Index des démonstrations rédigées

Chapitre 7 — Espaces préhilbertiens et euclidiens (sans réduction)

[7.3] 05-08
[47] 05-01
[57] 05-03
[58] 05-02
[62] 05-07
[63.1] 05-04
[63.3] 05-11
[64] 05-05
[65] 05-06
[86] 05-12
[154] 05-10

Chapitre 16 — Espaces euclidiens (avec réduction)

[8] 15-17
[40] rms130-1331
[41] rms130-1332
[43] 15-01
[46] 15-02
[48] rms130-1066
[49] rms130-1333
[53] 15-04
[54] 15-05
[55] rms130-680
[56] 15-07
[57] rms130-683
[60] rms130-1314
[71] 15-10
[76] rms130-1322
[77] 15-13
[78] rms130-830
[84] 15-14
[87.1] rms130-532

Exercice 1 — 05-01

1. Soit $X = \langle X_1, \dots, X_n \rangle$, la matrice colonne qui représente un vecteur u dans une base orthonormée.

Alors $\|u\|^2 = X^\top.X$ et $\|u\| \geqslant |X_k|$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$.

2.

$$\left|\operatorname{Det}(u_1, \dots, u_n)\right| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \|u_k\|$$

Exercice 2 — 05-02

Soit u, un endomorphisme d'un espace euclidien E tel que

$$\forall\, x \in E, \quad \|u(x)\| \leqslant \|x\|.$$

Démontrer que

$$E = \operatorname{Ker}(u - I) \oplus \operatorname{Im}(u - I).$$

On pourra s'intéresser à l'application définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad q(t) = \|x + t \cdot y\|^2 - \|u(x + t \cdot y)\|^2$$

en prenant $x \in \operatorname{Ker}(u - I)$.

Exercice 3 — 05-03

On suppose que $\ell^2(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire canonique. L'orthogonal du sous-espace des suites nulles à partir d'un certain rang est réduit à $\{0\}$.

Exercice 4 — 05-04

$$\min_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} \left[t^3 - (a + bt + ct^2)\right]^2 e^{-t}\, dt = 36$$

Le minimum est atteint en $(a, b, c) = (6, -18, 9)$.

Exercice 5 — 05-05

L'espace $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

1. La distance de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

au sous-espace $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est égale à $\sqrt{11}$.

2. L'ensemble $H = [\operatorname{tr}(M) = 0]$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et la distance de I_3 à cet hyperplan est égale à $\sqrt{3}$.

Exercice 6 — 05-06

L'espace $E = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

Étant donné $y_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on considère l'équation matricielle

$$Ax = y_0$$

d'inconnue $x \in E$, avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On suppose que les colonnes de A sont linéairement indépendantes : $\operatorname{rg} A = p$.

1. Si $n = p$, alors A est inversible et l'équation admet une seule solution, égale à $A^{-1}y_0$.

La matrice colonne $x_0 \in E$ est dite **solution approchée au sens des moindres carrés** lorsque

$$\|y_0 - Ax_0\| = \inf_{x\in E} \|y_0 - Ax\|.$$

2. On suppose que $n > p$.

2. a. L'équation $Ax = y_0$ admet au plus une solution $x_0 \in E$.

2. b. Elle admet une, et une seule, solution approchée au sens des moindres carrés : l'unique vecteur $x_0 \in E$ tel que Ax_0 soit le projeté orthogonal de y_0 sur le sous-espace $\operatorname{Im} A$.

2. c. Ce vecteur x_0 est l'unique solution de l'équation

$$A^\top.Ax = A^\top.y_0.$$

2. d. Si $A^\top.Ax = 0$, alors $\|Ax\| = 0$, donc la matrice $A^\top.A$ est inversible. La matrice $(A^\top.A)^{-1}A^\top$ est parfois appelée **pseudo-inverse** de A.

Exercice 7 — 05-07

Soient $a_0, \dots, a_n$, des réels.

1. À quelle condition sur les réels $a_0, \dots, a_n$ l'expression

$$\langle P \,|\, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$$

définit-elle un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}_n[X]$?

(On supposera dans la suite que cette condition est remplie.)

2. L'orthogonal du sous-espace

$$F = \left\{P \in E \,:\, \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\right\}$$

est la droite vectorielle dirigée par le monôme 1.

3. La distance du monôme X^n au sous-espace F est égale à

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}}\left|\sum_{k=0}^{n} a_k^n\right|.$$

Exercice 8 — 05-08

Soit $D = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont tous strictement positifs. L'application définie par

$$\forall\, (X, Y) \in E \times E, \quad \varphi(X, Y) = X^\top.D.Y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k y_k$$

est un produit scalaire sur $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 9 — 05-09

Soit E, un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire. On considère une famille $\mathscr{F} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de vecteurs non nuls tels que

$$\forall\, x \in E, \quad \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \,|\, x \rangle^2 = \langle x \,|\, x \rangle. \qquad (\star)$$

1. On note F, le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\mathscr{F} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Déterminer l'orthogonal de F. Que peut-on en déduire sur la famille $\mathscr{F}$?

2. Soit $v \in L(E)$. Démontrer que

$$\forall x \in E, \quad \langle v(x) \,|\, x \rangle = 0 \iff v^* = -v.$$

3. On définit $u \in L(E)$ en posant

$$\forall x \in E, \quad u(x) = x - \sum_{i=1}^{n} \langle x \,|\, e_i \rangle \, e_i.$$

Démontrer que $u = u^*$, puis que

$$\forall x \in E, \quad \langle u(x) \,|\, x \rangle = 0.$$

Que peut-on en déduire sur u ? sur la famille $\mathscr{F}$?
4. Démontrer que $\mathscr{F}$ est une base orthonormée de E dans les cas suivants :
4. a. Les vecteurs de $\mathscr{F}$ sont tous des vecteurs unitaires.
4. b. La famille $\mathscr{F}$ est libre.
5. L'espace $E = \mathbb{R}^2$ est muni du produit scalaire canonique. Pour quelle valeur de r la famille $\mathscr{F}$ constituée des vecteurs

$$e_1 = r \cdot (1, 0), \quad e_2 = r \cdot \left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad e_3 = r \cdot \left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$$

vérifie-t-elle la relation étudiée ?

Exercice 10 — 05-10

L'espace $E = \mathbb{R}[X]$ est muni du produit scalaire défini par

$$(P \,|\, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt.$$

On considère la forme linéaire $\varphi = [P \mapsto P(0)]$.
1. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un, et un seul, $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad P(0) = \int_0^1 P(t)Q_n(t)\,dt.$$

1. b. Si la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $Q_\omega \in E$ (pour la norme $\|\cdot\|$), alors $\varphi(P) = (P \,|\, Q_\omega)$ pour tout $P \in E$.
2. S'il existe $Q_\omega \in E$ tel que $\varphi(P) = (P \,|\, Q_\omega)$ pour tout $P \in E$, il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall P \in E, \quad |P(0)| \leqslant K\|P\|.$$

3. a. Il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n(0) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \|P_n\| = 0.$$

3. b. Quelle que soit cette suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(\deg P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.
4. La suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle dans E pour $\|\cdot\|$? Et pour $\|\cdot\|_\infty$?

Exercice 11 — 05-11

$$\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 \left(\sqrt{t} - a - bt\right)^2 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = \frac{4}{3} - \frac{69\pi^2}{512}$$

Le minimum est atteint en $(a, b) = (3\pi/32,\ 15\pi/64)$.

Exercice 12 — 05-12

Soient a, un vecteur non nul de E et k, un réel non nul.
1. Démontrer que l'endomorphisme défini par

$$\forall x \in E, \quad f_k(x) = x + k\langle a \,|\, x \rangle \, a$$

est auto-adjoint. Exprimer cet endomorphisme à l'aide de I_E et de la projection orthogonale π sur la droite $\mathbb{R} \cdot a$.
2. À quelle condition sur $k \in \mathbb{R}$ l'endomorphisme f_k est-il une isométrie ?

Exercice 13 — 05-13

Soient E, un espace euclidien et $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_n)$, une famille de vecteurs de E et

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot u_k.$$

Démontrer que

$$\|x\|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \|u_k\|^2\right).$$

Exercice 14 — 05-14

Soient a et b, deux vecteurs unitaires.
1. L'endomorphisme f défini par

$$\forall x \in E, \quad f(x) = x - (a \,|\, x)\ b$$

est symétrique si, et seulement si, a et b sont égaux ou opposés.
2. L'endomorphisme f est inversible si, et seulement si, $(a \,|\, b) \neq 1$, c'est-à-dire $a \neq b$ et, dans ce cas,

$$\forall x \in E, \quad f^{-1}(x) = x + \frac{(a \,|\, x)}{1 - (a \,|\, b)}\ b.$$

3. L'endomorphisme f est diagonalisable si, et seulement si, a et b sont ne sont pas orthogonaux et dans ce cas,

$$E = (\mathbb{R} \cdot b) \oplus (\mathbb{R} \cdot a)^\perp.$$

Exercice 15 — 05-15

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une base d'un espace préhilbertien réel E. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la base orthonormée de E déduite de la base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par l'algorithme de Gram-Schmidt et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une famille orthonormée de vecteurs de E telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{Vect}(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n) = \mathrm{Vect}(e_0, \ldots, e_n).$$

Démontrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \varepsilon_k = \pm u_k.$$

Exercice 16 — 15-01

Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{Ker}\, A^\top.A = \mathrm{Ker}\, A, \qquad \mathrm{Im}\, A^\top.A = (\mathrm{Ker}\, A)^\perp,$$
$$\mathrm{Ker}\, A.A^\top = (\mathrm{Im}\, A)^\perp, \qquad \mathrm{Im}\, A.A^\top = \mathrm{Im}\, A$$

et en particulier

$$\mathrm{rg}(A^\top.A) = \mathrm{rg}(A.A^\top) = \mathrm{rg}(A).$$

Exercice 17 — 15-02

Soient f et g, deux endomorphismes auto-adjoints.

1. S'il existe une base de E constituée de vecteurs propres à la fois pour f et pour g, alors $f \circ g = g \circ f$.

2. On suppose que $f \circ g = g \circ f$. Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, on note g_λ, l'endomorphisme induit par restriction de g au sous-espace

$$E_\lambda^f = \mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{I}_E).$$

Tout vecteur propre de g_λ est aussi un vecteur propre de f. Il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres à la fois pour f et pour g.

Exercice 18 — 15-03

Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, les matrices $B = A^\top.A$ et $C = A.A^\top$ sont des matrices symétriques positives :

$$\forall\, X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \begin{cases} X^\top.B.X = \|AX\|^2 \\ X^\top.C.X = \|A^\top.X\|^2. \end{cases}$$

Les matrices $A^\top.A$ et $A.A^\top$ sont définies positives si, et seulement si, la matrice A est inversible.

Exercice 19 — 15-04

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Pour tout entier *impair* $p \in \mathbb{N}$, il existe un, et un seul, endomorphisme $v \in \mathcal{S}(E)$ tel que $v^p = u$.

Exercice 20 — 15-05

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice nilpotente d'indice p. Si les matrices A et $A^\top$ commutent, alors la matrice symétrique $A^\top.A$ est nilpotente et la matrice A est nulle.

Exercice 21 — 15-06

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$.

1.

$$\min_{\|x\|=1} \big\|u(x)\big\| = \min_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} |\lambda|, \qquad \max_{\|x\|=1} \big\|u(x)\big\| = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} |\lambda|$$

2. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\forall\, x \in E, \quad \big\|P(u)(x)\big\| \leqslant \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \big|P(\lambda)\big|\, \|x\|.$$

3. Un endomorphisme auto-adjoint u est **contractant** :

$$\forall\, x \in E, \qquad \big\|u(x)\big\| \leqslant \|x\|$$

si, et seulement si, $\mathrm{Sp}(u) \subset [-1, 1]$. Il est **strictement contractant** :

$$\forall\, x \neq 0, \qquad \big\|u(x)\big\| < \|x\|$$

si, et seulement si, $\mathrm{Sp}(u) \subset]-1, 1[$.

Exercice 22 — 15-07

Pour tout endomorphisme u d'un espace euclidien E, l'application $u^* \circ u$ est un endomorphisme auto-adjoint et il existe une base orthonormée $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de E telle que

$$\forall\, i \neq j, \quad \big(u(e_i)\,\big|\,u(e_j)\big) = 0.$$

Exercice 23 — 15-08

Le sous-espace $F = (V_+ \oplus V_-)^\perp$ est stable par u. On suppose qu'il existe un entier k tel que $2k \leqslant \dim F$ et des plans $P_1, \ldots, P_k$ contenus dans F, deux à deux orthogonaux et stables par u.

1. Si G est un sous-espace vectoriel de F, alors

$$F = G \overset{\perp}{\oplus} (V_+ \overset{\perp}{\oplus} V_- \overset{\perp}{\oplus} G)^\perp.$$

2. Si $\dim F > 2k$, alors le sous-espace vectoriel

$$F_{k+1} = \big[(V_+ \overset{\perp}{\oplus} V_-) \overset{\perp}{\oplus} (P_1 \overset{\perp}{\oplus} P_2 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} P_k)\big]^\perp$$

est stable par u et contenu dans F, donc $\dim F \geqslant 2k + 2$.

3. Dans ce cas, l'endomorphisme u_{k+1} induit par restriction de u à F_{k+1} est une isométrie qui n'a pas de valeurs propres réelles et son polynôme minimal admet un diviseur μ_{k+1} irréductible de degré 2.

4. Si x_{k+1} est un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}\big(\mu_{k+1}(u_{k+1})\big)$, alors

$$P_{k+1} = \mathrm{Vect}(x_{k+1}, u(x_{k+1}))$$

est un plan stable par u, contenu dans F et orthogonal aux plans $P_1, \ldots, P_k$.

Exercice 24 — 15-10

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

1. Il existe une matrice orthogonale Q et une matrice diagonale $\Delta \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A = Q^\top.\Delta^2.Q$$

et une matrice P telle que

$$A = P^\top.P.$$

La matrice P est inversible si, et seulement si, la matrice A est définie positive.

2. Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors l'algorithme de Gram-Schmidt appliqué au produit scalaire

$$\psi_A = \big[(X, Y) \mapsto X^\top.A.Y\big]$$

prouve l'existence d'une matrice triangulaire inversible P telle que $A = P^\top.P$.

3. Une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire si, et seulement si, il existe un automorphisme u de E tel que

$$\forall\, (x, y) \in E \times E, \qquad \varphi(x, y) = \big(u(x)\,\big|\,u(y)\big)\,.$$

Exercice 25 — 15-13

Soit φ, un produit scalaire sur E. Notons $\varphi_0 = (\,\cdot\,|\,\cdot\,)$, le produit scalaire de référence.

1. Si $\mathscr{B}_0$ est une base orthonormée pour φ_0, alors

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\varphi_0) = I_n \quad \text{et} \quad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\varphi) = \Gamma \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}).$$

2. Il existe une matrice orthogonale Q et une matrice diagonale Δ telle que

$$Q^\top.\Gamma.Q = \Delta.$$

3. La matrice Q est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}_0$ à une base $\mathscr{B}$. Comme

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi_0) = I_n \quad \text{et} \quad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \Delta,$$

alors la base $\mathscr{B}$ est simultanément une base orthonormée pour φ_0 et une base orthogonale pour φ.

Exercice 26 — 15-14

Soient E, un espace euclidien de dimension n et $u \in \mathcal{S}^+(E)$.

1. On suppose qu'il existe un endomorphisme $v \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $v^2 = u$. Pour toute valeur propre λ de u,

$$\mathrm{Ker}(u - \lambda I) = \mathrm{Ker}(v - \sqrt{\lambda} I),$$

ce qui prouve l'unicité d'un tel endomorphisme v.

2. Il existe un, et un seul, endomorphisme $v \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $v^2 = u$.

3. Il existe plusieurs endomorphismes $w \in \mathcal{S}(E)$ tels que $w^2 = u$. Plus précisément, si les sous-espaces propres de u sont des droites, alors il existe 2^n endomorphismes $w \in \mathcal{S}(E)$ tels que $w^2 = u$; sinon, il en existe une infinité.

Exercice 27 — 15-17

Soit $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_d)$, une base de $E = \mathbb{R}_d[X]$ qui est orthonormée pour le produit scalaire φ. On considère une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E telles que $\|P_n\|$ tende vers 0.

1.

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant d, \quad (\,\varepsilon_k \,|\, P_n\,) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

2.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = \sum_{k=0}^{d} (\,\varepsilon_k \,|\, P_n\,)\, \varepsilon_k(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Exercice 28 — ccp20-EB

1. L'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales et l'ensemble T_n^+ des matrices triangulaires supérieures dont les valeurs propres sont strictement positives sont des sous-groupes de $GL_n(\mathbb{R})$ et

$$O_n(\mathbb{R}) \cap T_n^+ = \{I_n\}.$$

2. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

2. a. L'application

$$\varphi = \left[(X, Y) \mapsto X^\top.(A^\top.A)Y\right]$$

est un produit scalaire sur $E = \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

2. b. Il existe une base $\mathscr{B}$ de E, orthonormée pour φ, telle que la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathscr{B}$ appartienne à T_n^+.

2. c. Il existe une matrice $T \in T_n^+$ telle que

$$A^\top.A = T^\top.T.$$

3. Il existe un, et un seul, couple $(O, T) \in O_n(\mathbb{R}) \times T_n^+$ tel que

$$A = OT.$$

Exercice 29 — ccp24-NH

Soit E, un espace préhilbertien. On considère une famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de vecteurs non nuls de E telle que

$$\forall\, x \in E, \quad \langle x \,|\, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \,|\, x\rangle^2$$

et on note $F = \mathrm{Vect}(e_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n)$.

