim t^{\alpha-1}\, e^{-\sqrt{t}} = \exp\big(-\sqrt{t} + (\alpha-1)\ln t\big)$$

et donc, par croissances comparées,

$$\forall\, \alpha > 1, \quad f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right).$$

Comme la fonction $[t \mapsto {}^1\!/_{t^\alpha}]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ pour tout réel $\alpha > 1$, on en déduit que la fonction continue f est intégrable sur l'intervalle I et donc que l'intégrale généralisée est convergente.

Solution 28 — pg23S3-e

Tout d'abord,

$$u_0 = S_0 = 0.$$

Plus généralement, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$u_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

On a ainsi déterminer l'*unique* série $\sum u_n$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{n}{n+1}.$$

✍ *Il est clair que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers 1). Comme la série $\sum u_n$ est télescopique, on savait d'emblée que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ serait convergente (elle tend vers 0).*

Solution 29 — vt24S3-a

✍ *Il s'agit manifestement d'une série alternée. La valeur absolue du terme général*

$$|u_n| = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}$$

peut être lue comme la moyenne des $(n+1)$ premiers termes d'une suite de limite nulle et le théorème de Cesaro nous assure alors que le terme général tend vers 0. Il reste à étudier le sens de variation de la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.

❧ *On peut aussi remarquer que $(n+1)|u_n|$ peut s'exprimer à l'aide des nombres harmoniques. Il s'agit de la somme des harmoniques* impairs *et l'astuce taupinale nous indique alors que :*

$$(n+1)|u_n| = \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{1}{i} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = H_{2n+1} - \frac{1}{2}H_n.$$

Si on est savant, on peut utiliser la formule d'Euler :

$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

❧ **Première méthode**

Nous allons appliquer le Critère spécial des séries alternées : la série $\sum u_n$ est une série alternée dont le terme général tend vers 0.

Ayant interprété l'expression $|u_n|$ comme une moyenne, on peut interpréter ensuite $|u_{n+1}|$ comme une moyenne de moyennes (ce qu'on appelait *associativité du barycentre* quand c'était au programme).

Pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
|u_{n+1}| &= \frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{2k+1} \\
&= \frac{1}{n+2}\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2n+3}\Big) \\
&= \frac{n+1}{n+2}|u_n| + \frac{1}{n+2}\frac{1}{2n+3}.
\end{aligned}$$

Pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, il est clair que

$$\frac{1}{2n+3} \leqslant \frac{1}{2k+1}.$$

En sommant sur k, on en déduit que

$$\frac{n+1}{2n+3} \leqslant (n+1)|u_n|,$$

puis que

$$\frac{1}{n+2}\frac{1}{2n+3} \leqslant \frac{1}{n+2}|u_n|$$

et enfin que

$$|u_{n+1}| \leqslant \frac{n+1}{n+2}|u_n| + \frac{1}{n+2}|u_n| = |u_n|.$$

Les conditions d'application du Critère spécial des séries alternées sont satisfaites, donc la série $\sum u_n$ converge.

❧ **Deuxième méthode**

Comme on l'a remarqué,

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}\Big(H_{2n+1} - \frac{1}{2}H_n\Big).$$

On déduit alors de la formule d'Euler que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} (-1)^n\Big(\frac{2\ln(2n+1) - \ln n}{2(n+1)} + \frac{\gamma}{2(n+1)}\Big) + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

Cela nous donne une décomposition de la série $\sum u_n$ en somme de trois séries :

— la série alternée
$$\sum (-1)^n\Big(\frac{2\ln(2n+1) - \ln n}{2n+2}\Big),$$

— la série alternée
$$\sum (-1)^n\Big(\frac{\gamma}{2n+2}\Big)$$
qui converge (les conditions d'application du Critère spécial sont clairement vérifiées)

— et une troisième série absolument convergente d'après le Théorème de comparaison (le terme général étant dominé par le terme général d'une série de Riemann convergente).

Ainsi, la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, la série alternée

$$\sum (-1)^n \Big(\frac{2\,\ell n(2n+1) - \ell n\, n}{2n+2}\Big)$$

converge. Il est clair que le terme général de cette série tend vers 0. Il ne reste qu'à vérifier la propriété de monotonie.

Posons

$$\forall\, x \geqslant 1, \quad f(x) = \frac{2\,\ell n(2x-1) - \ell n(x-1)}{x}$$

de telle sorte que

$$\Big(\frac{2\,\ell n(2n+1) - \ell n\, n}{2n+2}\Big) = \frac{1}{2} f(n+1).$$

Lorsque x tend vers $+\infty$:

$$f'(x) \sim \frac{-\ell n\, x}{x^2},$$

ce qui prouve que $f'(x) < 0$ pour tout x assez grand et donc que f est décroissante au voisinage de $+\infty$.

Par conséquent, la suite de terme général $f(2n+1)$ est décroissante à partir d'un certain rang (qu'il est inutile de chercher à préciser) et on peut conclure à l'aide du Critère spécial : la série $\sum u_n$ est convergente en tant que somme de trois séries convergentes.

Solution 30 vt24S3-c

✍ *Comme la série $\sum u_n$ est une série de terme général* positif, *la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ de ses sommes partielles est croissante.*

Une suite monotone *$(S_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente si, et seulement si, elle admet au moins une suite extraite $(S_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente.*

En reformulant l'hypothèse de l'énoncé au moyen des sommes partielles de la série, on obtient

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad S_{2n} \leqslant \Big(1+\frac{1}{n}\Big) S_n.$$

Cela doit suggérer d'étudier la suite extraite $(S_{2^k})_{k\in\mathbb{N}}$.

D'après l'énoncé,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad S_{2^{k+1}} \leqslant \Big(1+\frac{1}{2^k}\Big) S_{2^k}.$$

On en déduit par récurrence que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad S_{2^k} \leqslant S_2 \prod_{i=1}^{k-1}\Big(1+\frac{1}{2^i}\Big).$$

Or

$$\ell n \prod_{i=1}^{k-1}\Big(1+\frac{1}{2^i}\Big) = \sum_{i=1}^{k-1} \ell n(1+2^{-i})$$

et

$$\ell n(1+2^{-i}) \underset{i\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^i}.$$

On déduit alors du théorème de comparaison que la série

$$\sum \ell n(1+2^{-i})$$

est convergente. Par continuité de la fonction exp, on en déduit que la suite de terme général

$$P_k = \prod_{i=1}^{k-1}\Big(1+\frac{1}{2^i}\Big)$$

converge également, ce qui prouve que la suite extraite $(S_{2^k})_{k\in\mathbb{N}}$ est majorée.

La suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est donc convergente et majorée, donc elle converge. Autrement dit, la série $\sum u_n$ est convergente.

Solution 31 vt25S3-c

1. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, le réel π_p est le produit de $(p+1)$ entiers strictement supérieurs à 1, donc $\pi_p > 1$ et

$$\ell n\,\pi_p = \sum_{k=0}^{p} \ell n\Big(1 + \frac{1}{2^k}\Big).$$

Lorsque k tend vers $+\infty$, le réel 2^{-k} tend vers 0 et par conséquent

$$\ell n\Big(1 + \frac{1}{2^k}\Big) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^k}.$$

Comme la série $\sum {}^1\!/\!{}_{2^k}$ est une série (géométrique) absolument convergente, on déduit du Théorème de comparaison que la série

$$\sum \ell n\Big(1 + \frac{1}{2^k}\Big)$$

est convergente.

Comme c'est une série dont le terme général est strictement positif, sa somme σ est un réel strictement positif.

Par continuité de la fonction exp, la suite de terme général π_p converge et sa limite est égale à $e^\sigma \in]1, +\infty[$ (puisque $\sigma > 0$).

✍ *La suite de l'exercice repose sur une astuce qui peut servir dans des circonstances analogues — c'est pourquoi il faut prendre le temps de bien observer les données qui mènent à cette astuce.*

L'énoncé compare deux sommes (la deuxième est une moyenne de Cesaro, mais c'est sans importance ici) et il faut d'abord constater que ces deux sommes ont le même nombre de termes : n.

Il faut ensuite remarquer qu'une somme fait intervenir les n premiers termes de la suite (u_n) et que l'autre somme fait intervenir les n termes suivants. Puisque l'hypothèse porte sur les termes

$$u_1, \dots, u_n \qquad \text{et} \qquad u_{n+1}, \dots, u_{2n},$$

on va pouvoir exploiter l'hypothèse de manière itérative en considérant les sommes indexées par les puissances de 2.

$$\begin{array}{ll}
u_1 & u_1 + u_2 \\
u_1 + u_2 & u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \\
u_1 + \dots + u_4 & u_1 + \dots + u_4 + \dots + u_8 \\
u_1 + \dots + u_4 + \dots + u_8 & u_1 + \dots + u_4 + \dots + u_8 + \dots + u_{16} \dots
\end{array}$$

2. Par hypothèse, la série $\sum u_n$ est une série de terme général positif. Par conséquent, la suite de ses sommes partielles

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

est une suite croissante et la série $\sum u_n$ est convergente si, et seulement si, la suite (S_n) est majorée.

Mieux : comme la suite (S_n) est croissante, elle est majorée si, et seulement si, une suite extraite $(S_{\varphi(p)})$ est majorée (quelle que soit l'extractrice φ considérée).

Nous allons donc considérer les sommes

$$\sigma_p = \sum_{k=1}^{2^p} u_k$$

en remarquant que

$$\sigma_{p+1} = \sum_{k=1}^{2^p} u_k + \sum_{k=2^p+1}^{2^{p+1}} u_k = \sigma_p + \sum_{k=2^p+1}^{2.2^p} u_k.$$

En appliquant l'hypothèse de l'énoncé avec $n = 2^p$, on obtient

$$\sigma_{p+1} \leqslant \sigma_p + \frac{1}{2^p}\sigma_p = \Big(1 + \frac{1}{2^p}\Big)\,\sigma_p.$$

Comme $\sigma_1 = u_1 \geqslant 0$, on en déduit par récurrence que

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad \sigma_{p+1} \leqslant \pi_p \cdot \sigma_1.$$

D'après la question précédente, la suite (π_p) est convergente. On en déduit que la suite (σ_p) est convergente et donc que la suite (S_n) des sommes partielles est bornée.

La série $\sum u_n$ est donc convergente.

Solution 32 **vt25S4-a**

1. La fonction $[t \mapsto \sqrt{t}]$ est une fonction continue et croissante sur $[0, +\infty[$. Une comparaison classique entre une somme et une intégrale nous donne alors

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \int_0^n \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{n}.$$

❧ Chaque réel u_n est défini comme un produit de réels strictement positifs, donc

$$\ell n\, u_n = \sum_{k=1}^{n} \ell n\Big(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\Big).$$

Or

$$\ell n\Big(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\Big) \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

et $\sum 1/\sqrt{k}$ est une série <u>divergente</u> de terme général <u>positif</u>. D'après le Théorème de comparaison, la série

$$\sum \ell n\Big(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\Big)$$

est divergente et ses sommes partielles $\ell n\, u_n$ tendent vers $+\infty$.

En composant avec exp, on en déduit que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ tend vers $+\infty$.

2. Lorsque h tend vers 0,

$$\sqrt{1-h} = (1-h)^{1/2} = 1 - \frac{h}{2} + \mathcal{O}(h^2).$$

En posant $h = 1/\sqrt{k}$,

$$v_k \underset{k \to +\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{k}} + 2\sqrt{k}\Big(\Big[1 - \frac{1}{2\sqrt{k}} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{k}\Big)\Big] - 1\Big) = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{k\sqrt{k}}\Big).$$

Par comparaison à une série de Riemann, la série $\sum v_k$ est absolument convergente et donc convergente.

❧ On en déduit que, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{+\infty} v_k + o(1).$$

✍ *Pour toute série convergente, la somme partielle d'ordre n est la différence entre la somme et le reste d'ordre n.*

Mais, en reprenant la définition des v_k et en identifiant une partie télescopique dans le terme général, on obtient aussi (pour tout $n \geqslant 1$) :

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + 2\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k-1} - \sqrt{k}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n \to +\infty}{=} 2\sqrt{n} + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k + o(1).$$

3. Une autre comparaison entre une somme et une intégrale montre que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ell n\, n.$$

✍ *Cette fois, la fonction est décroissante : $[t \mapsto 1/t]$.*

On procède de même en cherchant le terme général w_k d'une série telle que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \sum_{k=1}^{n} w_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ell n\, n.$$

On n'a pas le choix : il faut prendre (pour $n = 1$)

$$w_1 = 1$$

et (pour $n \geqslant 2$)

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} w_k - \sum_{k=1}^{n-1} w_k = \frac{1}{n} - \ell n\, n + \ell n(n-1).$$

Le développement limité de $\ell n(1-h)$ au voisinage de $h = 0$ nous donne alors

$$w_n \underset{n \to +\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

ce qui prouve que la série $\sum w_n$ est absolument convergente (comparaison à une série de Riemann) et donc convergente.

