> *Pour tout entier* $n \geqslant 2$, *on note* π_n, *le nombre d'entiers premiers compris (au sens large) entre* 1 *et* n *et, pour tout entier* $n \geqslant 1$, *on note* p_n, *le* n*-ième entier premier.*
> *On a donc, par exemple,*
>
> $$p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5,\ p_5 = 7\ldots \qquad \pi_2 = 1,\ \pi_3 = \pi_4 = 2,\ \pi_5 = 3, \pi_6 = \pi_7 = 4\ldots$$
>
> *On admet le* Théorème des nombres premiers *qui énonce :*
>
> $$\pi_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{\ln n}.$$
>
> *En déduire un équivalent de* p_n *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.

Il est prudent de traduire cet équivalent sous la forme d'une limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi_n \ln n}{n} = 1.$$

✍ *On peut toujours composer des limites, on ne peut pas toujours composer des équivalents.*

Par définition, $\pi_{p_n} = n$ pour tout entier $n \geqslant 1$ et comme l'ensemble des nombres premiers est infini, on sait que la suite (p_n) tend vers $+\infty$. Par composition de limites, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n \ln p_n}{p_n} = 1 \tag{$\star$}$$

et aussi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln \ln p_n}{\ln p_n} = 0 \tag{$\dagger$}$$

puisque $\ln \ln x = o(\ln x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

À nouveau par composition de limites (continuité de $\ln$ en 1), on déduit de $(\star)$ que

$$\lim_{n\to+\infty} \ln n + \ln \ln p_n - \ln p_n = 0,$$

ce qu'on peut aussi écrire sous la forme

$$\ln n - \ln p_n + o(\ln p_n) \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$$

en tenant compte de $(\dagger)$.

Comme $\ln n$ et $\ln p_n$ tendent vers $+\infty$, on en déduit que

$$\ln n = \ln p_n + o(\ln p_n), \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \ln p_n \sim \ln n.$$

En revenant à $(\star)$, on en déduit enfin que

$$p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n \ln n.$$