1. Identifier le sous-espace $F^\perp$. Qu'en déduire sur la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$?

2. Soit $v \in L(E)$. Démontrer que

$$\forall\, x \in E, \quad \langle v(x) \,|\, x\rangle = 0 \iff v^* = -v.$$

3. On définit $u \in L(E)$ en posant

$$\forall\, x \in E, \quad u(x) = x - \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \,|\, x\rangle \cdot e_i.$$

Démontrer que u est auto-adjoint et que

$$\forall\, x \in E, \quad \langle u(x) \,|\, x\rangle = 0.$$

Qu'en déduire sur u et sur la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$?

4. On suppose que E est de dimension finie. Démontrer que $\dim E = n$ et que la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base orthonormée de E.

Exercice 30 — pg23S4-a

Avec $E = \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$, on pose

$$\forall\, (f, g) \in E\times E, \quad \varphi(f, g) = \int_0^1 f'(t)g'(t)dt + f(0)g(1) + f(1)g(0).$$

Démontrer que φ est un produit scalaire sur E.

Exercice 31 — pg23S4-b

L'espace $E = \mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique. On considère le sous-espace F caractérisé par le système suivant.

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

1. Calculer la matrice relative à la base canonique de p, projection orthogonale sur F.

2. Calculer la distance du point $c = (1, 1, 1, 3)$ au sous-espace F.

Exercice 32 — pg23S4-c

Soient E, un espace euclidien et $f : E \to E$, une application telle que

$$\forall\, (x, y) \in E, \quad \langle f(x) \,|\, f(y)\rangle = \langle x \,|\, y\rangle.$$

Démontrer que f est linéaire.

Exercice 33 — pg23S4-d

Soient x_0, x_1, …, x_n, x_{n+1}, des vecteurs de E, espace euclidien de dimension n. Démontrer qu'il est impossible d'avoir

$$\forall\, i \neq j, \quad \langle x_i \,|\, x_j\rangle < 0.$$

Exercice 34 pg23S5-c

Soient E, un espace euclidien ; $f \in O(E)$, une isométrie vectorielle et F, un sous-espace de E. Démontrer que

$$f_*(F^\perp) = \big(f_*(F)\big)^\perp.$$

Exercice 35 pg23S5-d

Soient E, un espace euclidien et f, un endomorphisme de E qui conserve l'orthogonalité :

$$\forall\, x, y \in E, \qquad \langle x \,|\, y \rangle = 0 \implies \big\langle f(x) \,\big|\, f(y) \big\rangle = 0.$$

✍ *Les automorphismes qui conservent l'orthogonalité sont appelées des* ***similitudes****.*

Cet exercice démontre que toute similitude est la composée d'une isométrie vectorielle (g) et d'une homothétie (de rapport $\alpha > 0$).

1. Soient u et v, deux vecteurs unitaires. Calculer $\langle u + v \,|\, u - v \rangle$.
2. Démontrer qu'il existe un réel positif α tel que

$$\forall\, x \in E, \qquad \big\|f(x)\big\| = \alpha \,\|x\|.$$

3. En déduire qu'il existe une isométrie vectorielle g telle que $f = \alpha \cdot g$.

Exercice 36 pg23S5-e

Soit f, un endomorphisme de l'espace euclidien E. Démontrer que

$$\operatorname{Ker} u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp \quad \text{et que} \quad \operatorname{Im} u^* = (\operatorname{Ker} u)^\perp.$$

Exercice 37 rl25S4-a

L'espace $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille n à coefficients réels est muni de son produit scalaire canonique, défini par

$$\forall\, A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \langle A \,|\, B \rangle = \operatorname{tr}(A^\top . B).$$

1. Démontrer que le sous-espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques et le sous-espace $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques sont supplémentaires orthogonaux.
2. Déterminer l'orthogonal du sous-espace $D_n(\mathbb{R})$ des matrices diagonales.
3. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Pour toute matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\Phi(M) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2.$$

Démontrer que $\Phi(M)$ atteint un minimum lorsque M parcourt le sous-espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que ce minimum est égal à

$$\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_{i,j} - a_{j,i})^2.$$

Exercice 38 rl25S4-b

L'espace $\mathbb{R}^4$ est muni du produit scalaire canonique. On considère d'une part le vecteur

$$y = (1, 1, 1, 1)$$

et d'autre part le sous-espace

$$F = [x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0] \cap [2x_2 + x_3 + x_4 = 0].$$

1. Calculer la distance du vecteur y au sous-espace F.
2. Donner une base orthonormée de F.

Exercice 39 Off2017-94b

Soient E, un espace euclidien de dimension n et v, un vecteur non nul de E.
1. Si les scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ne sont pas tous nuls, alors il existe une base $\mathscr{C} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que

$$v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k.$$

2. La base $\mathscr{C}$ peut-elle être choisie orthogonale ? orthonormée ?

Exercice 40 Off2017-100b

1. Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un, et un seul, polynôme T_n tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos x) = \cos nx.$$

Préciser le degré de T_n.
2. Démontrer que l'application $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ définie par

$$\forall\, P, Q \in \mathbb{R}[X], \quad \langle P \,|\, Q \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt$$

est un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}[X]$.
3. Démontrer que la famille $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthogonale de E pour ce produit scalaire. S'agit-il d'une base orthonormée ?

Exercice 41 Off2017-191

On considère un espace vectoriel réel E muni d'un produit scalaire $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$. Sur cet espace, on définit deux types de convergence :

— on dit que la suite de vecteurs $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge fortement** vers le vecteur $\ell \in E$ lorsque

$$\lim_{n \to +\infty} \|x_n - \ell\| = 0$$

(il s'agit de la convergence au sens habituel) ;
— on dit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge faiblement** vers le vecteur $\ell \in E$ lorsque

$$\forall\, y \in E, \quad \lim_{n \to +\infty} \langle x_n - \ell \,|\, y \rangle = 0.$$

1. Démontrer l'unicité de la limite pour la convergence faible.
2. Démontrer que la convergence forte implique la convergence faible.

3. Démontrer que la suite de vecteurs $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers $\ell \in E$ si, et seulement si, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers ℓ et si

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = \|x\|.$$

4. En déduire que : si E est un espace euclidien, alors les deux notions de convergence sont équivalentes.

Exercice 42 — Off2017-201a

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par

$$\forall P, Q \in E, \quad \langle P \,|\, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt.$$

Pour tout $P \in E$, on pose également

$$\varphi(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\,dt.$$

1. Démontrer que φ est une forme linéaire sur E. Déterminer son rang et démontrer que

$$(\operatorname{Ker}\varphi)^{\perp} = \mathbb{R}_0[X].$$

2. Pour $a \in \mathbb{R}$, démontrer que l'application g_a définie par

$$\forall P \in E, \quad g_a(P) = P + 2a\varphi(P)$$

est un endomorphisme auto-adjoint de E.
3. Calculer la matrice de g_a relative à la base canonique de E dans le cas $n = 3$. Cet endomorphisme est-il inversible ?
4. On se restreint au cas $n = 3$. Démontrer que l'application f_a définie par

$$\forall P \in E, \quad f_a(P) = P + 2a\varphi(P).X$$

est un endomorphisme de E. Calculer la matrice de f_a relative à la base canonique de E. Cet endomorphisme est-il inversible ? Est-il auto-adjoint ?

Exercice 43 — Off2017-207b

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quels que soient P et Q dans $E = \mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$\langle P \,|\, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1).$$

1. Démontrer que $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Démontrer que

$$F = \{P \in E \,:\, P(1) = 0\}$$

est un sous-espace de E et préciser sa dimension.
3. Calculer la distance $d(1, F)$.

Exercice 44 — Off2017-220a

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Écrire la matrice relative à la base canonique de la projection orthogonale sur le plan

$$H = [x - 2y + z = 0].$$

Exercice 45 — Off2017-228a

1. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'intégrale généralisée

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t}\,dt$$

est-elle convergente ?
2. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}, puis démontrer que $I_n = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Démontrer que l'application $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ définie par

$$\forall P, Q \in E, \quad \langle P \,|\, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,dt$$

est un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}[X]$.
4. Vérifier que l'application φ définie par

$$\forall P \in E, \quad \varphi(P) = XP'' + (1 - X)P'$$

est un endomorphisme de E.
5. Vérifier que

$$\forall P, Q \in E, \quad \langle \varphi(P) \,|\, Q \rangle = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\,dt.$$

En déduire que l'endomorphisme φ est auto-adjoint.

Exercice 46 — Off2019-175

L'espace $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire canonique.
1. Démontrer que les sous-espaces vectoriels $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et orthogonaux.
2. Pour $n = 3$, calculer la distance de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

au sous-espace $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque, démontrer que l'ensemble H des matrices de trace nulle est un sous-espace de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On donnera la dimension de ce sous-espace. Calculer la distance de I_n à H.

Exercice 47 — Off2020-198b

1. Calculer

$$\int_0^1 t^n \ln t\,dt \quad \text{puis} \quad \int_0^1 t^n \ln^2 t\,dt$$

pour tout $n \geqslant 2$.
2. Calculer le projeté orthogonal de w sur F.
3. Calculer

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (at + b - t\ln t)^2 t^2\,dt.$$

Exercice 48 — rms130-525

Démontrer que le rang d'une matrice antisymétrique est pair.

Exercice 49 rms130-532

1. La matrice S est symétrique et définie positive si, et seulement si, il existe une matrice inversible P telle que $S = P.P^\top$.
2. Quelles que soient $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, la matrice ST est diagonalisable.
3. Si A est diagonalisable, alors il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que

$$A^\top = S^{-1}.A.S.$$

Étudier la réciproque.

Exercice 50 rms130-680

L'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$ étant muni du produit scalaire défini par

$$\forall\, P, Q \in E, \quad \langle P \,|\, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt,$$

on considère l'application f définie par

$$\forall\, P \in E, \quad f(P) = \frac{1}{2}(X^2-1)P'' + XP' - P.$$

1. L'application f est un endomorphisme auto-adjoint de E et sa matrice relative à la base canonique de E est triangulaire supérieure. Pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$, il existe un vecteur propre P_k de f associé à la valeur propre

$$\lambda_k = \frac{k^2+k-2}{2}$$

et $\deg P_k = k$.
2. On note $(T_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$, la base orthonormée de E déduite de la base canonique par l'algorithme de Gram-Schmidt. Alors, pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$f(T_k) = \sum_{i=0}^{k} \langle f(T_k) \,|\, T_i \rangle \cdot T_i = \langle T_k \,|\, f(T_k) \rangle \cdot T_k$$

et les polynômes P_k et T_k sont proportionnels.

Exercice 51 rms130-683

Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et W, l'ensemble des vecteurs propres unitaires de A (l'espace $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ étant muni de sa norme euclidienne canonique). On pose

$$\forall\, X \in W, \qquad F_A(X) = \min_{u\in\mathbb{R}} \operatorname{tr}\left[(A - u\cdot X.X^\top)^2\right].$$

La fonction F_A atteint un minimum $m(A)$ sur W et

$$m(A) = \operatorname{tr}(A^2) - \rho(A^2)$$

où $\rho(A^2)$ est le **rayon spectral** de A^2, défini par

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \rho(M) = \max\{|\lambda|,\ \lambda \in \operatorname{Sp}(M)\}.$$

Exercice 52 rms130-779

Soit $f \in L(\mathbb{R}^4)$, l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Donner une base de l'image et une base du noyau de f.
2. Démontrer que l'image de f est stable par f.
3. On note g, l'endomorphisme de $\operatorname{Im} f$ induit par f. Donner la matrice de g dans une base de $\operatorname{Im} f$.
4. Déterminer les éléments propres de g.
5. En déduire les éléments propres de f.

Exercice 53 rms130-784

L'endomorphisme $\varphi : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(M) = M + M^\top$$

est-il diagonalisable ?

Exercice 54 rms130-830

Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. L'application

$$\varphi = \left[(X,Y) \mapsto X^\top.A.Y\right]$$

est un produit scalaire sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et comme l'application

$$\left[X \mapsto (A^{-1}B).X\right]$$

est un endomorphisme auto-adjoint de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire φ, la matrice $(A^{-1}B)$ est diagonalisable.

Exercice 55 rms130-922

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique et on considère une application

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le vecteur $f(t)$ n'est pas nul et que la famille

$$\big(f(t), f'(t)\big)$$

est liée. On pose alors

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \frac{f(t)}{\|f(t)\|}.$$

1. Démontrer que l'application g est de classe $\mathscr{C}^1$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le vecteur $g'(t)$ est à la fois colinéaire et orthogonal au vecteur $f(t)$.
2. En déduire l'existence d'un vecteur $e \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) \in \mathbb{R}\cdot e.$$

3. Cette propriété est-elle encore vraie lorsque la fonction f s'annule ?

Exercice 56 rms130-981

Soient U, un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et f, une application de classe $\mathscr{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$.

Démontrer que f est convexe sur U si, et seulement si,

$$\forall\, a, b \in U, \quad f(b) \geqslant f(a) + \langle \nabla f(a) \,|\, b-a \rangle.$$

Exercice 57 rms130-1066

Les espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ sont munis de leurs structures euclidiennes canoniques respectives. On considère la matrice $K_n \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $K_n(i,j) = 1$ si $|i-j| = 1$ et $K_n(i,j) = 0$ sinon.

1. Il existe une base orthonormée $(U_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de $\mathbb{R}^n$ et des réels $(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ tels que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad K_n U_k = \lambda_k U_k.$$

2. L'endomorphisme T de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \qquad T(M) = K_n M + M K_n + M$$

est diagonalisable.

3. La famille $(V_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = (U_i.U_j^\top)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base orthonormée de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de T.

Exercice 58 rms130-1135

Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice dont les coefficients diagonaux sont égaux à $a \in \mathbb{C}$ et les coefficients non-diagonaux sont tous égaux à $b \in \mathbb{C}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de M.
2. La matrice M est-elle diagonalisable ?
3. Calculer le polynôme minimal de M.
4. Calculer le déterminant de $I_n + M$.

Exercice 59 rms130-1142

Soit E, l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$. On pose

$$\forall\, f, g \in E, \quad \langle f \,|\, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt.$$

1. Démontrer que $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. On pose $f_0 = [t \mapsto 1]$ et $f_1 = [t \mapsto t]$ et on note F, le sous-espace de E engendré par f_0 et f_1.
2. a. Démontrer que $\dim F = 2$.
2. b. Calculer $\langle f_0 \,|\, f_1 \rangle$.
3. L'application $g = [t \mapsto e^t]$ appartient-elle à F ?
4. Calculer le projeté orthogonal de g sur F.
5. En déduire

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} (e^t - at - b)^2\,dt.$$

Exercice 60 rms130-1144

On considère un espace euclidien E de dimension $n \geqslant 2$. Étant donnés un vecteur unitaire a et un réel k, on définit l'application f en posant

$$\forall\, x \in E, \quad f(x) = x + k\langle x \,|\, a \rangle \cdot a.$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme de E.
2. Démontrer que

$$\forall\, x, y \in E, \quad \langle f(x) \,|\, y \rangle = \langle x \,|\, f(y) \rangle.$$

3. Pour quels $k \in \mathbb{R}$ l'application f est-elle inversible ?
4. Exprimer $(f \circ f)(x)$ en fonction de $f(x)$ et de x.
5. Déterminer les éléments propres de f.

Exercice 61 rms130-1145

Soit $(E, \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle)$, un espace euclidien et f, un endomorphisme auto-adjoint défini positif de E.

1. Démontrer que l'application φ définie par

$$\forall\, x, y \in E, \quad \varphi(x,y) = \langle f(x) \,|\, y \rangle$$

est un produit scalaire.
2. Démontrer qu'il existe un endomorphisme auto-adjoint défini positif $g \in L(E)$ tel que $f = g^2$.

Exercice 62 rms130-1147

Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, on pose

$$N(f) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \int_0^1 f(t)t^n\,dt \right|.$$

Démontrer que N est une norme sur $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

Exercice 63 rms130-1206

Soient $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, une colonne non nulle, et $A = X.X^\top$.

1. Calculer le rang et le spectre de A.
2. En déduire le polynôme caractéristique de A.
3. Démontrer que

$$\det(I_n + A) = 1 + X^\top.X.$$

Exercice 64 rms130-1314

1. Donner un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les matrices sont diagonalisables.
2. Donner un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont aucune matrice non nulle n'est diagonalisable.
3. Déterminer la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les matrices dont diagonalisables.

Exercice 65 rms130-1320

Soit $(e_1,\dots,e_n)$, une famille de vecteurs unitaires d'un espace euclidien E. On suppose que

$$\forall\, x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x \,|\, e_i \rangle^2.$$

1. Démontrer que $(e_1,\dots,e_n)$ est une famille orthogonale de E.
2. Soit $x \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)^\perp$. Démontrer que $x = 0_E$.
3. Démontrer que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormée de E.

Exercice 66 rms130-1322

La matrice de Gram relative à la base canonique de $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par

$$\forall\, P, Q \in E, \quad (P \,|\, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$$

est la matrice

$$H = \left(\frac{1}{i+j+1}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n}.$$

Cette matrice H est diagonalisable.

Pour $U \in \mathfrak{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, le scalaire $U^\top.H.U$ peut s'exprimer comme l'intégrale d'une fonction positive, donc les valeurs propres de H sont strictement positives.

Exercice 67 rms130-1331

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A.A^\top.A = I_n$.