Comme plus haut, on en déduit d'une part que

$$\sum_{k=1}^{n} w_k \underset{n \to +\infty}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} w_k + o(1)$$

et d'autre part que

$$\forall\, n \geqslant 2, \qquad \sum_{k=1}^{n} w_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ell n\, n.$$

Par conséquent,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{=} \ell n\, n + \sum_{k=1}^{+\infty} w_k + o(1).$$

4. Lorsque k tend vers $+\infty$,

$$\ell n\Big(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\Big) = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2k} + z_k$$

où

$$z_k \underset{k \to +\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{k\sqrt{k}}\Big),$$

ce qui prouve que la série $\sum z_k$ est (absolument) convergente et qu'il existe donc une constante C_3 telle que

$$\sum_{k=1}^{n} z_k \underset{n \to +\infty}{=} C_3 + o(1).$$

❧ Par conséquent, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\ell n\, u_n = \sum_{k=1}^{n} \ell n\Big(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\Big) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} z_k$$

et on déduit des études précédentes que

$$\ell n\, u_n \underset{n \to +\infty}{=} 2\sqrt{n} - \frac{\ell n\, n}{2} + (C_1 + C_2 + C_3) + o(1).$$

En composant par exp, on en déduit que

$$u_n \underset{n \to +\infty}{=} e^{2\sqrt{n}}.e^{-(\ell n\, n)/2}.e^{(C_1+C_2+C_3)}.e^{o(1)}$$

et donc que

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} K_0.\frac{e^{2\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$$

où $K_0 = \exp(C_1 + C_2 + C_3) \in \mathbb{R}_+^*$.

✍ *On rappelle que* $o(1)$ *désigne une quantité qui tend vers* 0 *et que, de ce fait,* $e^{o(1)}$ *est une quantité qui tend vers* 1.

✍ *On peut souhaiter vérifier numériquement l'exactitude de cet équivalent et calculer une valeur approchée de la constante* K_0*, mais c'est assez difficile.*

Comme les u_n *tendent vers* $+\infty$*, on va rencontrer un dépassement de capacité* (overflow in double_scalars) *dès* $n \approx 1{,}3.10^5$. *Il est donc préférable de s'intéresser aux* $\ell n\, u_n$ *qui croissent beaucoup moins vite.*

En reprenant les différents calculs, on constate que les développements asymptotiques des v_k et des z_k sont connus à $\mathcal{O}(1/k\sqrt{k})$ près. Le Théorème de sommation des relations de comparaison (cas convergent) nous assure alors que le reste, que nous avions résumé à $o(1)$ plus haut, est en fait $\mathcal{O}(1/\sqrt{n})$: certes, il tend vers 0 comme le veut sa nature de reste, mais il tend très lentement *vers 0 et il est bien difficile de vérifier numériquement la convergence.*

Typiquement, pour $n = 10^6$, les calculs sont assez longs (plusieurs secondes) et on obtient une valeur approchée de la limite à 10^{-3} près seulement.

Et on n'a pas tenu compte des inévitables erreurs d'arrondi dans l'exécution de ces calculs !

Solution 33 vt25S4-b

Pour tout $x > 1$, on sait que la famille $(n^{-x})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable et, par définition,

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

✍ *Réflexe à avoir : la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum u_n$ est absolument convergente.*

❧ Puisque les deux familles $(m^{-a})_{m\in\mathbb{N}^*}$ et $(n^{-b})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont sommables, on sait (cf. cours sur le produit de Cauchy) que la famille

$$\Big(\frac{1}{m^a n^b}\Big)_{(m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$$

est sommable et que sa somme est égale à

$$\Big(\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^a}\Big) \times \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^b}\Big) = \zeta(a)\zeta(b).$$

❧ Quel que soit le couple $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, son pgcd $m \wedge n$ est un entier d appartenant à $\mathbb{N}^*$. On peut donc définir une partition de l'index :

$$\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* = \bigsqcup_{d\in\mathbb{N}^*} I_d$$

en posant

$$\forall\, d \in \mathbb{N}^*, \quad I_d = \big\{(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \ :\ m \wedge n = d\big\}.$$

✍ *On rappelle que la manière la plus naturelle de définir une partition d'un index I consiste à définir une fonction*

$$f : I \longrightarrow E$$

et à considérer les lignes de niveau de f :

$$\forall\, x \in E, \quad I_x = f^*(\{x\}) = \big\{i \in I \ :\ f(i) = x\big\}$$

pour obtenir

$$I = \bigsqcup_{x\in E} I_x.$$

Puisque la famille $(m^{-a}n^{-b})_{(m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ est sommable, on en déduit d'une part que, pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, la sous-famille

$$(m^{-a}n^{-b})_{(m,n)\in I_d}$$

est sommable, de somme

$$s_d = \sum_{(m,n)\in I_d} \frac{1}{m^{-a}n^{-b}},$$

d'autre part que la famille $(s_d)_{d\in\mathbb{N}^*}$ est elle aussi sommable et enfin que

$$\sum_{d\in\mathbb{N}^*} s_d = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{m^{-a}n^{-b}} = \zeta(a)\zeta(b).$$

✍ *On vient seulement de prouver que la somme à calculer S est bien définie : il s'agit de la somme s_1 et nous avons justifié que c'était la somme d'une famille sommable.*

❧ Soient m et n, deux entiers supérieurs à 1. On sait que le pgcd de m et n est égal à un entier $d \in \mathbb{N}^*$ si, et seulement si, il existe deux entiers k et ℓ supérieurs à 1 tels que

$$m = kd, \quad n = \ell d \quad \text{et} \quad k \wedge \ell = 1.$$

Autrement dit, l'application

$$\begin{array}{ccc} I_1 & \longrightarrow & I_d \\ (k, \ell) & \longmapsto & (kd, \ell d) \end{array}$$

est une bijection et par conséquent

$$\forall\, d \in \mathbb{N}^*, \quad s_d = \sum_{(k,\ell)\in I_1} \frac{1}{(kd)^a(\ell d)^b} = \frac{1}{d^{a+b}} s_1.$$

Ainsi,

$$\zeta(a)\zeta(b) = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{1}{d^{a+b}} \cdot s_1 = s_1 \zeta(a+b)$$

et on peut conclure :

$$S = s_1 = \sum_{\substack{m,n\geqslant 1\\ m\wedge n=1}} \frac{1}{m^a n^b} = \frac{\zeta(a)\zeta(b)}{\zeta(a+b)}.$$

Solution 34 **vt25S4-c**

1. L'entier $n = 1$ n'est divisible que par 1, donc $d(1) = 1$.

En revanche, tout entier $n \geqslant 2$ est divisible par 1 et n (avec $n \neq 1$), donc $d(n) \geqslant 2$. Et si $d(n) = 2$, alors n n'est divisible que par 1 et par n, donc n est premier.

2. Pour tout $s > 1$, la série de Riemann

$$\sum \frac{1}{n^s}$$

est absolument convergente, donc la famille $(n^{-s})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable et, d'après le cours sur le produit de Cauchy, la famille

$$(u_{m,p})_{(m,p)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} \overset{\text{déf.}}{=} \left(\frac{1}{m^s} \cdot \frac{1}{p^s}\right)_{(m,p)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$$

est sommable et

$$\sum_{(m,p)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{m^s p^s} = \zeta(s)^2.$$

✍ *Puisque l'énoncé évoque le carré d'une somme, il est naturel de penser au produit de Cauchy...*

❧ Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \big\{(m,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \;:\; mp = n\big\},$$

ce qui nous donne une partition de l'index :

$$\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} I_n.$$

Comme la famille $(u_{m,p})_{(m,p)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ est sommable, on déduit du Théorème de Fubini que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la sous-famille

$$(u_{m,p})_{(m,p)\in I_n}$$

est sommable, de somme

$$s_n = \sum_{(m,p)\in I_n} \frac{1}{(mp)^s},$$

et que la famille $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est elle aussi sommable avec

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} s_n = \sum_{(m,p)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} u_{m,p} = \zeta(s)^2.$$

❧ Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Lorsque $(m, p) \in I_n$, on a $m^s p^s = (mp)^s = n^s$, si bien que

$$s_n = \sum_{(m,p)\in I_n} \frac{1}{n^s} = \frac{\#(I_n)}{n^s}.$$

Et, si on fait attention à la définition du sous-index I_n, un couple (m, p) appartient à I_n si, et seulement si, l'entier m est un diviseur de n. Par conséquent, le cardinal de I_n est égal au nombre $d(n)$ de diviseurs de n.

On a déjà justifié (Théorème de Fubini) que la famille $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ était sommable, donc la série

$$\sum \frac{d(n)}{n^s}$$

est (absolument) convergente et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d(n)}{n^s} = \zeta(s)^2.$$

Solution 35 vt25S4-d

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, comme p_k est un nombre premier, on a $p_k \geqslant 2$, donc la série géométrique

$$\sum \frac{1}{p_k^n}$$

est absolument convergente. Autrement dit, la famille

$$\left(\frac{1}{p_k^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

est sommable.

❧ D'après le cours sur le produit de Cauchy, si deux familles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont sommables, alors la famille

$$(u_m v_n)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$$

est sommable et de plus

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} u_m v_n = \Big(\sum_{m\in\mathbb{N}} u_m\Big)\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n\Big).$$

On en déduit (par récurrence sur k) que : si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la famille $(u_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, de somme

$$s_k = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_{k,n},$$

alors, pour tout $k \geqslant 2$, la famille

$$(u_{0,n_0} u_{1,n_1} \cdots u_{k,n_k})_{(n_0,n_1,\dots,n_k)\in\mathbb{N}^{k+1}}$$

est sommable et sa somme est égale à

$$\prod_{j=0}^{k} s_j.$$

❧ On applique ce qui précède à

$$u_{k,n} = \frac{1}{p_k^n}$$

et on conclut en remarquant que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$s_k = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{p_k^n} = \frac{1}{1 - 1/p_k} = \frac{p_k}{1 - p_k}.$$

2. Pour tout $s > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}$, le réel p_k^s est strictement supérieur à 1. On peut donc appliquer le raisonnement précédent à

$$u_{k,n} = \frac{1}{p_k^{sn}} \qquad \text{avec} \qquad s_k = \frac{p_k^s}{1 - p_k^s}.$$

On en déduit que

$$\sum_{(n_0,n_1,\ldots,n_k)\in\mathbb{N}^{k+1}} \frac{1}{(p_0^{n_0}p_1^{n_1}\cdots p_k^{n_k})^s} = \prod_{j=0}^{k} \frac{p_j^s}{p_j^s-1} = \left(\prod_{j=0}^{k}\left(1-\frac{1}{p_j^s}\right)\right)^{-1}$$

pour tout $s>0$ et tout $k\in\mathbb{N}$.

❧ Lorsque le multi-indice $(n_0,n_1,\ldots,n_k)$ parcourt $\mathbb{N}^{k+1}$, les entiers

$$p_0^{n_0}p_1^{n_1}\cdots p_k^{n_k}$$

parcourent l'ensemble, que nous noterons Ω_k, des entiers naturels (non nuls !) dont tous les diviseurs premiers se trouvent parmi $p_0, p_1, \ldots, p_k$.

Il est clair que

$$\forall\, k\in\mathbb{N},\quad \Omega_k\subset\Omega_{k+1}.$$

Comme tout entier naturel non nul admet une factorisation unique en produit fini de facteurs premiers, chaque entier $n\in\mathbb{N}^*$ appartient à l'un des Ω_k (et donc à tous les Ω_ℓ tels que $\ell\geqslant k$). Autrement dit,

$$\mathbb{N}^* = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\Omega_k.$$

❧ Comme la série (de Riemann) $\sum {}^1/_{n^s}$ est absolument convergente, la famille

$$\left(\frac{1}{n^s}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

est sommable. Par conséquent, pour tout $k\in\mathbb{N}$, la sous-famille

$$\left(\frac{1}{n^s}\right)_{n\in\Omega_k}$$

est sommable elle aussi et les calculs qui précèdent ont montré que

$$\forall\, k\in\mathbb{N},\qquad \sum_{n\in\Omega_k}\frac{1}{n^s} = \prod_{j=0}^{k}\frac{p_j^s}{p_j^s-1}.$$

❧ Comme $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de parties de $\mathbb{N}^*$ dont l'union est égale à $\mathbb{N}^*$,

$$\lim_{k\to+\infty}\sum_{n\in\Omega_k}\frac{1}{n^s} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^s} = \zeta(s).$$

✍ *Cette affirmation repose sur le Théorème de continuité monotone, qui figure dans le cours de Calcul des probabilités.*

On en déduit que

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \lim_{k\to+\infty}\prod_{j=0}^{k}\frac{p_j^s-1}{p_j^s} = \prod_{j=0}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{p_j^s}\right).$$

✍ ***Supplément à caractère culturel***

❧ *Pour bien comprendre ce qui suit, il faut savoir que*

$$\inf_{i\in I}\inf_{j\in J} u_{i,j} = \inf_{j\in J}\inf_{i\in I} u_{i,j} \quad \textit{et que} \quad \sup_{i\in I}\sup_{j\in J} u_{i,j} = \sup_{j\in J}\sup_{i\in I} u_{i,j}$$

pour toute famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ de nombres réels — les bornes étant prises dans la droite achevée $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.