1. Démontrer que A est symétrique.

2. Démontrer que $A = I_n$.

Exercice 68 rms130-1332

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, une matrice telle que

$$A^2 + A^\top = I_n.$$

1. Démontrer que $A = I_n - (A^\top)^2$.

2. En déduire que

$$(A - I_n)(A^2 + A - I_n) = 0_n.$$

3. Démontrer que $\det(I_n - A^\top) \neq 0$. En déduire que $(I_n - A)$ est inversible.

4. Démontrer que la matrice A est symétrique.

Exercice 69 rms130-1333

L'espace $E = \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes est muni de la norme produit, notée $\|\cdot\|$.

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que

$$\forall\, 1 \leqslant i,j \leqslant n, \qquad a_{i,j} > 0$$

et que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

On **admet** que

$$\dim \operatorname{Ker}(A - I_n) = n - 1.$$

1. Déterminer $\operatorname{Ker}(A - I_n)$.

2. Démontrer que

$$\forall\, X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \qquad \|AX\| \leqslant \|X\|.$$

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, une valeur propre de A. Démontrer que $|\lambda| \leqslant 1$.

4. On pose $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = A + I_n$.

4. a. Démontrer que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad b_{i,i} > \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} b_{i,j}.$$

4. b. En déduire que B est inversible.

5. Démontrer que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice R et que la matrice R est semblable à $E_{1,1} = \operatorname{Diag}(1,0,\dots,0)$.

Exercice 70 rms132-174

Soit $n \geqslant 5$. L'espace $\mathbb{R}^n$ étant muni de sa structure euclidienne canonique, on considère un sous-espace V de dimension $k \leqslant n-4$. La projection orthogonale sur V est notée π_V et la matrice relative à la base canonique de $\mathbb{R}^n$ de cette projection est notée P.

On note A, la matrice P privée de sa diagonale et $D = P - A$.

On considère un vecteur aléatoire $X = (X_1,\dots,X_n)$ défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Les coordonnées $X_1,\dots,X_n$ sont supposées indépendantes et de même loi :

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \mathbf{P}(X_k = \pm 1) = \frac{1}{2}.$$

On étudie ici la variable aléatoire

$$R = d(X,V) = \min_{v\in V} \|X - v\|.$$

1. Démontrer que $R(\omega) \leqslant \sqrt{n}$ pour tout $\omega \in \Omega$.

2. Démontrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad d(x,V)^2 = \langle x \,|\, x - \pi_V(x)\rangle.$$

3. En déduire que

$$R^2 = n - k - X^\top.A.X.$$

Calculer $\mathbf{E}(R^2)$.

4. Démontrer que $\operatorname{tr} D^2 \geqslant k^2/n$.

5. Démontrer que

$$\mathbf{E}\left[(X^\top.A.X)^2\right] \leqslant \frac{2k(n-k)}{n}.$$

6. Démontrer que

$$\mathbf{P}(R \geqslant \sqrt{n-k} + 2) \leqslant \frac{k}{8n}.$$

Exercice 71 rms132-455

1. Soit E, un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On rappelle que, par définition, un sous-espace H de E est un **hyperplan** si, et seulement si, il existe une droite vectorielle D telle que H et D soient supplémentaires dans E.

Démontrer qu'un sous-espace H de E est un hyperplan si, et seulement si, il existe une forme linéaire ℓ sur E, non identiquement nulle, telle que

$$H = \operatorname{Ker} \ell.$$

2. Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on pose

$$\Phi(A) = [M \mapsto \operatorname{tr}(AM)].$$

Démontrer que l'application Φ est un isomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sur son dual $E^* = L(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$.

3. Démontrer que la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$$

est inversible et calculer $\operatorname{tr}(J_r C)$ pour $1 \leqslant r \leqslant n$.

4. En déduire que tout hyperplan de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

Exercice 72 rms132-636

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

1. Démontrer que la matrice A est antisymétrique si, et seulement si,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad \langle Ax \,|\, x \rangle = 0.$$

2. Démontrer que la matrice A est antisymétrique si, et seulement si, pour *toute* solution de l'équation différentielle $X' = AX$, l'application $[t \mapsto \|X(t)\|]$ est constante.

Exercice 73 rms132-750

On considère un hyperplan H de l'espace $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Il existe une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, non nulle, telle que

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad M \in H \iff \operatorname{tr}(A^\top.M) = 0.$$

Cette matrice A est-elle unique ?

2. L'hyperplan H contient au moins une matrice inversible.

Exercice 74 rms132-1114

Dans un espace euclidien E, on considère un endomorphisme **antisymétrique** f :

$$\forall\, x, y \in E, \quad \langle f(x) \,|\, y \rangle = -\langle x \,|\, f(y) \rangle .$$

1. Démontrer que

$$\forall\, x \in E, \quad \langle f(x) \,|\, x \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle f^2(x) \,|\, x \rangle \leqslant 0.$$

2. Soit $\mathscr{B}$, une base orthonormée de E. Que dire de la matrice $A = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$?

3. En calculant $\det(A^\top)$, démontrer que : si f est inversible, alors la dimension de E est paire.

4. Démontrer que f^2 est diagonalisable et que son spectre est inclus dans $\mathbb{R}_-$.

Exercice 75 rms132-1122

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier sans calcul que A est diagonalisable. Donner une base de vecteurs propres.

2. Résoudre le système différentiel suivant.

$$\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$$

Exercice 76 rms132-1139

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le rang de A. Quelle est la dimension du noyau de A ?

2. La matrice A est-elle diagonalisable ?

3. Que dire de la multiplicité de la valeur propre 0 ?

4. Démontrer que A admet trois valeurs propres : 0, λ et $1 - \lambda$.

5. En déduire un polynôme annulateur de A dont le degré est égal à 3.

Exercice 77 rms132-1147

Soient E, un espace euclidien de dimension n ; $(e_1, \dots, e_n)$, une base orthonormée de E et $(x_1, \dots, x_n)$, une famille de vecteurs de E telle que

$$\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 < 1.$$

1. Démontrer que

$$\forall\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \quad \Big\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k \Big\|^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \Big) \Big(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 \Big).$$

2. En déduire que la famille

$$(e_1 + x_1, \dots, e_n + x_n)$$

est une base de E.

Exercice 78 rms132-1149

On pose $E = \mathbb{R}[X]$.

1. Calculer

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\, dt$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, sachant que $I_0 = 1$.

2. Pour $P, Q \in E$, on pose

$$\varphi(P, Q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-t^2}\, dt.$$

2. a. Démontrer que φ est un produit scalaire sur E.

2. b. Calculer la distance de X^3 au sous-espace $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 79 rms132-1150

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^\top.A = A.A^\top$. On suppose qu'il existe un entier $p \geqslant 2$ tel que $A^p = 0_n$. En considérant la matrice $B = A^\top.A$, démontrer que $A = 0_n$.

Exercice 80 rms132-1151

Soient A et B, deux matrices de $O_n(\mathbb{R})$ telles que

$$M = \frac{1}{3} \cdot (A + 2 \cdot B) \in O_n(\mathbb{R}).$$

1. Calculer $M.M^\top$ et en déduire $A.B^\top + B.A^\top$.

2. Démontrer que $A = B$.

Exercice 81 rms132-1152

Soient $C \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -C^\top \\ C & I_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

1. Calculer $M^\top.M$. En déduire que M est inversible.
2. Démontrer que la matrice $M^{-1}M^\top$ est orthogonale.

Exercice 82 rms132-1201

On étudie l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ représenté dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ par la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Calculer le rang et une base de l'image de f.
2. Soit g, l'endomorphisme induit par restriction de f au sous-espace $\operatorname{Im} f$. Démontrer que g est diagonalisable.

Exercice 83 rms132-1209

Soient a et b, deux vecteurs d'un espace euclidien E. Pour tout $x \in E$, on pose

$$f(x) = x - \langle a \,|\, x \rangle\, b.$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme de E.
2. Démontrer que f est bijectif si, et seulement si, $\langle a \,|\, b \rangle \neq 1$.

Exercice 84 rms132-1212

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A.A^\top.A = I_n$.
1. Démontrer que A est inversible.
2. Démontrer que A est symétrique.
3. En déduire que $A = I_n$.

Exercice 85 rms133-1285

On considère la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ (où $n \geqslant 2$) pour laquelle $a_{i,j} = 1$ si $i = 1$ ou $j = 1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.
1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer les éléments propres de A.
3. Calculer le déterminant de A.

Exercice 86 rms134-1436-1566

On considère un espace euclidien $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ et un endomorphisme f de E tel que

$$\forall\, x \in E, \quad \|f(x)\| \leqslant \|x\|.$$

1. Soit $x \in \operatorname{Ker}(f - I) \cap \operatorname{Im}(f - I)$. Démontrer qu'il existe un vecteur $y \in E$ tel que

$$x = f(y) - y.$$

Exprimer $f^n(y)$ en fonction de x, y et n.

2. Démontrer que

$$E = \operatorname{Ker}(f - I) \oplus \operatorname{Im}(f - I).$$

3. Soit $x \in E$. Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_p(x) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} f^k(x).$$

Démontrer que la suite $\big(v_p(x)\big)_{p \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 87 rms134-1437

Pour tous P et Q dans $E = \mathbb{R}[X]$, on pose

$$\langle P \,|\, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\, dt.$$

1. Vérifier que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Déterminer deux réels a et b tels que l'expression

$$\varphi(a, b) = \int_0^1 (t^2 - at - b)^2\, dt$$

soit minimale de deux manières :
- en construisant une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$;
- en choisissant a et b de telle sorte que le polynôme $(X^2 - aX - b)$ soit orthogonal au sous-espace $\mathbb{R}_1[X]$.

✍ *La première question est une question de cours archi-classique, il faut prendre soin de citer clairement tous les théorèmes qu'on applique (et ils sont quelques-uns).*

Exercice 88 rms134-1455

Soient E, un espace euclidien et u, un endomorphisme de E tel que $u^* \circ u = u \circ u^*$. Un tel endomorphisme est dit **normal**.

✍ *Les endomorphismes auto-adjoints et les isométries vectorielles sont évidemment des endomorphismes normaux.*

1. Pour tout $x \in E$,

$$\|u^*(x)\|^2 = \|u(x)\|^2.$$

2. En déduire que u et u^* ont mêmes valeurs propres et mêmes sous-espaces propres.
3. Démontrer que les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.
4. Si u est diagonalisable, alors u est auto-adjoint.

Exercice 89 rms134-1464

Soit E, un espace euclidien. On note K, l'ensemble des projecteurs orthogonaux de E.
1. Soit $p \in L(E)$, un projecteur. Démontrer que $p \in K$ si, et seulement si,

$$\forall\, x \in E, \quad \|p(x)\| \leqslant \|x\|.$$

2. En déduire que K est compact.

Exercice 90 rms135-1057

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice telle que

$$\forall\, X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^\top.A.X = 0.$$

Démontrer que $\det A \geqslant 0$.

Exercice 91 rms135-1404

Soit $n \geqslant 2$, un entier.
On considère la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients

$$\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant n, \quad a_{i,j} = \sin(i+j).$$

Calculer le rang de A, puis le déterminant de A.

Exercice 92 rms135-1408

Soit $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Démontrer que

$$\det(I_n + X.X^\top) = 1 + X^\top.X.$$

Exercice 93 rms135-1409

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Expliciter une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.
2. Soit $X \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$X^2 + X = A.$$

On pose $\Delta = P^{-1}XP$.
2. a. Calculer $\Delta^2 + \Delta$.
2. b. Démontrer que D et Δ commutent. En déduire que Δ est diagonale.
3. Résoudre l'équation $X^2 + X = A$ pour $X \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 94 rms135-1418

Soient a, b, c et d, des nombres complexes et

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}.$$

On suppose que $a^2 + b^2 \neq 0$.
1. Calculer le produit $M.M^\top$. En déduire la valeur de $\det M$.
2. a. On suppose que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$. Démontrer que $\operatorname{rg} M = 4$.
2. b. On suppose que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$. Démontrer que $\operatorname{rg} M = 2$.
3. Étudier la diagonalisabilité de M.

Exercice 95 rms135-1431

1. Soient E, un espace euclidien et F, un sous-espace de E. On suppose connue une base orthonormée de F. Rappeler l'expression du projeté orthogonal sur F d'un vecteur $u \in E$.
2. On munit l'espace $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. Calculer la matrice relative à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur la droite D représentée par

$$6x = 4y = z.$$

Exercice 96 rms135-1432

Soit E, l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour f et g dans E, on pose

$$\langle f \,|\, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt.$$

1. Démontrer que $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. On considère les vecteurs

$$f = \left[x \mapsto \sin^2 x\right], \quad g_1 = [x \mapsto \cos x] \quad \text{et} \quad g_2 = [x \mapsto \cos 2x].$$

Déterminer le projeté orthogonal de f sur le sous-espace $G = \operatorname{Vect}(g_1, g_2)$.

Exercice 97 rms135-1433

On munit l'espace $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique.
1. Démontrer que les sous-espaces vectoriels $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.
2. Soit $M \in \mathfrak{M}(\mathbb{R})$. Exprimer la distance de M au sous-espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ en fonction des coefficients de M.

Exercice 98 rms135-1434

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique et la base canonique est notée (e_1, e_2, e_3).
Déterminer la matrice de la rotation r dont l'axe est la droite D représentée par

$$x - y + z = x + y + z = 0$$

et telle que

$$r(e_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (e_1 + e_3).$$

Exercice 99 rms135-1435

Soient E, un espace euclidien et F, un sous-espace de E. On considère un endomorphisme auto-adjoint $u \in \mathcal{S}(E)$ et on note p, la projection orthogonale sur F.
Démontrer que $p \circ u$ est auto-adjoint si, et seulement si, le sous-espace F est stable par u.

Exercice 100 rms135-1438

1. Démontrer que l'application

$$\left[(M, N) \mapsto \operatorname{tr}(M^\top.N)\right]$$

est un produit scalaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Démontrer que

$$\forall\, M, N \in O_n(\mathbb{R}), \quad \operatorname{tr}(M^\top.N) \leqslant n.$$

3. Soient A et B, deux matrices symétriques réelles.
3. a. Démontrer que

$$\operatorname{tr}[(AB)^2] \leqslant \operatorname{tr}(A^2B^2).$$

3. b. En déduire que

$$\operatorname{tr}\left[(AB + BA)^2\right] \leqslant 4\sqrt{\operatorname{tr}(A^4)}\sqrt{\operatorname{tr}(B^4)}.$$

Exercice 101 rms135-1499

Soient $X_1, \dots, X_n$, des variables aléatoires réelles admettant une variance. On considère alors la matrice

$$S = \big(\mathbf{Cov}(X_i, X_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

et l'application

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$$

définie par

$$\forall\, U = (u_1, \dots, u_n), \quad f(U) = \frac{1}{\|U\|^2}\,\mathbf{V}\Big(\sum_{i=1}^{n} u_i X_i\Big).$$

(Il s'agit ici de la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$.)

1. Démontrer que la matrice S est diagonalisable.

2. Démontrer que

$$\forall\, U = (u_1, \dots, u_n), \quad U^\top.S.U = \mathbf{V}\Big(\sum_{i=1}^{n} u_i X_i\Big).$$

3. On ordonne les valeurs propres de S dans l'ordre décroissant :

$$\lambda_n \leqslant \cdots \leqslant \lambda_1$$

et on considère un vecteur $U \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

3. a. Démontrer que $U^\top.S.U \leqslant \lambda_1 \|U\|^2$.

3. b. En déduire que $f(U) \leqslant \lambda_1$. Prouver que cette inégalité est une égalité si, et seulement si, U est un vecteur propre de S associé à la valeur propre λ_1.

4. Soient $0 < a < 1$ et

$$S = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}.$$

4. a. Donner les valeurs propres de S.

4. b. En déduire la valeur de

$$\max_{U\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}} f(U)$$

et préciser les vecteurs $U \in \mathbb{R}^3$ pour lesquels ce maximum est atteint.

Produits scalaires (Solutions)

Solution 1 05-01

1. Si les coordonnées du vecteur u relatives à la BON $\mathscr{B}_0$ sont $(X_1, \dots, X_n)$, alors

$$u = \sum_{k=1}^{n} X_k \cdot \varepsilon_k$$

et d'après le Théorème de Pythagore,

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{n} X_k^2 = X^\top X.$$

En particulier, puisqu'il s'agit d'une somme de termes positifs,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \qquad X_k^2 \leqslant \|u\|^2$$

et donc

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \qquad |X_k| \leqslant \|u\|.$$

2.

✍ ***Rappel sur la notation utilisée***
On rappelle que le déterminant d'une famille de vecteurs dépend de la base dans laquelle on le calcule : on note donc en général

$$\det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n).$$

❧ *Si on considère deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$ est une matrice inversible :*

$$P = \mathfrak{Mat}(\mathscr{B} \to \mathscr{C})$$

et les matrices

$$A = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n) \quad \text{et} \quad A' = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}(u_1, \dots, u_n)$$

sont liées par la relation

$$A' = P^{-1}A$$

de telle sorte que

$$\det_{\mathscr{C}}(u_1, \dots, u_n) = \det A' = \frac{\det A}{\det P} = \frac{1}{\det P} \cdot \det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n).$$

❧ *Lorsque $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont deux bases orthonormées directes, la matrice de passage P est une matrice de rotation et son déterminant est égal à 1, si bien que dans ce cas particulier*

$$\det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n) = \det_{\mathscr{C}}(u_1, \dots, u_n).$$

On convient de noter Det, *le déterminant relatif à une base orthonormée directe quelconque.*

Si la famille $(u_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est liée, alors le déterminant est nul et l'inégalité est évidente.

❧ Si la famille $(u_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une base orthonormée, alors le déterminant est égal à ± 1 (selon l'orientation de cette base) et comme chaque norme est égale à 1, l'inégalité est évidente : c'est même une égalité.