La démonstration de ces égalités est un excellent exercice, qui demande de la rigueur.

❧ *La monotonie des suites et des fonctions considérées nous permettent de remarquer que*

$$\forall\, s>0,\quad \zeta(s) = \sup_{N\in\mathbb{N}^*}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}$$

puis que

$$\lim_{s\to 1} \zeta(s) = \sup_{s>1} \sup_{N\in\mathbb{N}^*} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} = \sup_{N\in\mathbb{N}^*} \sup_{s>1} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}$$
$$= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = +\infty.$$

On déduit de ce qui précède que

$$\lim_{s\to 1} \lim_{k\to+\infty} \prod_{j=0}^{k} \Big(1 - \frac{1}{p_j^s}\Big) = 0.$$

Les mêmes arguments de monotonie nous permettent d'en déduire que

$$0 = \inf_{s>1} \inf_{k\in\mathbb{N}^*} \prod_{j=0}^{k} \Big(1 - \frac{1}{p_j^s}\Big) = \inf_{k\in\mathbb{N}^*} \inf_{s>1} \prod_{j=0}^{k} \Big(1 - \frac{1}{p_j^s}\Big)$$
$$= \lim_{k\to+\infty} \prod_{j=0}^{k} \Big(1 - \frac{1}{p_j}\Big).$$

Par composition de limites,

$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{j=0}^{k} \ell n\Big(1 - \frac{1}{p_j}\Big) = -\infty.$$

Comme p_j *tend vers* $+\infty$ *lorsque* j *tend vers* $+\infty$*,*

$$\ell n\Big(1 - \frac{1}{p_j}\Big) \underset{j\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{p_j}$$

et comme il s'agit de séries dont le terme général est de signe constant (négatif), on peut déduire du Théorème de comparaison que la série

$$\sum \frac{1}{p_j}$$

est une série divergente (de terme général positif).

❧ *Notons* P*, l'ensemble des entiers premiers :*

$$P = \{p_j,\ j \in \mathbb{N}\}$$

et Q*, l'ensemble des carrés parfaits :*

$$Q = \{n^2,\ n \in \mathbb{N}^*\}.$$

On a démontré que la famille $(1/n)_{n\in P}$ *n'était pas sommable (la série diverge) et on sait que la série de Riemann*

$$\sum_{n\in Q} \frac{1}{n} = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2}$$

est convergente. On interprète ces deux propriétés en disant qu'il y a beaucoup plus de nombres premiers (éléments de P*) que de carrés parfaits (éléments de* Q*).*

Solution 36 **Off2017-190**

1. Pour tout $x \in I =]0, +\infty[$, on pose

$$f_0(x) = \frac{x^{p+1}}{e^x - 1} \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(x) = e^{-nx} f_0(x).$$

❧ La fonction f_0 est continue sur l'intervalle ouvert I.
❧ Lorsque x tend vers 0,

$$f_0(x) \sim \frac{x^{p+1}}{x} = x^p$$

donc f_0 peut être prolongée en une fonction continue sur $I_0 = [0, +\infty[$ en posant

$$f_0(x) = 0.$$

De ce fait, la fonction f_0 est intégrable au voisinage de 0.

❧ Lorsque x tend vers $+\infty$,
$$f_0(x) \sim x^{p+1}e^{-x} = x^{p+1}e^{-x/2} \cdot e^{-x/2} = o(e^{-x/2}).$$
Or la fonction $[x \mapsto e^{-x/2}]$ est une fonction de référence, intégrable au voisinage de $+\infty$, donc f_0 est elle aussi intégrable au voisinage de $+\infty$.

❧ La fonction f_0 est donc intégrable sur l'intervalle I.

❧ En tant que produit de la fonction f_0, qui est intégrable sur I, par la fonction $[x \mapsto e^{-nx}]$, qui est continue et bornée sur I, la fonction f_n est intégrable sur I pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Par conséquent, l'intégrale généralisée S_n est (absolument) convergente, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

2. Quels que soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, la fonction
$$f_{a,b} = \left[x \mapsto x^a e^{-bx}\right]$$
est continue sur l'intervalle $I_0 = [0, +\infty[$. Comme plus haut,
$$f_{a,b}(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{-bx/2})$$
et comme $b/2 > 0$, on en déduit que $f_{a,b}$ est intégrable sur l'intervalle I_0.

Par conséquent, l'intégrale généralisée $\Gamma(a, b)$ est (absolument) convergente quels que soient les entiers $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

❧ On vient de prouver que la fonction $f_{a,b}$ est intégrable sur I_0.

Comme $b > 0$, on peut effectuer le changement de variable affine $y = bx$ avec $dy = b\,dx$:
$$\int_0^{+\infty} x^a e^{-bx}\,dx = \frac{1}{b^{a+1}} \int_0^{+\infty} (bx)^a e^{-bx}(b\,dx) = \frac{1}{b^{a+1}} \int_0^{+\infty} y^a e^{-y}\,dy$$
donc
$$\forall\,(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad \Gamma(a, b) = \frac{a!}{b^{a+1}}.$$

3. La fonction f_0 est continue sur l'intervalle ouvert I. De plus, elle tend vers 0 aussi bien au voisinage de 0 qu'au voisinage de $+\infty$. Par conséquent, elle est bornée sur I et
$$\forall\,x \in I, \quad \left|f_0(x)\right| \leqslant \|f_0\|_\infty.$$
On en déduit que
$$\forall\,n \in \mathbb{N}^*, \ \forall\,x \in I, \quad \left|f_n(x)\right| \leqslant \|f_0\|_\infty\, e^{-nx}.$$
D'après l'inégalité triangulaire pour les intégrales et la positivité de l'intégration, on en déduit que
$$\forall\,n \in \mathbb{N}^*, \quad |S_n| \leqslant \int_0^{+\infty} \|f_0\|_\infty\, e^{-nx}\,dx = \frac{\|f_0\|_\infty}{n}.$$
On déduit du Théorème d'encadrement que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

✍ *Par positivité de l'intégration, on peut aussi vérifier que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.*

4. Pour tout $x > 0$,
$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}.$$
On reconnaît une somme géométrique de raison $0 < e^{-x} < 1$:
$$\forall\,n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{e^x - 1} = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-kx} = \frac{e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}} + \sum_{k=1}^{n} e^{-kx} = \frac{e^{-nx}}{e^x - 1} + \sum_{k=1}^{n} e^{-kx}.$$
Comme les fonctions f_k sont toutes intégrables sur I, on déduit de la linéarité de l'intégrale que
$$\begin{aligned}\forall\,n \in \mathbb{N}^*, \quad S_0 &= S_n + \sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} x^{p+1} e^{-kx}\,dx \\ &= S_n + \sum_{k=1}^{n} \Gamma(p+1, k) \\ &= S_n + (p+1)! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p+2}}.\end{aligned}$$

❧ On reconnaît une somme partielle d'une série de Riemann convergente. Et comme on sait que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, on en déduit enfin que

$$S_0 = (p+1)! \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+2}}$$

c'est-à-dire

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x - 1}\,dx = (p+1)!\zeta(p+2).$$

✍ *On aurait aussi pu appliquer le Théorème d'intégration terme à terme (version lebesguienne).*

Solution 37 **rms132-535**

Tout d'abord,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ell n(n+k) = n\,\ell n\, n + \sum_{k=0}^{n-1} \ell n\Big(1+\frac{k}{n}\Big).$$

❧ Ensuite, comme la fonction $f = [t \mapsto \ell n(1+t)]$ est continue sur le segment $[0,1]$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ell n\Big(1+\frac{k}{n}\Big) = \int_0^1 \ell n(1+t)\,dt = 2\,\ell n\, 2 - 1 > 0$$

(théorème sur les sommes de Riemann). Donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ell n(n+k) - n\,\ell n\, n \underset{n\to+\infty}{\sim} (2\,\ell n\, 2 - 1)n$$

et par suite $a = 2\,\ell n\, 2 - 1$.

❧ Enfin, on s'intéresse à la différence

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ell n\Big(1+\frac{k}{n}\Big) - n\int_0^1 \ell n(1+t)\,dt$$

qui peut aussi s'écrire (relation de Chasles)

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} n\big[f(k/n) - f(t)\big]\,dt.$$

▶ La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$ et

$$\forall\, t \in [0,1], \quad f'(t) = \frac{1}{1+t}, \qquad \big|f''(t)\big| = \frac{1}{(1+t)^2} \leqslant 1.$$

Alors, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour tout entier $0 \leqslant k < n$,

$$\forall\, t \in \Big[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\Big], \quad \Big|f(k/n) - f(t) - \frac{k/n - t}{1 + k/n}\Big| \leqslant \frac{1}{2}\Big(\frac{k}{n} - t\Big)^2 \leqslant \frac{1}{2n^2}.$$

On peut alors borner chaque intégrale de la manière la plus classique qui soit : pour tout entier $0 \leqslant k < n$,

$$\Big|\int_{k/n}^{(k+1)/n} n\Big(f(k/n) - f(t) - \frac{k/n - t}{1+k/n}\Big)\,dt\Big| \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} n\Big|f(k/n) - f(t) - \frac{k/n - t}{1+k/n}\Big|\,dt \leqslant \frac{1}{2n^2}$$

et par inégalité triangulaire, la quantité

$$\Big|\sum_{k=0}^{n-1} \ell n\Big(1+\frac{k}{n}\Big) - n\int_0^1 \ell n(1+t)\,dt + \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} n\cdot\frac{t - k/n}{1+k/n}\,dt\Big|$$

est majorée par $1/2n$ (il y a n termes dans la somme).

► Il reste à calculer

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} n\cdot\frac{t-{}^{k}\!/_{n}}{1+{}^{k}\!/_{n}}\,dt=\sum_{k=0}^{n-1} n\cdot\frac{1}{2n^2}\cdot\frac{1}{1+{}^{k}\!/_{n}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+{}^{k}\!/_{n}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dt}{1+t}=\frac{\ln 2}{2}.$$

❧ Finalement, on a trouvé

$$\sum_{k=0}^{n-1}\ln(n+k)\underset{n\to+\infty}{=}n\ln n+(2\ln 2-1)n-\frac{\ln 2}{2}+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

(ce qui est même un peu plus précis que prévu).

Solution 38 **rms132-571**

Tout d'abord, la fonction

$$f=\left[t\mapsto\frac{e^t}{t}\right]$$

est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x>1$, le segment $[\ln x, 2\ln x]$ est contenu dans $]0,+\infty[$. Par conséquent, l'expression $F(x)$ est bien définie pour tout $x>1$ (intégrale d'une fonction continue sur un segment).

1. Soit $x>1$. Par croissance de la fonction exp,

$$\forall\, t\in[\ln x, 2\ln x],\quad \frac{x}{t}=\frac{e^{\ln x}}{t}\leqslant\frac{e^t}{t}\leqslant\frac{e^{2\ln x}}{t}=\frac{x^2}{t}.$$

Par positivité de l'intégrale,

$$\forall\, x>1,\quad x\int_{\ln x}^{2\ln x}\frac{dt}{t}\leqslant f(x)\leqslant x^2\int_{\ln x}^{2\ln x}\frac{dt}{t}$$

c'est-à-dire

$$\forall\, x>1,\qquad x\ln 2\leqslant f(x)\leqslant x^2\ln 2.$$

On peut conclure par encadrement :

$$\lim_{x\to 1+} f(x)=\ln 2.$$

✍ *Variante plus compliquée, qui permet néanmoins de réviser plusieurs idées intéressantes...*
On peut aussi utiliser le développement en série entière de la fonction exp.
Si le rayon de convergence d'une série entière est infini, il y a convergence normale sur le segment $[\ln x, 2\ln x]$ *(quel que soit* $x>1$*) et par conséquent*

$$\begin{aligned} f(x)=\int_{\ln x}^{2\ln x}\frac{1}{t}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{t^{k-1}}{k!}\,dt &= \ln 2+\int_{\ln x}^{2\ln x}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{t^{k-1}}{k!}\,dt && \text{(linéarité)}\\ &=\ln 2+\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{\ln x}^{2\ln x}\frac{t^{k-1}}{k!}\,dt && \text{(intégration terme à terme)}\\ &=\ln 2+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(2^k-1)\ln^k x}{k.k!} \end{aligned}$$

On vérifie sans peine que le rayon de convergence de la série entière

$$\sum\frac{(2^k-1)u^k}{k.k!}$$

est infini. Sa somme est donc continue sur $\mathbb{R}$ *et par composition de limites,*

$$\lim_{x\to 1}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(2^k-1)\ln^k x}{k.k!}=\lim_{u\to 0}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(2^k-1)u^k}{k.k!}=0.$$

On a ainsi redémontré que $f(x)$ *tendait vers* $\ln 2$ *au voisinage de* 1.