❧ Il reste donc le cas où la famille

$$\mathscr{B} = (u_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$$

est une base non orthonormée de E.

L'algorithme de Gram - Schmidt permet de construire de proche en proche une base orthonormée

$$\mathscr{B}_0 = (\varepsilon_k)_{1\leqslant k\leqslant n}.$$

Selon l'orientation de la BON $\mathscr{B}_0$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}(u_1, \dots, u_n) &= \pm \det_{\mathscr{B}_0}(u_1, \dots, u_n) \\ &= \pm \det\big(\mathfrak{Mat}(\mathscr{B}_0 \to \mathscr{B})\big). \end{aligned}$$

Or, d'après l'algorithme de Gram-Schmidt, la matrice de passage

$$\mathfrak{Mat}(\mathscr{B}_0 \to \mathscr{B}) = (p_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

est triangulaire (supérieure), donc son déterminant est égal au produit de ses coefficients diagonaux :

$$\mathrm{Det}(u_1,\dots,u_n) = \pm\prod_{k=1}^{n} p_{k,k}.$$

D'après la question précédente,

$$\forall\, 1\leqslant k\leqslant n,\quad |p_{k,k}|\leqslant \|u_k\|$$

et par conséquent

$$\big|\,\mathrm{Det}(u_1,\dots,u_n)\big| \leqslant \prod_{k=1}^{n}|p_{k,k}|.$$

Solution 2 05-02

Comme $(u-I)$ est un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension *finie*, on sait que

$$\dim E = \dim \mathrm{Ker}(u-I) + \dim \mathrm{Im}(u-I)$$

(théorème du rang) et pour en déduire que

$$E = \mathrm{Ker}(u-I)\oplus \mathrm{Im}(u-I)$$

il suffit de vérifier que les deux sous-espaces sont en somme directe.

❧ Soient x et y, deux vecteurs de E. Pour tout réel t, on pose

$$q(t) = \|x+t\cdot y\|^2 - \big\|u(x+t\cdot y)\big\|^2.$$

Par hypothèse, l'application linéaire u diminue les longueurs :

$$\forall\, z\in E,\quad \|u(z)\|\leqslant\|z\|$$

donc

$$\forall\, t\in\mathbb{R},\qquad q(t)\geqslant 0.$$

Comme u est linéaire, on peut développer l'expression $q(t)$:

$$\begin{aligned} q(t) &= \|x+t\cdot y\|^2 - \|u(x)+t\cdot u(y)\|^2\\ &= \|x\|^2 - \|u(x)\|^2 + 2\big[\,\langle x\,|\,y\,\rangle - \langle\, u(x)\,|\,u(y)\,\rangle\,\big]t + \big[\|y\|^2-\|u(y)\|^2\big]t^2. \end{aligned}$$

Nous constatons (quelle surprise !) que q est une fonction polynomiale de degré inférieur à 2.

Revenons à notre objectif initial et choisissons maintenant un vecteur y appartenant à $\mathrm{Ker}(u-I)$. En particulier,

$$u(y)=y,\quad \text{donc}\quad \|y\|^2=\|u(y)\|^2$$

et par conséquent, pour tout $x\in E$ et tout $t\in\mathbb{R}$,

$$q(t) = \|x\|^2-\|u(x)\|^2 + 2\,\langle\, x-u(x)\,|\,y\,\rangle\; t.$$

La fonction q est en fait *affine* et comme elle est de signe constant sur $\mathbb{R}$, elle est donc *constante* ! Par conséquent,

$$\forall\, y\in\mathrm{Ker}(u-I),\ \forall\, x\in E,\quad \langle\, x-u(x)\,|\,y\,\rangle = 0$$

ou, autrement dit :

$$\mathrm{Im}(u-I)\quad\perp\quad \mathrm{Ker}(u-I).$$

Ces deux sous-espaces sont donc en somme directe et nous avons bien démontré que

$$E = \mathrm{Ker}(u-I)\overset{\perp}{\oplus}\mathrm{Im}(u-I).$$

Solution 3 05-03

Notons F, le sous-espace des suites nulles à partir d'un certain rang : la suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à F si, et seulement si, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ (dépendant de v) tel que

$$\forall\, n \geqslant N, \qquad v_n = 0.$$

❧ Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{R})$, une suite orthogonale à F. Pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_N = (u_0, \dots, u_N, 0, \dots) \in F.$$

Par hypothèse, $\langle u \,|\, v_N \rangle = 0$. Or

$$\langle u \,|\, v_N \rangle = \sum_{k=0}^{N} u_k^2$$

et comme les u_k sont des nombres réels, on en déduit que

$$\forall\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, 0 \leqslant k \leqslant N, \quad u_k = 0,$$

c'est-à-dire $u = 0$.

L'orthogonal de F est donc réduit au vecteur nul, alors que F est un sous-espace vectoriel *strict* de $\ell^2(\mathbb{R})$.

✍ *Cela signifie que F est un sous-espace dense dans $\ell^2(\mathbb{R})$ pour la norme associée au produit scalaire.*

Solution 4 05-04

On considère l'espace vectoriel

$$E = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, e_2, e_3) \subset \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$$

engendré par les fonctions

$$e_k = \left[t \mapsto t^k\right]$$

pour $0 \leqslant k \leqslant 3$.

L'application

$$\varphi = \left[(f, g) \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}\,dt\right]$$

est un produit scalaire sur E (essentiellement parce que le produit $f(t)g(t)e^{-t}$ est $\mathcal{O}(t^6 e^{-t})$ au voisinage de $+\infty$).

❧ L'expression

$$\int_0^{+\infty} \left[t^3 - (a + bt + ct^2)\right]^2 e^{-t}\,dt$$

est en fait

$$\left\|e_3 - (ae_0 + be_1 + ce_2)\right\|^2$$

et chercher le minimum de cette expression revient en fait à calculer

$$\left[\,d(e_3, F)\right]^2$$

où $F = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, e_2)$.

D'après le cours,

$$\left[\,d(e_3, F)\right]^2 = \langle\, e_3 \,|\, e_3 - p_F(e_3)\,\rangle$$

où $p_F(e_3)$ est le projeté orthogonal de e_3 sur F.

✍ *Lorsque l'expression de $e_3 - p_F(e_3)$ est un peu compliquée (comme ça va être le cas ici), cette formule pour le calcul de la distance est préférable à la formule évidente $\|e_3 - p_F(e_3)\|^2$. Il suffit de poser les deux calculs en parallèle pour s'en rendre compte !*

✍ *Si on connaissait un vecteur $n \in E$ orthogonal à F, on pourrait conclure rapidement en projetant orthogonalement sur la droite $F^\perp = \mathbb{R}\cdot n$. Mais un tel vecteur n'est pas donné et son calcul n'est ici pas particulièrement simple...*

❧ Pour calculer $p_F(e_3)$, nous allons passer par la caractérisation classique du projeté orthogonal.
Le vecteur $p_F(e_3)$ est l'unique vecteur

$$y = ae_0 + be_1 + ce_2 \in F$$

tel que $(y - e_3) \in F^\perp$, c'est-à-dire

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant 2, \quad \langle y - e_3 \,|\, e_k \rangle = 0$$

ou encore

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant 2, \quad \langle y \,|\, e_k \rangle = \langle e_3 \,|\, e_k \rangle.$$

En tenant compte de $y = ae_0 + be_1 + ce_2$, on aboutit au système suivant.

$$\begin{cases} a\langle e_0 \,|\, e_0 \rangle + b\langle e_1 \,|\, e_0 \rangle + c\langle e_2 \,|\, e_0 \rangle = \langle e_3 \,|\, e_0 \rangle \\ a\langle e_0 \,|\, e_1 \rangle + b\langle e_1 \,|\, e_1 \rangle + c\langle e_2 \,|\, e_1 \rangle = \langle e_3 \,|\, e_1 \rangle \\ a\langle e_0 \,|\, e_2 \rangle + b\langle e_1 \,|\, e_2 \rangle + c\langle e_2 \,|\, e_2 \rangle = \langle e_3 \,|\, e_2 \rangle \end{cases}$$

✍ *Si on connaissait une base orthogonale de F, on pourrait appliquer la formule bien connue*

$$p_F(e_3) = \sum_{k=0}^{2} \frac{\langle \varepsilon_k \,|\, e_3 \rangle}{\|\varepsilon_k\|^2} \cdot \varepsilon_k.$$

Mais l'énoncé ne nous donne pas une telle base et il faudrait recourir à l'algorithme de Gram-Schmidt pour en calculer une. Pourquoi pas ? Parce que ce serait sensiblement plus long !

❧ Pour une fois, le calcul de la matrice de Gram est sans douleur...

$$\forall\, i, j \in \mathbb{N}, \quad \langle e_i \,|\, e_j \rangle = \Gamma(i + j + 1) = (i + j)!$$

En résolvant le système, on trouve $(a, b, c) = (6, -18, 9)$.

Il reste à calculer

$$\begin{aligned} \langle e_3 \,|\, e_3 - p_F(e_3) \rangle &= \langle e_3 \,|\, e_3 \rangle - a\langle e_3 \,|\, e_0 \rangle - b\langle e_3 \,|\, e_1 \rangle - c\langle e_3 \,|\, e_2 \rangle \\ &= 36. \end{aligned}$$

✍ *En développant $\|e_3 - p_F(e_3)\|^2$, on aurait une somme de $4^2 = 16$ termes (au lieu des 4 termes de l'expression qu'on vient de calculer)...*

Solution 5 — 05-05

1. On *sait bien* que

$$\mathfrak{M}_3(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$$

et que le projeté orthogonal d'une matrice $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est la matrice

$$p(M) = \frac{M + M^T}{2}$$

si bien que

$$M - p(M) = \frac{M - M^T}{2}.$$

❧ Avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

on a donc

$$A - p(A) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \langle A \,|\, A - p(A) \rangle = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\begin{pmatrix} 9 & * & * \\ * & 5 & * \\ * & * & 8 \end{pmatrix}.$$

D'après la formule bien connue,

$$d\big(A, \mathcal{S}_3(\mathbb{R})\big) = \sqrt{11}.$$

✍ *Ne calculer que le strict nécessaire pour obtenir le produit scalaire, éviter les calculs superflus !*

2. On considère ici d'une part la droite $D = \mathbb{R} \cdot I_3$ et d'autre part le plan H d'équation $\operatorname{tr}(M) = 0$ (c'est le noyau d'une forme linéaire non identiquement nulle, donc un hyperplan de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$).

Comme $\operatorname{tr}(I_3) = 3 \neq 0$, on en déduit que la droite D et le plan H sont supplémentaires dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.
Par ailleurs, quelles que soient les matrices $A = \lambda I_3 \in D$ et $M \in H$, on a $\operatorname{tr}(M) = 0$ et par conséquent

$$\langle A \,|\, M \rangle = \operatorname{tr}[(\lambda I_3)^T M] = \lambda \operatorname{tr}(M) = 0.$$

Les deux sous-espaces H et D sont donc orthogonaux et

$$\mathfrak{M}_3(\mathbb{R}) = H \overset{\perp}{\oplus} D.$$

❧ Puisque H et D sont orthogonaux, le projeté orthogonal de $I_3 \in D$ sur H est la matrice nulle :

$$I_3 = \underbrace{O_3}_{\in H} + \underbrace{I_3}_{\in D}.$$

Par conséquent,

$$d(I_3, H) = \|I_3 - p(I_3)\| = \|I_3\| = \sqrt{\operatorname{tr}(I_3^T . I_3)} = \sqrt{3}.$$

Solution 6 — 05-06

1. Si $A \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$ et $\operatorname{rg} A = p$, alors la matrice A est inversible. Donc

$$\begin{aligned} Ax = y_0 &\iff A^{-1}(Ax) = A^{-1}y_0 \\ &\iff x = A^{-1}y_0. \end{aligned}$$

Cela prouve que l'équation $Ax = y_0$ admet une seule solution et que cette solution est $A^{-1}y_0$.

2. a. Le rang d'une matrice $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est toujours majoré par $\min\{n, p\}$.

Si $n > p$, alors le rang de A est *strictement* inférieur au nombre de lignes (c'est-à-dire à la dimension de l'espace d'arrivée), ce qui montre que A n'est pas surjective.

En notant $C_1, \ldots, C_p$, les colonnes de la matrice A et en considérant la colonne

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \qquad \text{on a} \qquad AX = \sum_{k=1}^{p} x_k C_k$$

et par conséquent

$$X \in \operatorname{Ker} A \iff \sum_{k=1}^{p} x_k C_k = 0.$$

Autrement dit : les vecteurs du noyau de A correspondent aux relations de liaison entre les colonnes de A.

Comme on suppose ici que les colonnes de A sont linéairement indépendantes, la matrice A est injective et l'équation $Ax = y_0$ admet donc *au plus une* solution.

Plus précisément,
— si $y_0 \in \operatorname{Im} A$, alors l'équation $Ax = y_0$ admet exactement une solution ;
— si $y_0 \notin \operatorname{Im} A$, alors l'équation $Ax = y_0$ n'a pas de solution.

✍ *Nous nous donnons pour objectif de définir une "solution alternative" avec le cahier des charges suivant :*
— quel que soit $y_0 \in F$, l'équation $Ax = y_0$ admet une, et une seule, solution alternative ;
— si l'équation $Ax = y_0$ admet une solution, la solution alternative doit coïncider avec la solution "normale" ;
— si l'équation $Ax = y_0$ n'admet pas de solution, la solution alternative doit être une alternative "raisonnable" (il ne serait pas raisonnable de convenir que la solution alternative serait le vecteur nul indépendamment du vecteur y_0 considéré).

2. b. Comme $\operatorname{Im} A$ est un espace de dimension finie, la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} A$ est bien définie. On peut donc considérer le projeté orthogonal z_0 du vecteur y_0 sur $\operatorname{Im} A$.

❧ Par définition, on a

$$z_0 \in \operatorname{Im} A \quad \text{et} \quad y_0 - z_0 \in (\operatorname{Im} A)^\perp.$$

On déduit alors du Théorème de Pythagore que

$$\begin{aligned} \forall\, z \in \operatorname{Im} A, \quad \|y_0 - z\|^2 &= \big\| \underbrace{(y_0 - z_0)}_{\in (\operatorname{Im} A)^\perp} + \underbrace{(z_0 - z)}_{\in \operatorname{Im} A} \big\|^2 = \|y_0 - z_0\|^2 + \|z_0 - z\|^2 \qquad (\star) \\ &\geqslant \|y_0 - z_0\|^2 \end{aligned}$$

et comme $z_0 \in \operatorname{Im} A$, ce minorant est en fait le minimum :

$$\|y_0 - z_0\| = \min_{z \in \operatorname{Im} A} \|y_0 - z\|.$$

❧ Comme $z_0 \in \operatorname{Im} A$ et que A est injective, il existe un *unique* vecteur $x_0 \in E$ tel que $z_0 = Ax_0$.
On déduit en outre de $(\star)$ que le minimum est atteint *seulement* pour $z = z_0$.
Par conséquent, il existe un, et un seul, vecteur $x_0 \in E$ tel que

$$\|y_0 - Ax_0\| = \min_{x \in E} \|y_0 - Ax\|.$$

✍ *Si $y_0 \in \operatorname{Im} A$, alors il existe un, et un seul, vecteur $u_0 \in E$ tel que $Au_0 = y_0$. Mais, dans ce cas, on a $z_0 = y_0 = Au_0$ et donc $x_0 = u_0$: si l'équation admet une solution u_0 "au sens classique", la solution x_0 "au sens des moindres carrés" est égale à u_0.*

2. c. Par définition du projeté orthogonal, le vecteur $y_0 - z_0 = y_0 - Ax_0$ est orthogonal au sous-espace $\operatorname{Im} A$. Par conséquent,

$$\forall\, u \in E, \quad \langle\, Au \,|\, y_0 - Ax_0 \,\rangle = 0.$$

Par définition du produit scalaire canonique sur $\mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

$$\langle\, Au \,|\, y_0 - Ax_0 \,\rangle = (Au)^\top.(y_0 - Ax_0) = u^\top.A^\top(y_0 - Ax_0) = \langle\, u \,|\, A^\top.(y_0 - Ax_0) \,\rangle.$$

Cela prouve que le vecteur $A^\top.(y_0 - Ax_0)$ est orthogonal à tout vecteur $u \in E$ et donc qu'il est nul :

$$A^\top.(y_0 - Ax_0) = 0$$

et donc

$$A^\top.y_0 = A^\top.Ax_0.$$

❧ Réciproquement, supposons que $A^\top.Ax = A^\top y$. Il est alors clair que

$$Ax \in \operatorname{Im} A \tag{†}$$

et que $A^\top.(Ax - y_0) = 0$. Par conséquent, pour tout $u \in E$,

$$0 = u^\top.A^\top.(Ax - y_0) = (Au)^\top.(Ax - y_0) = \langle\, Au \,|\, Ax - y_0 \,\rangle$$

c'est-à-dire

$$\forall\, z \in \operatorname{Im} A, \quad \langle\, z \,|\, Ax - y_0 \,\rangle = 0$$

ou encore

$$Ax - y_0 \in (\operatorname{Im} A)^\top. \tag{‡}$$

Les propriétés (†) et (‡) prouvent que Ax est le projeté orthogonal du vecteur y_0 sur le sous-espace $\operatorname{Im} A$ et donc, comme on l'a prouvé plus haut, que $x = x_0$.

❧ Ainsi, l'équation $A^\top.Ax = A^\top y_0$ admet le vecteur x_0 pour unique solution.

2. d. Comme $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors $A^\top \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, donc

$$A^\top.A \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$$

est une matrice carrée.