2. D'après le Théorème fondamental, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et

$$\forall\, x>1,\quad F'(x)=\frac{2}{x}\cdot\frac{e^{2\ln x}}{2\ln x}-\frac{1}{x}\cdot\frac{e^{\ln x}}{\ln x}=\frac{x-1}{\ln x}>0.$$

Comme F est strictement croissante sur l'intervalle $]1,+\infty[$, elle est injective.

Solution 39 **rms132-599**

Une remarque préalable : pour tout $x \neq 0$, le terme général de la série est $\mathcal{O}(1/n^2)$ et pour $x = 0$, le terme général ne tend pas vers 0, donc f est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.

Comme elle est évidemment paire, il suffit de l'étudier sur $]0, +\infty[$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n définie par

$$\forall\, x > 0, \quad u_n(x) = \frac{1}{1 + n^2x^2}$$

est continue sur $]0, +\infty[$. De plus, par monotonie de u_n, pour tout $a > 0$,

$$\forall\, x \geqslant a, \quad 0 \leqslant u_n(x) \leqslant u_n(a)$$

ce qui prouve que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur l'intervalle $[a, +\infty[$. La somme f est donc continue sur

$$\bigcup_{a>0} [a, +\infty[\,=\,]0, +\infty[.$$

2. Essayons de deviner l'équivalent de $f(x)$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2x^2}$$

on peut imaginer que

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x^2}.$$

Il reste à vérifier cette conjecture : pour tout $x > 0$,

$$\frac{\pi^2}{6x^2} - f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n^2x^2} - \frac{1}{1+n^2x^2}\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2x^2(1+n^2x^2)}$$

et on en déduit que

$$\forall\, x > 0, \quad 0 \leqslant \frac{\pi^2}{6x^2} - f(x) \leqslant \frac{\zeta(4)}{x^4}.$$

Par conséquent, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6x^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^4}\right) = \frac{\pi^2}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \sim \frac{\pi^2}{6x^2}.$$

✍ *Variante : pour tout $x > 0$,*

$$x^2 f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2}$$

et cette nouvelle série de fonctions converge normalement sur $]0, +\infty[$ puisque

$$\forall\, x > 0, \qquad 0 \leqslant \frac{x^2}{1+n^2x^2} \leqslant \frac{x^2}{n^2x^2} = \frac{1}{n^2}.$$

On peut alors appliquer le théorème d'interversion des limites :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

et retrouver ainsi l'équivalent calculé ci-dessus.

3. Lorsque x tend vers 0, le terme général de la série tend vers 1 : cela permet de deviner que f tend vers $+\infty$ mais pas de deviner son ordre de grandeur...

Il est temps de remarquer que la fonction φ définie par

$$\forall\, (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \quad \varphi(t, x) = \frac{1}{1 + t^2x^2}$$

est une fonction continue, positive et décroissante de t pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Comme on a démontré que la série $\sum \varphi(n,x)$ était convergente pour tout $x > 0$, on en déduit que $[t \mapsto \varphi(t,x)]$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ pour tout $x > 0$ et nous allons pouvoir comparer cette intégrale à la somme $f(x)$.

En s'aidant d'une figure, on arrive à

$$\forall\, x > 0, \quad \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2x^2} \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2x^2}.$$

Avec le changement de variable $u = xt$, on en déduit que

$$\forall\, x > 0, \quad \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x\right) \leqslant f(x) \leqslant \frac{\pi}{2x}.$$

Cet encadrement prouve que

$$f(x) \underset{x \to 0+}{\sim} \frac{\pi}{2x}$$

et en particulier que f tend vers $+\infty$ au voisinage droit de 0.

✍ *Comme f est une fonction* paire, *on en déduit que*

$$f(x) \underset{x \to 0-}{\sim} \frac{\pi}{2|x|}.$$

Solution 40 **rms132-1116**

Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$u_n = (a+b+c)\ell n\, n + b\,\ell n\left(1+\frac{1}{n}\right) + c\,\ell n\left(1+\frac{2}{n}\right) = (a+b+c)\ell n\, n + \frac{b+2c}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

- Si $a+b+c \neq 0$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Si $a+b+c = 0$ et $b+2c \neq 0$, alors

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{b+2c}{n}$$

et $\sum u_n$ diverge (mais pas grossièrement).
- Enfin, si $a+b+c = b+2c = 0$, alors $u_n = \mathcal{O}(1/n^2)$, donc la série $\sum u_n$ converge (absolument).

✍ *Dans ce dernier cas, on a $b = -2a$ et $c = a$, donc*

$$u_n = a\big[\ell n\, n - 2\,\ell n(n+1) + \ell n(n+2)\big]$$

et on reconnaît une série télescopique :

$$\forall\, N \geqslant 2, \quad \sum_{n=1}^{N} u_n = a\left[-\ell n\, 2 + \ell n\,\frac{N+2}{N+1}\right]$$

donc la somme de la série est égale à $-a\,\ell n\, 2$.

Solution 41 **rms132-1160**

Lorsque l'entier n tend vers $+\infty$,

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{n} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1/2} = \frac{1}{n} \cdot \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En notant u_n le terme général de la série, on en déduit que

$$u_n \underset{n \to +\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Par conséquent, la série $\sum u_n$ est la somme de la série convergente

$$\sum \frac{(-1)^n}{n}$$

(Critère spécial des séries alternées) et d'une série absolument convergente (puisque son terme général est dominée par $1/n^2$, qui est le terme général d'une série absolument convergente).

La série $\sum u_n$ est donc convergente.

Solution 42 **rms132-1161**

1. Il est clair que l'intervalle $]0, \pi[$ est stable par sin, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et prend toutes ses valeurs dans cet intervalle. De plus,

$$\forall\, 0 < x < \pi, \quad 0 < \sin x < x$$

donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Comme elle est minorée (par 0), elle converge vers un réel $\ell \in [0, \ell]$.

Puisque sin est continue sur $]0, \pi[$, si ℓ appartenait à cet intervalle ouvert, ce serait un point fixe de sin : il n'y en a pas. La seule possibilité qui reste compatible avec la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc : $\ell = 0$.

2. Comme u_n tend vers 0, on peut utiliser le développement limité de sin :

$$u_{n+1} - u_n = \sin u_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-u_n^3}{6}.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant strictement décroissante, on vient de comparer deux séries dont les termes généraux sont de signe constant (négatifs) et on déduit du Théorème de comparaison que les séries $\sum(u_{n+1} - u_n)$ et $\sum u_n^3$ sont de même nature.

Or $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est une série télescopique et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, donc la série $\sum u_n^3$ est convergente.

3. Comme u_n tend vers 0 par valeurs *strictement positives*,

$$\ell n\, u_{n+1} - \ell n\, u_n = \ell n \frac{\sin u_n}{u_n} = \ell n\Big(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\Big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-u_n^2}{6}.$$

Avec le même raisonnement, les séries $\sum(\ell n\, u_{n+1} - \ell n\, u_n)$ et $\sum u_n^2$ sont de même nature.

Mais comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, alors la suite de terme général $\ell n\, u_n$ tend vers $-\infty$, donc la série télescopique $\sum(\ell n\, u_{n+1} - \ell n\, u_n)$ diverge et, par comparaison, la série $\sum u_n^2$ diverge.

✍ *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,*

$$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = \sin^\alpha u_n - u_n^\alpha = u_n^\alpha \cdot \Big[\Big(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\Big) - 1\Big] \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-\alpha}{6} \cdot u_n^{2+\alpha}.$$

En choisissant $\alpha = -2$, on constate que la différence $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ converge vers une limite finie non nulle (égale à $1/3$). On en déduit que la série télescopique est grossièrement divergente et que sa n-ième somme partielle

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^\alpha - u_k^\alpha) = u_n^\alpha - u_0^\alpha \sim u_n^{-2}$$

est aussi équivalente, lorsque n tend vers $+\infty$, à $n/3$. Par conséquent,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}},$$

ce qui explique tout ce qui précède !

Solution 43 **rms132-1162**

1. Par définition,

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \Big(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\Big)^{-1}$$

et comme $(-1)^n/\sqrt{n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, on peut utiliser le développement limité de $(1+x)^{-1}$ au voisinage de $x = 0$:

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$$

pour en déduire que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \Big[1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big]$$

et le résultat cherché s'obtient en développant ce produit.

2. La série $\sum v_n$ converge d'après le critère spécial des séries alternées : c'est une série alternée et, de façon évidente, la valeur absolue du terme général tend vers 0 en décroissant.

D'après le développement précédent,

$$u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{n}$$

donc la série $\sum(u_n - v_n)$ est divergente (série harmonique). Par conséquent,

$$\sum u_n = \underbrace{\sum(u_n - v_n)}_{\text{DV}} + \underbrace{\sum v_n}_{\text{CV}}$$

est divergente.
3. Le développement de la première question a beau nous indiquer que $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne sont pas de même nature : le théorème de comparaison par équivalence s'applique aux séries DONT LE TERME GÉNÉRAL EST DE SIGNE CONSTANT, il ne peut pas s'appliquer aux séries alternées.

Solution 44 **rms132-1163**

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la relation de récurrence,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n \leqslant \frac{a_n}{2} &\iff \sqrt{u_n^2 + a_n^2} - u_n \leqslant a_n \\ &\iff \sqrt{u_n^2 + a_n^2} \leqslant u_n + a_n. \end{aligned}$$

Or les a_n sont positifs (par hypothèse) et les u_n aussi (par hypothèse pour u_0 et par récurrence pour $n \geqslant 1$), donc

$$\sqrt{u_n^2 + a_n^2} \leqslant u_n + a_n \iff u_n^2 + a_n^2 \leqslant (u_n + a_n)^2 = u_n^2 + a_n^2 + 2u_n a_n.$$

On a ainsi démontré que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n \leqslant \frac{a_n}{2}.$$

2. Pour appliquer le théorème de comparaison aux séries $\sum(u_{n+1} - u_n)$ et $\sum a_n$, il faut encore vérifier que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_{n+1} - u_n.$$

Or, d'après la relation de récurrence,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{u_n^2 + a_n^2} - u_n}{2}.$$

Il est clair que

$$u_n^2 + a_n^2 \geqslant u_n^2 \geqslant 0$$

et comme $u_n \geqslant 0$, on en déduit que

$$\sqrt{u_n^2 + a_n^2} \geqslant |u_n| = u_n.$$

On a donc en fait

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_{n+1} - u_n \leqslant \frac{a_n}{2}.$$

Comme la série $\sum a_n$ est convergente, on déduit du théorème de comparaison pour les séries **de terme général positif** que la série télescopique $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est convergente et donc que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3. D'après la relation de récurrence,

$$\sqrt{u_n^2 + a_n^2} = 2u_{n+1} - u_n$$

et donc

$$a_n^2 = (2u_{n+1} - u_n)^2 - u_n^2 = 4u_{n+1}(u_{n+1} - u_n).$$

En prenant $u_n = \frac{n}{n+1}$, on a alors

$$a_n^2 = \frac{4(n+1)}{n+2} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{4(n+1)}{n+2} \cdot \frac{1}{(n+2)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{n^2}.$$

Comme les a_n sont positifs, on en déduit que

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}.$$

D'après le théorème de comparaison pour les séries **de terme général positif** (bis), la série $\sum a_n$ est divergente (puisque la série harmonique est divergente).

La réciproque de la propriété établie plus haut est donc fausse.

Solution 45 **rms132-1213**

1. La fonction $[t \mapsto \ln(1+t)]$ est continue sur le segment $[0,1]$. Donc les sommes de Riemann R_n convergent vers

$$\int_0^1 \ln(1+t)\,dt = \big[(1+t)\ln(1+t) - t\big]_0^1 = 2\ln 2 - 1.$$

2. Chaque réel S_n est un produit de réels strictement positifs, donc

$$\ln S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(n+k) = \ln n + R_n.$$

Par conséquent,

$$S_n = n \cdot e^{R_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n \cdot e^{2\ln 2 - 1} = \frac{4n}{e}.$$

✍ ***Variante avec la formule de Stirling***
Si on remarque que

$$S_n = \left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{1/n},$$

on peut tenter d'appliquer la Formule de Stirling :

$$\frac{(2n)!}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2}\cdot e^{-n}4^n n^n.$$

Autrement dit,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{n!}\cdot\left(\frac{e}{4n}\right)^n = \sqrt{2} \in \mathbb{R}_+^*.$$

On a ici une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général strictement positif, qui converge vers une limite $\ell > 0$. Par conséquent,

$$u_n^{1/n} \overset{\text{déf.}}{=} \exp\frac{\ln u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(0) = 1.$$

En l'occurrence,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n \cdot \frac{e}{4n} = 1$$

et on retrouve bien le résultat précédent.

Attention ! *En général, la composition d'équivalents produit des résultats hasardeux. C'est pourquoi on a pris soin ici de composer des limites.*