❧ Si $A^\top.Ax = 0$, alors

$$\|Ax\|^2 = (Ax)^\top.(Ax) = (x^\top.A^\top)Ax = x^\top.(A^\top.Ax) = 0.$$

Par conséquent, $Ax = 0$ et comme A est injective, on en déduit que $x = 0$.
Ainsi, la matrice carrée $A^\top.A$ est injective et donc (Théorème du rang) inversible.

❧ Dans ces conditions,

$$A^\top.Ax = A^\top.y_0 \iff x = (A^\top.A)^{-1}A^\top.y_0.$$

La solution "au sens des moindres carrés" de l'équation $Ax = y_0$ peut donc être calculée directement par la résolution d'un système de Cramer.

Solution 7 05-07

1. L'application $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bien définie (nombre fini de termes dans la somme), à valeurs réelles. Il est clair qu'il s'agit d'une forme bilinéaire et symétrique sur E.

Quel que soit $P \in E$,

$$\langle P \,|\, P \rangle = \sum_{k=0}^{n} [P(a_k)]^2 \geqslant 0$$

puisque les scalaires $P(a_k)$ sont réels. De plus, si $\langle P \,|\, P \rangle = 0$, alors chaque terme est nul.

✍ *Une somme de réels positifs est nulle si, et seulement si, chaque terme est nul.*

❧ Supposons que les scalaires a_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, soient deux à deux distincts. Un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ qui admet $(n+1)$ racines distinctes est nécessairement le polynôme nul. Dans ce cas, l'application $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bien une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire un produit scalaire.

❧ Si les scalaires a_k ne sont pas deux à deux distincts, alors on peut supposer par exemple que $a_n = a_0$. Dans ce cas, le polynôme

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} (X - a_k) \in \mathbb{R}_n[X] = E$$

et $\langle P_n \,|\, P_n \rangle = 0$ alors que $P_n \neq 0$. L'application $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est alors une forme bilinéaire symétrique positive, mais ce n'est pas un produit scalaire.

2. Par définition, le polynôme $P \in E$ appartient à F si, et seulement si,

$$\langle P \,|\, 1 \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0.$$

Par conséquent, $F = 1^{\perp} = (\mathbb{R} \cdot 1)^{\perp}$.

✍ *On sait que, pour toute partie $A \in E$, l'orthogonal de A est aussi l'orthogonal du sous-espace $\mathrm{Vect}(A)$.*
On sait que l'orthogonal de toute partie A est un sous-espace vectoriel de E, donc il n'est pas nécessaire de prouver au préalable que F est bien un sous-espace vectoriel de E.

Comme E est un espace euclidien (= dimension finie), on sait que

$$F^{\perp} = \left[(\mathbb{R} \cdot 1)^{\perp}\right]^{\perp} = \mathbb{R} \cdot 1.$$

3. Comme F est un sous-espace de dimension finie, la projection orthogonale p_F sur F est bien définie. Sachant que le vecteur 1 est orthogonal à F, on en déduit que

$$\forall\, x \in E, \quad p_F(x) = x - \frac{\langle x \,|\, 1 \rangle}{\|1\|^2} \cdot 1$$

et par conséquent,

$$d(X^n, F) = \|X^n - p_F(X^n)\| = \frac{\left|\langle X^n \,|\, 1 \rangle\right|}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left| \sum_{k=0}^{n} a_k^n \right|.$$

Solution 8 05-08

Tout d'abord, φ est bien une application de

$$\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

dans $\mathbb{R}$:

— Quelles que soient les matrices colonnes X et Y, le produit de la ligne $X^{\top}$, de la matrice carrée D et de la colonne Y est une matrice de $\mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$.

— La règle du produit matriciel assure que l'unique coefficient de cette matrice est bien égal à

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i y_i.$$

— Comme d'habitude, on identifie une matrice de $\mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$ à son unique coefficient.

❧ La transposition est une application linéaire de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathfrak{M}_{1,n}(\mathbb{R})$; la multiplication des matrices est une application bilinéaire de

$$\mathfrak{M}_{\ell,p}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_{\ell,q}(\mathbb{R}),$$

quels que soient les entiers ℓ, p et q. Par conséquent, φ est bilinéaire de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

❧ La symétrie de φ est évidente sur la formule

$$\varphi(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i y_i.$$

Sur l'expression matricielle de φ, la symétrie est moins évidente : il faut en effet remarquer que *toute* matrice de $\mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$ est *symétrique* pour en déduire que

$$\varphi(X,Y) = X^\top.D.Y = (X^\top.D.Y)^\top = Y^\top.D^\top.(X^\top)^\top = Y^\top.D.X = \varphi(Y,X)$$

(puisque la matrice D est symétrique).

❧ Comme les λ_i sont tous positifs, le réel

$$\varphi(X,X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

est positif en tant que somme de réels positifs (quelle que soit la matrice colonne X).

Enfin, si $\varphi(X,X) = 0$, alors $\lambda_i x_i^2 = 0$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ (une somme de réels positifs est nulle si, et seulement si, tous les termes sont nuls) et comme les λ_i sont tous *strictement* positifs, on en déduit que tous les x_i sont nuls et donc que $X = 0$.

❧ On a démontré que φ était une forme bilinéaire symétrique et définie positive de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, c'est donc un produit scalaire sur E.

✍ *On peut faire bien en faisant beaucoup plus court : il n'est pas nécessaire de donner autant de détails (mais il faut pouvoir le faire).*

Solution 9 — 05-09

1. D'après $(\star)$, si $x \in E$ est orthogonal à F, alors

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\langle e_i \,|\, x \rangle^2}_{=0} = 0$$

donc $x = 0_E$.

❧ Comme E est un espace euclidien (dimension finie !), pour toute partie $F \subset E$, on sait que

$$\mathrm{Vect}(F) = \left(F^\perp\right)^\perp = \{0_E\}^\perp = E.$$

Donc la famille F est une famille génératrice de E.

2. Soit $v \in L(E)$.

❧ Si $v^* = -v$, alors

$$\begin{aligned} \forall\, x \in E, \quad \langle v(x) \,|\, x \rangle &= \langle x \,|\, v^*(x) \rangle && \text{(définition de l'adjoint)} \\ &= \langle x \,|\, -v(x) \rangle \\ &= -\langle x \,|\, v(x) \rangle && \text{(linéarité à droite)} \\ &= -\langle v(x) \,|\, x \rangle && \text{(symétrie)} \end{aligned}$$

et par conséquent $\langle v(x) \,|\, x \rangle = 0$.

❧ Réciproquement, si

$$\forall\, x \in E, \qquad \langle v(x) \,|\, x \rangle = 0,$$

alors

$$\forall\, x, y \in E, \qquad \langle v(x+y) \,|\, x+y \rangle = 0.$$

En développant, on en déduit que

$$0 = \underbrace{\langle v(x) \,|\, x \rangle}_{=0} + \langle v(x) \,|\, y \rangle + \langle v(y) \,|\, x \rangle + \underbrace{\langle v(y) \,|\, y \rangle}_{=0}$$

et donc que

$$\forall\, x, y \in E, \qquad \big\langle\, v(x) \,\big|\, y \,\big\rangle = \big\langle\, x \,\big|\, -v(y) \,\big\rangle$$

par symétrie et bilinéarité du produit scalaire. Par définition de l'adjoint, cela signifie bien que $v^* = -v$.

3. Soient x et y dans E. Par construction de u d'une part, par symétrie et bilinéarité du produit scalaire d'autre part,

$$\begin{aligned}\big\langle\, u(x) \,\big|\, y \,\big\rangle &= \langle\, x \,|\, y \,\rangle - \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle\, x \,|\, e_i \,\rangle\, e_i \,\middle|\, e_i \right\rangle \\ &= \langle\, x \,|\, y \,\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle\, x \,|\, e_i \,\rangle \,\langle\, e_i \,|\, y \,\rangle = \langle\, x \,|\, y \,\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle\, x \,|\, e_i \,\rangle \,\langle\, y \,|\, e_i \,\rangle .\end{aligned}$$

La dernière expression est symétrique en x et y, cela suffit pour prouver que l'endomorphisme u est auto-adjoint.

❧ En prenant $y = x$, on obtient

$$\big\langle\, u(x) \,\big|\, x \,\big\rangle = \langle\, x \,|\, x \,\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle\, x \,|\, e_i \,\rangle^{\,2} = 0$$

par hypothèse.

❧ D'après la question précédente, on a donc $u^* = -u$ alors qu'on vient de prouver que $u^* = u$. Par conséquent, u est l'endomorphisme nul et

$$\forall\, x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^{n} \langle\, x \,|\, e_i \,\rangle\, e_i \in \mathrm{Vect}(F).$$

❧ On savait déjà que F était une famille génératrice, c'est confirmé et on connaît en outre une décomposition de chaque vecteur $x \in E$ comme combinaison linéaire de vecteurs de F.

4. a. Lorsque les vecteurs de $\mathscr{F}$ sont unitaires, les relations

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \|e_k\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle\, e_i \,|\, e_k \,\rangle^{\,2} = \|e_k\|^4 + \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq n}} \langle\, e_i \,|\, e_k \,\rangle^{\,2}$$

montrent que les vecteurs de $\mathscr{F}$ sont deux à deux orthogonaux et donc que $\mathscr{F}$ est une famille orthonormée.

❧ On sait depuis le début que $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E, c'est donc une base orthonormée de E.

4. b. Lorsque $\mathscr{F}$ est une famille libre,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad e_k = \sum_{i=1}^{n} \delta_{k,i} e_i = \sum_{i=1}^{n} \langle\, e_k \,|\, e_i \,\rangle\, e_i$$

et l'unicité de la décomposition permet d'identifier terme à terme les scalaires. Cela montre que la famille $\mathscr{F}$ est orthonormée et on conclut comme précédemment.

5. La famille $\mathscr{F}$ vérifie

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^2, \quad \langle\, x \,|\, x \,\rangle = \sum_{i=1}^{3} \langle\, e_i \,|\, x \,\rangle^{\,2}$$

pour $r = \sqrt{2/3}$.

Solution 10 — 05-10

1. a. L'espace $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace de dimension finie. Le théorème de Riesz donne une représentation de la forme linéaire φ restreinte à $\mathbb{R}_n[X]$: il existe un, et un seul, $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi(P) = \langle\, Q_n \,|\, P \,\rangle .$$

1. b. Soit $P \in E$: il existe un entier $n_0 \geqslant \deg P$ et $P \in \mathbb{R}_{n_0}[X]$. D'après la question précédente,

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad \varphi(P) = \langle\, Q_n \,|\, P \,\rangle .$$

Or, d'après l'inégalité de Schwarz,

$$\big|\, \langle\, Q_n \,|\, P \,\rangle - \langle\, Q_\omega \,|\, P \,\rangle \,\big| = \big|\, \langle\, Q_n - Q_\omega \,|\, P \,\rangle \,\big| \leqslant \|Q_n - Q_\omega\|\, \|P\|$$

et comme $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers Q_ω (par hypothèse), on en déduit que

$$\langle\, Q_n \,|\, P \,\rangle \xrightarrow[n \to +\infty]{} \langle\, Q_\omega \,|\, P \,\rangle .$$

Or, par définition des Q_n,
$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad \langle\, Q_n \,|\, P \,\rangle = \varphi(P).$$
Donc
$$\langle\, Q_\omega \,|\, P \,\rangle = \lim_{n\to+\infty} \varphi(P) = \varphi(P).$$

2. Encore l'inégalité de Schwarz !
$$\forall\, P \in E, \quad \big|P(0)\big| = \big|\, \langle\, Q_\omega \,|\, P \,\rangle \,\big| \leqslant \|Q_\omega\|\, \|P\|$$
et $K = \|Q_\omega\|$ convient.

3. a. Posons $P_n = (1-X)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a bien
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad P_n(0) = 1$$
et
$$\|P_n\|^2 = \int_0^1 (1-t)^{2n}\, dt = \int_0^1 u^{2n}\, du = \frac{1}{2n+1}$$
donc $\|P_n\|$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

3. b. Si la suite $(\deg P_n)$ était bornée, alors il existerait un entier d tel que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad P_n \in \mathbb{R}_d[X].$$
Dans ce cas, on étudie en fait la restriction de la forme linéaire $[P \mapsto P(0)]$ au sous-espace $\mathbb{R}_d[X]$. Comme ce sous-espace est un espace de dimension finie, la restriction de cette forme linéaire est continue et comme la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 (pour la norme associée au produit scalaire), alors $\varphi(P_n) = P_n(0)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui contredit le résultat de la question précédente.

4. Si la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait dans E (pour la norme associée au produit scalaire), alors il existerait une constante $K \in \mathbb{R}_+$ telle que
$$\forall\, P \in E, \quad \big|P(0)\big| \leqslant K\|P\|.$$
Mais on a démontré précédemment qu'il existait une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes tels que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad P_n(0) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \|P_n\| = 0.$$
On aurait donc
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant K\|P_n\|$$
ce qui est absurde puisque le majorant tend vers 0.

La suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge donc pas dans E pour la norme associée au produit scalaire.

❧ Si la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait vers Q_ω pour la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$, alors
$$0 \leqslant \|Q_n - Q_\omega\|^2 = \int_0^1 \big[Q_\omega(t) - Q_n(t)\big]^2\, dt \leqslant (1-0)\cdot \|Q_\omega - Q_n\|_\infty^2$$
et par conséquent, la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergerait aussi vers Q_ω pour la norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire. On vient de voir que cela n'est pas possible.

La suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge donc pas non plus pour la norme uniforme.

✍ *Il est temps de jeter un regard théorique sur les calculs qui précèdent.*

❧ *D'après l'inégalité de Schwarz, seules les formes linéaires continues peuvent être représentées à l'aide du produit scalaire.*

❧ *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la restriction φ_n de φ au sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ est continue :*
$$\exists\, Q_n \in \mathbb{R}_n[X], \quad \forall\, P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi_n(P) = \varphi(P) = \langle\, Q_n \,|\, P \,\rangle.$$

❧ *L'hypothèse de convergence de la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se traduit par le fait que les restrictions φ_n sont uniformément lipschitziennes :*
$$\exists\, K > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \big|\varphi_n(P)\big| = \big|\, \langle\, Q_n \,|\, P \,\rangle \,\big| \leqslant K\|P\|.$$

❧ *On peut alors définir des prolongements naturels de ces formes linéaires en posant*
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \varphi_n(P) = \langle\, Q_n \,|\, P \,\rangle.$$

Ces formes linéaires sont continues sur $\mathbb{R}[X]$ et φ_n coïncide avec φ sur le sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ (au moins).

❧ *La suite des prolongements $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur la sphère unité de $\mathbb{R}[X]$ vers la forme linéaire φ elle-même :*

$$\forall\, P\in\mathbb{R}[X],\quad \|P\|\leqslant 1 \implies \big|\varphi_n(P)-\varphi(P)\big| = \big|\langle\, Q_n\,|\,P\,\rangle - \varphi(P)\big| \leqslant \|Q_n - Q_\omega\|$$

(le majorant est indépendant de P et tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$).

❧ *La forme linéaire φ serait alors représentable à l'aide du produit scalaire*

$$\forall\, P\in\mathbb{R}[X],\quad \varphi(P) = \langle\, Q_\omega\,|\,P\,\rangle$$

et donc continue.

❧ *Un contre-exemple bien choisi montre qu'en fait φ n'est pas continue sur $\mathbb{R}[X]$ pour la norme euclidienne et ne peut donc être représentée à l'aide du produit scalaire.*

❧ *Le changement de norme ne change rien à l'affaire, car la norme euclidienne est ici dominée par la norme uniforme : si φ était continue pour la norme uniforme, elle serait aussi continue pour la norme euclidienne.*

Solution 11 — 05-11

✍ *Exercice classique, qui suit le même modèle que ses voisins :*
- *on définit un espace vectoriel de dimension finie (généralement 3 ou 4) ;*
- *on munit cet espace vectoriel d'un produit scalaire inspiré par l'énoncé ;*
- *on interprète la question posée comme la recherche du minimum de*

$$\|f_0 - g\|^2$$

lorsque g parcourt un sous-espace G de E ;
- *grâce à la structure euclidienne de E, il suffit d'identifier le projeté orthogonal $\pi(f_0)$ de f_0 sur le sous-espace G pour conclure :*

$$\min_{g\in G}\|f_0-g\|^2 = \big[\,d(f_0,G)\big]^2 = \langle\, f_0\,|\,f_0-\pi(f_0)\,\rangle\,.$$

En général, il faut s'abstenir de chercher une base orthonormée du sev G (même quand $\dim G = 2$!). Il est préférable de déterminer $\pi(f_0)$ en utilisant la caractérisation usuelle du projeté orthogonal :

$$\pi(f_0)\in G,\qquad f_0-\pi(f_0)\in G^\perp$$

en explicitant une matrice de Gram.

❧ On considère le sous-espace vectoriel E de $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ engendré par les trois fonctions

$$f_0 = \left[t\mapsto\sqrt{t}\right],\quad g_0=[t\mapsto 1]\quad\text{et}\quad g_1=[t\mapsto t]\,.$$

Quelles que soient les fonctions u et v dans E, on pose

$$\langle\, u\,|\,v\,\rangle = \int_0^1 u(t)v(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t}}.$$

L'application $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ est bien un produit scalaire.

► Si h est continue sur le segment $[0,1]$, alors la fonction

$$\Phi_h = \left[t\mapsto\frac{h(t)}{\sqrt{1-t}}\right]$$

est continue sur l'intervalle semi-ouvert $[0,1[$ et comme h est bornée (en tant que fonction continue sur un segment),

$$\frac{h(t)}{\sqrt{1-t}} \underset{t\to 1}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\Big).$$

La fonction de référence est intégrable au voisinage de 1, cela prouve que Φ_h est intégrable sur $[0,1[$ et donc que l'intégrale généralisée

$$\int_0^1 h(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t}}$$

est convergente.

Ainsi, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bien une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

► Toutes les intégrales considérées étant convergentes, il est clair que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire, symétrique et positive.

► On considère maintenant une fonction $h \in E$ telle que $\langle h | h \rangle = 0$, c'est-à-dire

$$\int_0^1 h^2(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = 0.$$

On intègre ici une fonction continue et positive

$$\left[t \mapsto \frac{h^2(t)}{\sqrt{1-t}} \right]$$

sur un intervalle de longueur strictement positive ($0 < 1$) et l'intégrale est, par hypothèse, nulle. D'après le Théorème de nullité de l'intégrale,

$$\forall\, t \in [0,1[, \qquad \frac{h^2(t)}{\sqrt{1-t}} = 0.$$

On en déduit que

$$\forall\, t \in [0,1[, \qquad h(t) = 0.$$

Mais comme h est continue en $t = 1$, on en déduit aussi que

$$h(1) = \lim_{\substack{t \to 1 \\ <}} h(t) = 0$$

et donc que

$$\forall\, t \in [0,1], \qquad h(t) = 0.$$

On a ainsi démontré que $h = 0_E$ et donc que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur E.

❧ Lorsque les paramètres a et b parcourent $\mathbb{R}^2$, la fonction

$$[t \mapsto a + bt]$$

parcourt l'hyperplan $G = \mathrm{Vect}(g_0, g_1)$ de E. Il s'agit donc ici de calculer

$$\min_{g \in G} \|f_0 - g\|^2$$

et pour cela, nous allons calculer le projeté orthogonal $\pi(f_0)$ de f_0 sur G.

► Le vecteur $\pi(f_0)$ appartient à G si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que

$$\pi(f_0) = a g_0 + b g_1. \tag{1}$$

Le vecteur $f_0 - \pi(f_0)$ est orthogonal à $G = \mathrm{Vect}(g_0, g_1)$ si, et seulement si,

$$\langle f_0 - \pi(f_0) \,|\, g_0 \rangle = \langle f_0 - \pi(f_0) \,|\, g_1 \rangle = 0,$$

c'est-à-dire [en tenant compte de (1) et en développant les produits scalaires]

$$\begin{cases} a \langle g_0 | g_0 \rangle + b \langle g_1 | g_0 \rangle = \langle f_0 | g_0 \rangle \\ a \langle g_0 | g_1 \rangle + b \langle g_1 | g_1 \rangle = \langle f_0 | g_1 \rangle. \end{cases} \tag{2}$$

✍ *Il s'agit donc de résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues (a et b), mais il faut auparavant calculer quelques produits scalaires :*

$$\langle g_0 | g_0 \rangle, \quad \langle g_0 | g_1 \rangle = \langle g_1 | g_0 \rangle, \quad \langle f_0 | g_0 \rangle, \quad \langle f_0 | g_1 \rangle.$$

C'est la partie fastidieuse de l'exercice !

► Tout d'abord,

$$\langle g_0 | g_0 \rangle = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = 2\left[-\sqrt{1-t}\right]_0^1 = 2.$$

► En posant $u = \sqrt{1-t}$,

$$\langle g_0 \,|\, g_1 \rangle = \int_0^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t}} = 2\int_0^1 (1-u^2)\,du = \frac{4}{3}$$

et

$$\langle g_1 \,|\, g_1 \rangle = \int_0^1 \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1-t}} = 2\int_0^1 (1-u^2)^2\,du = \frac{16}{15}.$$

Il est intéressant de remarquer (pour la fin de l'exercice) que

$$\langle f_0 \,|\, f_0 \rangle = \int_0^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t}} = \langle g_0 \,|\, g_1 \rangle = \frac{4}{3}.$$

► En posant $v = \sqrt{t/(1-t)}$,

$$\begin{aligned}\langle f_0 \,|\, g_0 \rangle &= \int_0^1 \sqrt{\frac{t}{1-t}}\,dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{v^2\,dv}{(1+v^2)^2} \\ &= 2\int_0^{+\infty} \frac{dv}{1+v^2} - 2\int_0^{+\infty} \frac{dv}{(1+v^2)^2}.\end{aligned}$$

En intégrant par parties,

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} 1 \cdot \frac{dv}{1+v^2} = \int_0^{+\infty} v \cdot \frac{2v\,dv}{(1+v^2)^2}$$

et il reste alors

$$\langle f_0 \,|\, g_0 \rangle = \int_0^{+\infty} \frac{dv}{1+v^2} = \frac{\pi}{2}.$$

✍ *Il faut retenir cette méthode : pour calculer une telle intégrale, il faut intégrer par parties une intégrale dont on connaît la valeur — c'est contre-intuitif !*

► Avec le même changement de variable,

$$\langle f_0 \,|\, g_1 \rangle = \int_0^1 t\sqrt{\frac{t}{1-t}}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{2v^2\,dv}{(1+v^2)^2} - \int_0^{+\infty} \frac{2v^2\,dv}{(1+v^2)^3}.$$

L'avant-dernière intégrale a déjà été calculée et la dernière intégrale s'obtient elle aussi en intégrant par parties :

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^{+\infty} 1 \cdot \frac{dv}{(1+v^2)^2} = \int_0^{+\infty} v \cdot \frac{2 \cdot 2v\,dv}{(1+v^2)^3}.$$

On en déduit que

$$\langle f_0 \,|\, g_1 \rangle = \frac{3\pi}{8}.$$

► Il s'agit donc de résoudre le système suivant.

$$\begin{cases} 2a + \frac{4}{3}b = \frac{\pi}{2} \\ \frac{4}{3}a + \frac{16}{15}b = \frac{3\pi}{8} \end{cases}$$

L'unique solution de ce système est

$$(a, b) = \Big(\frac{3\pi}{32}, \frac{15\pi}{64}\Big).$$

❧ Le minimum cherché est, d'après le cours,

$$\begin{aligned}\langle f_0 \,|\, f_0 - \pi(f_0) \rangle &= \langle f_0 \,|\, f_0 - a g_0 - b g_1 \rangle \\ &= \langle f_0 \,|\, f_0 \rangle - a \langle f_0 \,|\, g_0 \rangle - b \langle f_0 \,|\, g_1 \rangle\end{aligned}$$

et on trouve, d'après ce qui précède :

$$\big[\,d(f_0, G)\big]^2 = \langle f_0 \,|\, f_0 - \pi(f_0) \rangle = \frac{4}{3} - \frac{69\pi^2}{512}.$$

✍ *Bonne nouvelle ! Il n'y a pas d'autre intégrale à calculer !*
Comparer aussi avec la formule naïve :

$$\begin{aligned}\big[\,d(f_0,G)\big]^2 &= \big\|f_0-\pi(f_0)\big\|^2\\ &= \langle\, f_0\,|\,f_0\,\rangle + a^2\langle\, g_0\,|\,g_0\,\rangle + b^2\langle\, g_1\,|\,g_1\,\rangle\\ &\quad - 2a\langle\, f_0\,|\,g_0\,\rangle - 2b\langle\, f_0\,|\,g_1\,\rangle + 2ab\langle\, g_0\,|\,g_1\,\rangle\end{aligned}$$

qui est bien plus pénible à traiter.

Solution 12 **05-12**

1. Par linéarité à droite du produit scalaire, il est clair que f_k est un endomorphisme de E.
Quels que soient les vecteurs x et y,

$$\begin{aligned}\big\langle\, f_k(x)\,\big|\,y\,\big\rangle &= \langle\, x\,|\,y\,\rangle + k\langle\, a\,|\,x\,\rangle\ \langle\, a\,|\,y\,\rangle\\ &= \langle\, x\,|\,y\,\rangle + k\langle\, a\,|\,y\,\rangle\ \langle\, x\,|\,a\,\rangle = \big\langle\, x\,\big|\,f_k(y)\,\big\rangle\end{aligned}$$

donc l'endomorphisme f_k est auto-adjoint.

❧ Comme le vecteur a n'est pas nul, la projection orthogonale sur la droite $\mathbb{R}\cdot a$ s'exprime par

$$\forall\, x\in E,\qquad \pi(x)=\frac{\langle\, a\,|\,x\,\rangle}{\langle\, a\,|\,a\,\rangle}\,a$$

donc

$$f_k = I_E + k\|a\|^2\cdot\pi.$$

✍ *D'après le cours, toute projection orthogonale est un endomorphisme auto-adjoint (en particulier l'identité !) et l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints est un sous-espace de $L(E)$. La décomposition de f_k prouve donc à nouveau que f_k est auto-adjoint.*

2. L'endomorphisme f_k est une isométrie si, et seulement si,

$$\forall\, x\in E,\quad \big\|f_k(x)\big\|^2=\|x\|^2.$$

Or, pour tout $x\in E$,

$$\big\|x+k\langle\, a\,|\,x\,\rangle\ a\big\|^2 = \|x\|^2 + 2k\langle\, a\,|\,x\,\rangle\cdot\langle\, a\,|\,x\,\rangle + k^2\langle\, a\,|\,x\,\rangle^2\cdot\|a\|^2.$$

Comme $k\neq 0$, on en déduit que f_k est une isométrie si, et seulement si,

$$\forall\, x\in E,\quad \langle\, a\,|\,x\,\rangle^2\big[2+k\|a\|^2\big]=0.$$

Comme $a\neq 0_E$, cela équivaut à

$$2+k\|a\|^2=0.$$

L'endomorphisme f_k est donc une isométrie si, et seulement si,

$$k=\frac{-2}{\|a\|^2}.$$

✍ *Dans ce cas, pour tout $x\in\mathbb{R}$,*

$$f_k(x)=x-2\frac{\langle\, a\,|\,x\,\rangle}{\|a\|^2}\cdot a = x-2\pi(x).$$

On reconnaît ici la réflexion d'hyperplan $H=(\mathbb{R}\cdot a)^\perp$, qui est effectivement une isométrie comme chacun sait.

✍ *L'énoncé exclut a priori le cas $k=0$, pour lequel $f_k=I_E$ serait aussi une isométrie.*

Solution 13 05-13

Il s'agit bien sûr d'une n-ième variante de l'inégalité de Schwarz! On développe $\|x\|^2$ avec la formule habituelle et on majore avec l'inégalité de Schwarz :

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \langle u_i \,|\, u_j \rangle \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |x_i|\,|x_j|\,\big|\langle u_i \,|\, u_j \rangle\big|$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |x_i|\,|x_j|\,\|u_i\|\,\|u_j\|. \qquad \text{(Schwarz dans } E\text{)}$$

On reconnaît alors

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |x_i|\,|x_j|\,\|u_i\|\,\|u_j\| = \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_i|\,\|u_i\|\Big)^2$$

et on applique à nouveau l'inégalité de Schwarz, mais cette fois dans $\mathbb{R}^n$:

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} |x_i|\,\|u_i\|\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_i|^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} \|u_k\|^2\Big),$$

ce qui nous donne le résultat voulu.

Solution 14 05-14

1. Il est bien clair que f est un endomorphisme de E.

► Quels que soient x et y dans E,

$$\big\langle f(x) \,\big|\, y \big\rangle = \langle x \,|\, y \rangle - \langle a \,|\, x \rangle \langle b \,|\, y \rangle$$
$$\big\langle x \,\big|\, f(y) \big\rangle = \langle x \,|\, y \rangle - \langle a \,|\, y \rangle \langle b \,|\, x \rangle$$

donc l'endomorphisme f est symétrique si, et seulement si, quels que soient x et y dans E,

$$\big\langle \langle b \,|\, y \rangle \cdot a - \langle a \,|\, y \rangle \cdot b \,\big|\, y \big\rangle = 0.$$

Comme le seul vecteur orthogonal à tous les vecteurs de E est le vecteur nul, on en déduit que f est symétrique si, et seulement si,

$$\forall\, y \in E, \quad \langle b \,|\, y \rangle \cdot a = \langle a \,|\, y \rangle \cdot b.$$

[$\Rightarrow$] Si f est symétrique, alors on déduit de la relation précédente que b est proportionnel à a puisque (avec $y = a$)

$$b = \langle a \,|\, b \rangle \cdot a.$$

(Rappel : $\|a\| = 1$ par hypothèse.)
[$\Leftarrow$] Si b est proportionnel à a, alors il existe un scalaire $t \in \mathbb{R}$ tel que $b = t \cdot a$ et

$$\forall\, y \in E, \quad \langle b \,|\, y \rangle \cdot a = t \cdot \langle a \,|\, y \rangle \cdot a = \langle a \,|\, y \rangle \cdot (t \cdot a) = \langle a \,|\, y \rangle \cdot b$$

donc l'endomorphisme f est bien symétrique.

❧ On a donc prouvé que : l'endomorphisme f est symétrique si, et seulement si, le vecteur b est proportionnel au vecteur a.

Comme a et b sont unitaires, on a en fait prouvé que : l'endomorphisme f est symétrique si, et seulement si, $a = \pm b$.

2. Nous allons d'abord étudier la surjectivité de f.

❧ Fixons $y \in E$ et cherchons à résoudre l'équation

$$y = f(x) = x - \langle a \,|\, x \rangle \cdot b$$

d'inconnue $x \in E$.

Il faut nécessairement que

$$\big\langle y \,\big|\, a \big\rangle = \langle x \,|\, a \rangle - \langle x \,|\, a \rangle \cdot \langle a \,|\, b \rangle = \langle x \,|\, a \rangle \cdot \big(1 - \langle a \,|\, b \rangle\big)$$

(on a utilisé la symétrie et la bilinéarité du produit scalaire).

❧ Premier cas : si $\langle a \,|\, b \rangle = 1$, alors il faut que $\langle y \,|\, a \rangle = 0$.

En d'autres termes : si l'équation a au moins une solution x (c'est-à-dire si y a été choisi dans l'image de f), alors il faut que le vecteur y soit orthogonal à a.

Dans ce cas, $\operatorname{Im} f \subset (\mathbb{R}\cdot a)^\perp$, ce qui prouve que f n'est pas surjective et a fortiori pas bijective.

❧ Deuxième cas : si $\langle a \,|\, b\rangle \neq 1$, alors on peut diviser ! et on arrive à

$$x = y + \frac{\langle a \,|\, y\rangle}{1-\langle a \,|\, b\rangle}\cdot b.$$

✍ *Attention ! on a raisonné par condition nécessaire, donc réciproque obligatoire !*

On vérifie sans difficulté que

$$\forall\, y \in E,\quad f\Big(y + \frac{\langle a \,|\, y\rangle}{1-\langle a \,|\, b\rangle}\cdot b\Big) = y.$$

❧ Bref : l'endomorphisme f est surjectif si, et seulement si, $\langle a \,|\, b\rangle \neq 1$ et comme E est un espace de dimension finie, on en déduit que f est inversible si, et seulement si, $\langle a \,|\, b\rangle \neq 1$ et, dans ce cas, la relation précédente nous donne l'expression de la bijection réciproque.

❧ Comme les vecteurs a et b sont unitaires, la condition $\langle a \,|\, b\rangle = 1$ équivaut à $\langle a \,|\, b\rangle = \|a\|\,\|b\|$ et d'après le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, cela équivaut au fait que a et b soient proportionnels et de même sens, c'est-à-dire $a = b$ (ils sont unitaires, rappelons-le).

3. Le réel λ est une valeur propre de f si, et seulement si, il existe un vecteur **non nul** $x \in E$ tel que $f(x) = \lambda\cdot x$ c'est-à-dire

$$(1-\lambda)\cdot x = \langle a \,|\, x\rangle \cdot b.$$

❧ Premier cas : $\lambda = 1$.
Dans ce cas, $\langle a \,|\, x\rangle = 0$ (puisque $b \neq 0_E$) et donc $x \in (\mathbb{R}\cdot a)^\perp$.
Réciproquement, si $x \in (\mathbb{R}\cdot a)^\perp$, alors $f(x) = x = 1\cdot x$.
Donc $1 \in \operatorname{Sp}(f)$ et $\operatorname{Ker}(f - I_E) = (\mathbb{R}\cdot a)^\perp$.

❧ Deuxième cas : $\lambda \neq 1$.
Dans ce cas, on peut diviser !

$$x = \underbrace{\frac{\langle a \,|\, x\rangle}{1-\lambda}}_{t}\cdot b \in \mathbb{R}\cdot b$$

et comme $x \neq 0_E$, alors il faut que $t \neq 0$, donc $\langle a \,|\, x\rangle \neq 0$. Et comme $b = (1/t)\cdot x$, il faut donc que $\langle a \,|\, b\rangle \neq 0$.

Réciproquement, si $\langle a \,|\, b\rangle \neq 0$, alors

$$f(b) = \underbrace{(1-\langle a \,|\, b\rangle)}_{=\lambda}\cdot b$$

et le réel λ est une valeur propre de f, la droite $\mathbb{R}\cdot b$ est contenue dans le sous-espace propre $\operatorname{Ker}(f-\lambda I_E)$.

❧ Maintenant qu'on y voit plus clair, on peut finir !

Si $\langle a \,|\, b\rangle \neq 0$, alors on a trouvé deux valeurs propres distinctes : 1 et $\lambda = 1 - \langle a \,|\, b\rangle$. Le sous-espace propre associé à 1 est un hyperplan et la dimension de l'autre sous-espace propre est au moins égale à 1, donc

$$\dim\operatorname{Ker}(f-I_E) + \dim\operatorname{Ker}(f-\lambda I_E) \geqslant \dim E$$

ce qui prouve que f est diagonalisable et donc que

$$E = (\mathbb{R}\cdot a)^\perp \oplus (\mathbb{R}\cdot b)$$

puisque $\operatorname{Ker}(f-\lambda I_E) = \mathbb{R}\cdot b$ (inclusion et égalité des dimensions).

Réciproquement, si $\langle a \,|\, b\rangle = 0$, alors la seule valeur propre trouvée est 1 et le sous-espace propre est un hyperplan, donc f n'est pas diagonalisable.

Conclusion : f est diagonalisable si, et seulement si, $\langle a \,|\, b\rangle \neq 0$.

✍ *En particulier, si f est symétrique, alors $\langle a \,|\, b\rangle = \pm 1$ et f est diagonalisable, tout est en ordre !*

Solution 15 05-15

D'après l'algorithme de Gram-Schmidt, on a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \mathrm{Vect}(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n) = \mathrm{Vect}(u_0, \dots, u_n).$$

Nous allons procéder par récurrence.

❧ En particulier, pour $n = 0$, les droites $\mathbb{R} \cdot \varepsilon_0$ et $\mathbb{R} \cdot u_0$ sont égales. Les vecteurs directeurs ε_0 et u_0 sont donc proportionnels. Comme ils sont tous les deux supposés *unitaires*, on a donc

$$u_0 = \pm\varepsilon_0.$$

❧ On suppose qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad u_k = \pm\varepsilon_k.$$

Comme $u_{n+1} \in \mathrm{Vect}(u_0, \dots, u_n, u_{n+1}) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1})$ et que la famille $(\varepsilon_k)_{0\leqslant k\leqslant n+1}$ est *orthonormée*, on a

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \langle\, \varepsilon_k \,|\, u_{n+1} \,\rangle \cdot \varepsilon_k = \sum_{k=0}^{n} \langle\, \varepsilon_k \,|\, u_{n+1} \,\rangle \cdot \varepsilon_k + \langle\, \varepsilon_{n+1} \,|\, u_{n+1} \,\rangle \cdot \varepsilon_{n+1}$$

(décomposition d'un vecteur dans une base orthonormée).

Or, pour tout indice $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$\varepsilon_k \in \mathrm{Vect}(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n) = \mathrm{Vect}(u_0, \dots, u_n)$$

et comme la famille $(u_k)_{0\leqslant k\leqslant n+1}$ est une famille orthogonale,

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \qquad \varepsilon_k \perp u_{n+1}.$$

Par conséquent, il reste seulement

$$u_{n+1} = \langle\, \varepsilon_{n+1} \,|\, u_{n+1} \,\rangle \cdot \varepsilon_{n+1}.$$

Comme les deux vecteurs u_{n+1} et ε_{n+1} sont *unitaires*, on en déduit que

$$\big|\, \langle\, \varepsilon_{n+1} \,|\, u_{n+1} \,\rangle \,\big| = 1$$

(absolue homogénéité de la norme), donc $u_{n+1} = \pm\varepsilon_{n+1}$.

Le résultat est ainsi démontré par récurrence.

Solution 16 15-01

Soit X, une colonne telle que $AX = 0$. Alors $A^\top.AX = 0$. Le noyau de A est donc contenu dans le noyau de $A^\top.A$.

Réciproquement, si X est une colonne appartenant au noyau de $A^\top.A$, alors

$$\|A.X\|^2 = X^\top.A^\top.A.X = X^\top.(A^\top.A)X = X^\top.0 = 0,$$

donc $A.X = 0$, c'est-à-dire $X \in \mathrm{Ker}\, A$.

On a démontré par double inclusion que

$$\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, A^\top.A.$$

❧ Soit Y, une colonne appartenant à $\mathrm{Im}\, A^\top.A$: il existe donc une colonne X telle que $Y = A^\top.A.X$ et, pour toute colonne U appartenant à $\mathrm{Ker}\, A$,

$$\langle\, U \,|\, Y \,\rangle = U^\top.A^\top.A.X = (AU)^\top.(AX) = 0^\top.(AX) = 0$$

donc $Y \in (\mathrm{Ker}\, A)^\perp$.

On a déjà démontré que $\mathrm{Im}\, A^\top.A \subset (\mathrm{Ker}\, A)^\perp$. En outre, d'après le Théorème du rang et la question précédente,

$$\dim \mathrm{Im}\, A^\top.A = n - \dim \mathrm{Ker}\, A^\top.A = n - \dim \mathrm{Ker}\, A$$

et d'après le Théorème du supplémentaire orthogonal,

$$\dim(\mathrm{Ker}\, A)^\perp = n - \dim \mathrm{Ker}\, A,$$

donc $\dim \mathrm{Im}\, A^\top.A = \dim(\mathrm{Ker}\, A)^\perp$.

L'inclusion entre sous-espaces et l'égalité des dimensions prouvent l'égalité des sous-espaces :

$$\operatorname{Im} A^\top.A = (\operatorname{Ker} A)^\perp.$$

❧ D'après la première question, en remplaçant A par $A^\top$,

$$\operatorname{Ker} A.A^\top = \operatorname{Ker} A^\top.$$

Si la colonne X appartient à $\operatorname{Ker} A^\top$ et si la colonne Y appartient à $\operatorname{Im} A$, alors il existe une colonne U telle que $Y = AU$ et

$$\langle Y|X\rangle = (AU)^\top.X = U^\top.(A^\top.X) = U^\top.0 = 0,$$

donc $\operatorname{Ker} A^\top \subset (\operatorname{Im} A)^\perp$.

Réciproquement, si la colonne Y est orthogonale à $\operatorname{Im} A$, alors

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{1,1}(\mathbb{R}), \quad 0 = \langle A.X|Y\rangle = (A.X)^\top.Y = X^\top.A^\top.Y = \langle X|A^\top.Y\rangle,$$

ce qui prouve que $A^\top.Y = 0$ (ce vecteur est orthogonal à tous les vecteurs) et donc que $Y \in \operatorname{Ker} A^\top$.

✍ *Variante : si Y est orthogonale à $\operatorname{Im} A$, alors*

$$\|A^\top.Y\|^2 = (A^\top.Y)^\top.A^\top.Y = Y^\top.A.(A^\top.Y) = \langle Y|A(A^\top.Y)\rangle = 0$$

puisque $A(A^\top.Y) \in \operatorname{Im} A$. On en déduit que $A^\top.Y = 0$, c'est-à-dire $Y \in \operatorname{Ker} A^\top$.

On a démontré par double inclusion que

$$\operatorname{Ker} A.A^\top = \operatorname{Ker} A^\top = (\operatorname{Im} A)^\perp.$$

❧ Si la colonne Y appartient à $\operatorname{Im} A.A^\top$, alors il existe une colonne X telle que $Y = (A.A^\top).X = A.(A^\top.X) \in \operatorname{Im} A$. Ainsi,

$$\operatorname{Im} A.A^\top \subset \operatorname{Im} A.$$

D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
\dim \operatorname{Im} A.A^\top &= n - \dim \operatorname{Ker} A.A^\top && \text{(Théorème du rang)}\\
&= n - \left(n - \dim \operatorname{Im} A\right) && \text{(dimension du supplémentaire orthogonal)}\\
&= \dim \operatorname{Im} A
\end{aligned}$$

donc

$$\operatorname{Im} A.A^\top = \operatorname{Im} A$$

(inclusion et égalité des dimensions).

Solution 17 15-02

1. S'il existe une base $\mathscr{B}$ de E constituée de vecteurs propres à la fois pour f et pour g, alors les deux matrices $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$ sont diagonales. Or deux matrices diagonales commutent, donc f et g commutent.

2. Réciproquement, on suppose que f et g commutent. Par conséquent, tout sous-espace propre $E_\lambda^f = \operatorname{Ker}(f - \lambda I_E)$ de f est aussi un sous-espace stable par g. Il existe donc un endomorphisme $g_\lambda \in L(E_\lambda^f)$ induit par restriction au sous-espace propre E_λ^f.

Tout vecteur propre de g_λ appartient par construction au sous-espace propre E_λ^f et, par définition des vecteurs propres, distinct du vecteur nul. Il s'agit donc d'un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

Comme g est auto-adjoint, tous les endomorphismes g_λ sont également auto-adjoints et, d'après le Théorème spectral, chaque sous-espace propre E_λ^f admet une base orthonormée $\mathscr{B}_\lambda$ constituée de vecteurs propres pour g_λ. Les vecteurs de $\mathscr{B}_\lambda$ sont des vecteurs propres de g (puisque g_λ est induit par restriction de g) et aussi de f (comme on vient de le voir).

Comme f est auto-adjoint, les sous-espaces propres de f définissent une décomposition de E en somme directe orthogonale :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)}^{\perp} E_\lambda^f$$

et par conséquent, en concaténant les familles $\mathscr{B}_\lambda$, on obtient une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E.

Comme on l'a vu, les vecteurs de cette base $\mathscr{B}$ sont des vecteurs propres aussi bien pour f que pour g.

Solution 18 15-03

La matrice $B = A^\top.A$ est symétrique :

$$B^\top = (A^\top.A)^\top = A^\top.(A^\top)^\top = A^\top.A = B$$

et pour toute colonne $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$X^\top.B.X = X^\top.A^\top.A.X = (AX)^\top(AX) = \|AX\|^2 \geqslant 0$$

donc $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

❧ On en déduit que

$$\begin{aligned} X^\top.B.X = 0 &\iff \|AX\| = 0 \\ &\iff AX = 0 \\ &\iff X \in \operatorname{Ker} A. \end{aligned}$$

Par conséquent :

— Si la matrice A est inversible, alors $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, donc

$$X^\top.B.X = 0 \implies X = 0$$

et comme $X^\top.B.X \geqslant 0$ pour toute colonne X, alors

$$\forall\, X \neq 0, \quad X^\top.B.X > 0$$

donc $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

— Si la matrice A n'est pas inversible, alors il existe une colonne $X_0 \neq 0$ dans $\operatorname{Ker} A$ et

$$X_0^\top B X_0 = \|AX_0\|^2 = 0$$

donc $B \notin \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Ainsi, la matrice symétrique B est définie positive si, et seulement si, la matrice A est inversible.

❧ De même, $C = AA^\top \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et cette matrice est définie positive si, et seulement si, la matrice $A^\top$ est inversible.

Comme les matrices A et $A^\top$ ont même rang, on en déduit que C est définie positive si, et seulement si, la matrice A est inversible.

Solution 19 15-04

Comme l'endomorphisme u est auto-adjoint, il existe une base orthonormée $\mathscr{B}_0$ de E et une matrice diagonale Δ telles que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(u) = \Delta = \operatorname{Diag}(d_1, \dots, d_n).$$

Comme p est un entier *impair*, les réels $\delta_k = d_k^{1/p}$ sont bien définis et il existe un endomorphisme v_0 de E tel que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(v_0) = \operatorname{Diag}(\delta_1, \dots, \delta_n).$$

Cet endomorphisme v_0 est auto-adjoint (il est représenté par une matrice symétrique [elle est diagonale !] dans une base orthonormée) et

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(v_0^p) = \operatorname{Diag}(\delta_1^p, \dots, \delta_n^p) = \operatorname{Diag}(d_1, \dots, d_n) = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u),$$

donc $v_0^p = u$.

✍ *Bien sûr, il n'existe qu'un seul endomorphisme dont la matrice relative à la base $\mathscr{B}_0$ soit égale à $\operatorname{Diag}(\delta_1, \dots, \delta_n)$. Mais cela ne prouve pas qu'il n'existe qu'une seule solution $v \in \mathcal{S}(E)$ au problème posé : il faudrait être sûr que toutes les solutions possibles à ce problème soient représentées par cette matrice dans cette base.*

C'est l'objet de la réciproque.

❧ Réciproquement, s'il existe un endomorphisme $v \in \mathcal{S}(E)$ tel que $v^p = u$, alors u et v commutent :

$$u \circ v = v^p \circ v = v^{p+1} = v^p \circ v = u \circ v$$

donc chaque sous-espace propre de u est stable par v.

Comme u est auto-adjoint, ses valeurs propres sont réelles et u est diagonalisable (Théorème spectral) :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} \operatorname{Ker}(u - \lambda I).$$

Considérons une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ de u et notons $E_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{I})$, le sous-espace propre associé à λ. Comme E_λ est stable par v, on peut définir l'endomorphisme $v_\lambda \in \mathrm{L}(E_\lambda)$ induit par restriction de v à ce sous-espace propre. Comme v est auto-adjoint, l'endomorphisme induit v_λ est aussi auto-adjoint :

$$v_\lambda \in \mathcal{S}(E_\lambda)$$

et donc diagonalisable (Théorème spectral, bis). En particulier, son polynôme minimal est scindé à racines simples (réelles ! puisqu'on travaille dans un espace euclidien) et, par définition, divise tous les polynômes annulateurs de v_λ. Mais

$$\forall\, x \in E_\lambda, \quad v_\lambda^p(x) = v^p(x) = u(x) = \lambda \cdot x$$

donc $X^p - \lambda$ est un polynôme annulateur de v_λ.

Comme l'exposant p est impair, ce polynôme n'admet qu'une seule racine réelle : $\lambda^{1/p}$ et par conséquent, il n'admet qu'un seul diviseur unitaire, non constant et scindé à racines simples (réelles ! vous dis-je) : le polynôme minimal de v_λ est égal à $X - \lambda^{1/p}$. Autrement dit, v_λ est une homothétie :

$$\forall\, x \in E_\lambda, \quad v(x) = v_\lambda(x) = \lambda^{1/p} \cdot x.$$

D'après le Théorème de caractérisation des applications linéaires (version décomposition en somme directe), il existe donc au plus un endomorphisme $v \in \mathcal{S}(E)$ tel que $v^p = u$.

❧ Il existe donc un, et un seul, endomorphisme $v \in \mathcal{S}(E)$ tel que $v^p = u$.

Solution 20 — 15-05

La matrice $A^\top.A$ est symétrique réelle :

$$(A^\top.A)^\top = A^\top.(A^\top)^\top = A^\top.A$$

donc elle est diagonalisable.

Si les matrices A et $A^\top$ commutent, alors

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad (A^\top.A)^k = (A^\top)^k.A^k$$

et comme A est nilpotente, il existe un entier $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^d = 0_n$. Par conséquent, la matrice $A^\top.A$ est nilpotente :

$$(A^\top.A)^d = (A^\top)^d.A^d = (A^\top)^d.0_n = 0_n$$

et son unique valeur propre est donc 0.

Une matrice diagonalisable dont l'unique valeur propre est nulle est semblable à la matrice nulle et donc égale à la matrice nulle :

$$A^\top.A = 0_n.$$

Par conséquent, pour toute colonne X,

$$\|AX\|^2 = AX^\top.AX = X^\top.A^\top.A.X = 0$$

et donc

$$\forall\, X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \qquad AX = 0,$$

ce qui prouve que la matrice A elle aussi est nulle.

Solution 21 — 15-06

1. Comme u est un endomorphisme symétrique de E, l'espace E est la somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}^{\perp} \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{I}_E)$$

d'après le théorème spectral.

Par conséquent, pour tout vecteur $x \in E$, il existe une, et une seule, famille $(x_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}$ de vecteurs tels que

$$\forall\, \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \quad x_\lambda \in \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{I}_E)$$

et que

$$x = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} x_\lambda. \qquad (\dagger)$$

Par linéarité de u, on en déduit que

$$u(x) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} u(x_\lambda) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda \cdot x_\lambda. \qquad (\ddagger)$$

Comme les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux, les vecteurs x_λ sont aussi deux à deux orthogonaux et on déduit du théorème de Pythagore que

$$\|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \|x_\lambda\|^2$$

et que

$$\|u(x)\|^2 = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda^2 \|x_\lambda\|^2.$$

❧ Toute partie *finie* de $\mathbb{R}$ admet un minimum et un maximum. On peut donc poser

$$m = \min_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} |\lambda| \quad \text{et} \quad M = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} |\lambda|$$

puisque u possède un nombre *fini* de valeurs propres (nombre majoré par la dimension de l'espace E).

❧ Par définition,

$$\forall\, \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \quad 0 \leqslant m \leqslant |\lambda| \leqslant M$$

donc

$$\forall\, \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \quad m^2 \|x_\lambda\|^2 \leqslant |\lambda|^2 \|x_\lambda\|^2 \leqslant M^2 \|x_\lambda\|^2$$

et en sommant, on en déduit que

$$m^2 \|x\|^2 \leqslant \|u(x)\|^2 \leqslant M^2 \|x\|^2.$$

En se restreignant à la sphère unité, on en déduit que

$$\forall\, x \in \Sigma_1, \quad m \leqslant \|u(x)\| \leqslant M.$$

Cet encadrement prouve d'une part l'existence de la borne inférieure et celle de la borne supérieure et d'autre part que

$$\inf_{x \in \Sigma_1} \|u(x)\| \geqslant m \quad \text{et que} \quad \sup_{x \in \Sigma_1} \|u(x)\| \leqslant M.$$

❧ Par définition d'un extremum, il existe deux valeurs propres λ_- et λ_+ de u telles que

$$m = |\lambda_-| \quad \text{et} \quad M = |\lambda_+|.$$

✍ *Pas de valeur propre sans vecteur propre !*

Il existe donc deux vecteurs x_+ et x_- *non nuls* tels que

$$u(x_-) = \lambda_- \cdot x_- \quad \text{et} \quad u(x_+) = \lambda_+ \cdot x_+.$$

Si le vecteur propre x_+ n'est pas unitaire, alors on peut le remplacer par le vecteur $\frac{1}{\|x_+\|} \cdot x_+$, qui est encore un vecteur propre associé à λ_+ et qui est de plus unitaire.

De même, on peut supposer que $x_- \in \Sigma_1$. On a alors

$$m = |\lambda_-| = |\lambda_-|\, \|x_-\| = \|u(x_-)\| \geqslant \inf_{x \in \Sigma_1} \|u(x)\|$$

et aussi :

$$M = |\lambda_+| = \|u(x_+)\| \leqslant \sup_{x \in \Sigma_1} \|u(x)\|.$$

Ainsi, par doubles inégalités,

$$\inf_{x \in \Sigma_1} \|u(x)\| = m \quad \text{et} \quad \sup_{x \in \Sigma_1} \|u(x)\| = M.$$

Ce qui précède prouve aussi que ces bornes sont atteintes et que :

$$\inf_{x \in \Sigma_1} \|u(x)\| = m = \|u(x_-)\| = \min_{x \in \Sigma_1} \|u(x)\|,$$
$$\sup_{x \in \Sigma_1} \|u(x)\| = M = \|u(x_+)\| = \max_{x \in \Sigma_1} \|u(x)\|.$$

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On déduit de (†) et de (‡) que

$$\forall\, x \in E, \quad P(u)(x) = \sum_{\lambda \in Sp(u)} P(\lambda) \cdot x_\lambda.$$

Comme les vecteurs x_λ sont deux à deux orthogonaux, on déduit du Théorème de Pythagore que

$$\big\|P(u)(x)\big\|^2 = \sum_{\lambda \in Sp(u)} P(\lambda)^2 \cdot \|x_\lambda\|^2. \qquad (\star)$$

❧ Comme le spectre de u est un ensemble fini et que toute partie finie non vide de $\mathbb{R}$ admet un plus grand élément, il existe un réel M défini par

$$M = \max_{\lambda \in Sp(u)} \big|P(\lambda)\big| = \sqrt{\max_{\lambda \in Sp(u)} \big|P(\lambda)^2\big|}.$$

On déduit de $(\star)$ et de (†) que

$$\big\|P(u)(x)\big\|^2 \leqslant M^2 \sum_{\lambda \in Sp(u)} \|x_\lambda\|^2 = M^2 \|x\|^2.$$

Par conséquent,

$$\forall\, x \in E, \quad \big\|P(u)(x)\big\| \leqslant M\|x\|$$

puisque les trois quantités sont des réels positifs.

3. Supposons que l'endomorphisme u soit contractant. Alors

$$\forall\, x \in \Sigma_1, \quad \|u(x)\| \leqslant \|x\| = 1$$

donc $M \leqslant 1$ et par conséquent $Sp(u) \subset [-1, 1]$.

Réciproquement, si $Sp(u) \subset [-1, 1]$, alors $M \leqslant 1$ et

$$\forall\, x \in \Sigma_1, \quad \|u(x)\| \leqslant M \leqslant 1.$$

Pour tout vecteur y *non nul*, il existe un scalaire réel $r = \|y\| > 0$ et un vecteur

$$x = \frac{y}{\|y\|} \in \Sigma_1$$

tels que $y = r \cdot x$. Par linéarité de u et positivité de la norme,

$$\|u(y)\| = r\|u(x)\| \leqslant Mr = M\|y\| \leqslant \|y\|.$$

Cette inégalité est encore vraie pour $y = 0_E$ (les deux membres sont alors nuls).

Cela prouve que u est contractant si, et seulement si, $Sp(u) \subset [-1, 1]$.

❧ Supposons que u soit strictement contractant. Alors

$$\forall\, x \in \Sigma_1, \quad \|u(x)\| < \|x\| = 1.$$

On a démontré précédemment que $\|u(x)\|$ atteignait un maximum M sur la sphère unité : cet encadrement prouve alors que $M < 1$ et donc que le spectre de u est contenu dans l'intervalle *ouvert* $]-1, 1[$.

Réciproquement, si $Sp(u) \subset]-1, 1[$, alors le maximum M est *strictement* inférieur à 1 et, en reprenant les notations du premier cas,

$$\forall\, y \neq 0_E, \quad \|u(y)\| \leqslant M\|y\| < \|y\|$$

puisque $\|y\| > 0$.

Solution 22 — 15-07

L'endomorphisme $u^* \circ u$ est auto-adjoint car

$$(u^* \circ u)^* = u^* \circ (u^*)^* = u^* \circ u.$$

D'après le Théorème spectral, il existe une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de E constituée de vecteurs propres pour $u^* \circ u$:

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad (u^* \circ u)(e_k) = \lambda_k \cdot e_k$$

et comme les e_k sont deux à deux orthogonaux :

$$\begin{aligned} \forall\, i \neq j, \quad \big(\, u(e_i) \,\big|\, u(e_j) \,\big) &= \big(\, (u^* \circ u)(e_i) \,\big|\, e_j \,\big) && \text{(définition de l'adjoint)} \\ &= \lambda_i \,(\, e_i \,|\, e_j \,) = 0. \end{aligned}$$

✍ *C'est ainsi que, pour tout endomorphisme u d'un espace euclidien, il existe une base orthonormée dont l'image est une famille orthogonale (attention, cette famille peut contenir le vecteur nul, elle engendre* $\operatorname{Im} u$ *mais ce n'est pas forcément une base de* E*).*

Solution 23 **15-08**

1. Les deux sous-espaces

$$V_+ = \mathrm{Ker}(u - I) \quad \text{et} \quad V_- = \mathrm{Ker}(u + I)$$

sont stables par u (de la forme $\mathrm{Ker}\, P(u)$ avec P polynôme) et en somme directe (car les polynômes $(X-1)$ et $(X+1)$ sont premiers entre eux), donc la somme $V_+ \oplus V_-$ est stable par u.

On sait que :

Si un sous-espace est stable par $u \in O(E)$, alors son orthogonal est aussi stable par u.

Donc le sous-espace

$$F = (V_+ \oplus V_-)^\perp$$

est stable par $u \in O(E)$.

❧ Comme E est un espace euclidien, on sait que

$$F^\perp = ((V_+ \oplus V_-)^\perp)^\perp = V_+ \oplus V_-.$$

Pour tout sous-espace vectoriel G de F,

$$F = G \overset{\perp}{\oplus} (F \oplus G^\perp) = G \overset{\perp}{\oplus} (F^\perp \cap G)^\perp = G \overset{\perp}{\oplus} ((V_+ \oplus V_-) \oplus G)^\perp.$$

2. Avec l'hypothèse faite initialement, le sous-espace

$$G = P_1 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} P_k$$

est contenu dans F. Ce sous-espace est stable par u (en tant que somme de sous-espaces stables par u), donc les trois sous-espaces

$$V_+, \quad V_- \quad \text{et} \quad G$$

sont stables par u.

❧ Par hypothèse, $G \subset F = (V_+ \oplus V_-)^\perp$, donc G et $V_+ \oplus V_-$ sont en somme directe orthogonale. Comme $u \in O(E)$, on sait que V_+ et V_- sont orthogonaux.

❧ On en déduit que la somme

$$V_+ \overset{\perp}{\oplus} V_- \overset{\perp}{\oplus} G$$

est un sous-espace stable par u et comme u est une isométrie, le sous-espace

$$F_{k+1} = [V_+ \overset{\perp}{\oplus} V_- \overset{\perp}{\oplus} G]^\perp$$

est aussi stable par u.

Comme

$$V_+ \oplus V_- \subset V_+ \overset{\perp}{\oplus} V_- \overset{\perp}{\oplus} G,$$

alors

$$F_{k+1} = [V_+ \overset{\perp}{\oplus} V_- \overset{\perp}{\oplus} G]^\perp \subset (V_+ \oplus V_-)^\perp = F.$$

Bref : F_{k+1} est un sous-espace de F qui est stable par u.

❧ D'après la première question, $F = G \overset{\perp}{\oplus} F_{k+1}$, avec

$$\dim G = 2k$$

(puisque G est somme directe de k plans) et

$$\dim F_{k+1} \geqslant 1$$

(puisque $\dim F > 2k$).

Il existe donc un vecteur $y_{k+1} \neq 0_E$ dans F_{k+1}. Comme F_{k+1} est stable par u, on en déduit que

$$u(y_{k+1}) \in F_{k+1}.$$

Comme le sous-espace F_{k+1} ne contient aucun vecteur propre de u, la famille $(y_{k+1}, u(y_{k+1}))$ est libre, donc

$$\dim F_{k+1} \geqslant 2$$

et finalement $\dim F \geqslant 2k+2$.

3. On sait que l'endomorphisme induit par restriction d'un automorphisme orthogonal à un sous-espace stable est encore un automorphisme orthogonal. Par conséquent, $u_{k+1} \in O(F_{k+1})$.

Toute valeur propre (réelle) de u_{k+1} est aussi une valeur propre de u et les vecteurs propres associés à cette valeur propre appartiendraient à $F_{k+1} \subset F$.

Or les vecteurs propres de u appartiennent tous à V_+ ou à V_-, donc il n'y a aucun vecteur propre de u dans

$$(V_+ \oplus V_-)^\perp = F.$$

Par conséquent, le spectre (réel) de u_{k+1} est vide.

❧ L'endomorphisme u_{k+1} n'a pas de valeur propre réelle et il agit sur un espace F_{k+1} de dimension au moins égale à 2, donc il admet un polynôme minimal (non constant par définition) sans racine réelle.

D'après le Théorème de D'Alembert-Gauss (version $\mathbb{R}[X]$), ce polynôme minimal possède au moins un facteur μ_{k+1} irréductible, unitaire et de degré 2.

4. Le polynôme μ_{k+1} est un diviseur *non constant* du polynôme minimal de u_{k+1}, donc l'endomorphisme

$$\mu_{k+1}(u_{k+1})$$

n'est pas injectif. Il existe donc un vecteur $x_{k+1} \neq 0_E$ dans

$$\operatorname{Ker} \mu_{k+1}(u_{k+1}) \subset F_{k+1}.$$

✍ *Par définition, u_{k+1} est un endomorphisme de F_{k+1}, donc*

$$\mu_{k+1}(u_{k+1})$$

est aussi un endomorphisme de F_{k+1}.

❧ Le sous-espace $\operatorname{Ker} \mu_{k+1}(u_{k+1})$ est stable par u_{k+1} et donc par u (puisque u_{k+1} est induit par restriction de u).
On en déduit que le sous-espace

$$P_{k+1} = \operatorname{Vect}(x_{k+1}, u(x_{k+1}))$$

est contenu dans $\operatorname{Ker} \mu_{k+1}(u_{k+1}) \subset F_{k+1}$.

En particulier, par définition de F_{k+1},

$$P_{k+1} \subset F \quad \text{et} \quad P_{k+1} \perp G = P_1 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} P_k.$$

❧ Comme P_{k+1} est engendré par deux vecteurs, il est clair que $\dim P_{k+1} \leqslant 2$.
Comme x_{k+1} est un vecteur *non nul* dans P_{k+1}, on sait déjà que $\dim P_{k+1} \geqslant 1$.
Si $\dim P_{k+1} \neq 2$, alors $\dim P_{k+1} = 1$, donc $P_{k+1} = \mathbb{R} \cdot x_{k+1}$ et

$$u(x_{k+1}) = u_{k+1}(x_{k+1}) \in \mathbb{R} \cdot x_{k+1}$$

et le vecteur x_{k+1} (*non nul !*) serait un vecteur propre de u.

Or il n'y a pas de vecteur propre de u dans F (troisième question). Donc le sous-espace P_{k+1} est bien un plan.

❧ D'autre part, il existe deux réels b et c tels que

$$\mu_{k+1} = X^2 + bX + c \quad \text{et} \quad b^2 - 4c < 0.$$

Comme $x_{k+1} \in \operatorname{Ker} \mu_{k+1}(u_{k+1})$,

$$\begin{aligned}(u_{k+1}^2 + bu_{k+1} + xI)(x_{k+1}) &= u^2(x_{k+1}) + bu(x_{k+1}) + cx_{k+1} \\ &= 0_E\end{aligned}$$

et donc

$$u[u(x_{k+1})] = -cx_{k+1} - bu(x_{k+1}) \in P_{k+1},$$

donc le plan

$$P_{k+1} = \operatorname{Vect}(x_{k+1}, u(x_{k+1}))$$

est bien stable par u.

Conclusion.

On vient en fait de procéder à une démonstration par récurrence sur la dimension du sous-espace F : pour $k \in \mathbb{N}$, tant que $\dim F > 2k$, il existe $k+1$ plans deux à deux orthogonaux, contenus dans F et stables par u et comme

$$P_1 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} P_k \overset{\perp}{\oplus} P_{k+1} \subset F,$$

alors en particulier $\dim F \geqslant 2k+2$.

Comme F est un espace de dimension *finie*, la propriété

$$[\dim F > 2k]$$

ne peut pas être vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$. Il existe donc un entier $d \in \mathbb{N}$ tel que

$$\dim F = 2d$$

et d plans deux à deux orthogonaux, contenus dans F et stables par u tels que

$$F = P_1 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} P_d.$$

Solution 24 **15-10**

1. Comme la matrice A est symétrique, alors (Théorème spectral) il existe une matrice orthogonale Q_0 et une matrice diagonale D telles que

$$Q_0^{-1}.A.Q_0 = Q_0^{\top}.A.Q_0 = D.$$

Comme la matrice symétrique A est positive, ses valeurs propres sont positives : il existe des réels positifs $a_1, \ldots, a_n$ tels que

$$D = \mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n) = \left[\mathrm{Diag}(\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n})\right]^2.$$

En posant $\Delta = \mathrm{Diag}(\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n})$ et $Q = Q_0^{\top}$, on a bien

$$A = Q^{\top}.\Delta^2.Q.$$

Comme la matrice Δ est diagonale, elle est en particulier symétrique et

$$A = Q^{\top}.\Delta^{\top}.\Delta.Q = (\Delta.Q)^{\top}.(\Delta.Q) = P^{\top}.P$$

en posant $P = \Delta.Q$.

❧ Comme la matrice A est, par hypothèse, symétrique et positive, on sait qu'elle est définie positive si, et seulement si, elle est inversible.

Si $PX = 0$, alors $AX = P^{\top}.PX = 0$. Réciproquement, si $AX = 0$, alors

$$\|PX\|^2 = (PX)^{\top}.(PX) = X^{\top}.P^{\top}.PX = X^{\top}.AX = 0$$

et par conséquent $PX = 0$. Cela démontre que $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, P$ et en particulier que A est inversible si, et seulement si, P est inversible (noyau réduit à la colonne nulle).

Ainsi, la matrice P est inversible si, et seulement si, la matrice A est définie positive.

✍ *La question suivante va préciser ce résultat : parmi toutes les matrices inversibles P possibles, il y en a au moins une qui soit triangulaire.*

2. Supposons que la matrice symétrique A soit définie positive. Alors l'application

$$\psi_A = \left[(X, Y) \mapsto X^{\top}.A.Y\right]$$

est un produit scalaire sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et la matrice A est la matrice de Gram de ψ_A relative à la base canonique $\mathscr{C}_0 = (E_1, \ldots, E_n)$:

$$\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant n, \qquad A_{i,j} = E_i^{\top}.A.E_j = \psi_A(E_i, E_j).$$

D'après l'algorithme de Gram-Schmidt, il existe une base orthonormée $\mathscr{B} = (U_1, \ldots, U_n)$ pour ψ_A telle que la matrice de passage Q de la base canonique $\mathscr{C}_0$ à cette base $\mathscr{B}$ soit triangulaire (supérieure).

La matrice $P = Q^{-1}$ est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base canonique : ses colonnes $P_1, \ldots, P_n$ expriment les vecteurs $E_1, \ldots, E_n$ de la base canonique dans la base orthonormée $\mathscr{B}$ et comme $\mathscr{B}$ est orthonormée pour le produit scalaire ψ_A,

$$\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant n, \qquad A_{i,j} = \psi_A(E_i, E_j) = P_i^{\top}.P_j$$

c'est-à-dire

$$A = P^{\top}.P.$$

✍ *Si les matrices de Gram étaient au programme, on pourrait rapidement conclure en appliquant la formule de changement de base spécifiques aux matrices de Gram.*

3. Quel que soit l'automorphisme u de E, l'application φ définie par

$$\forall\, x, y \in E, \qquad \varphi(x,y) = \big(u(x)\,\big|\,u(y)\big)$$

est clairement bilinéaire et symétrique. Par ailleurs,

$$\forall\, x \in E, \qquad \varphi(x,x) = \big\|u(x)\big\|^2 \geqslant 0$$

et si $\varphi(x,x) = 0$, alors $u(x) = 0_E$ et donc $x = 0_E$ (puisque u est supposée injective). Donc φ est bien un produit scalaire sur E.

❧ Réciproquement, supposons que φ soit un produit scalaire sur E. Considérons une base $\mathscr{C} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de E, orthonormée pour le produit scalaire de référence $(\cdot\,|\,\cdot)$, et la matrice

$$A = \big(\varphi(e_i,e_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

La matrice A est symétrique (par symétrie du produit scalaire) et définie positive : quelle que soit la colonne $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$X^\top.A.X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i A_{i,j} x_j = \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \left\|\sum_{i=1}^n x_i e_i\right\|^2 \geqslant 0,$$

cette quantité étant nulle si, et seulement si, le vecteur

$$\sum_{i=1}^n x_i e_i$$

est le vecteur nul, c'est-à-dire $x_1 = \cdots = x_n = 0$ (puisque les vecteurs e_i sont linéairement indépendants).

D'après les questions précédentes, il existe une matrice inversible P telle que $A = P^\top.P$. Notons u, l'automorphisme de E représenté par cette matrice inversible dans la base $\mathscr{C}$. Par linéarité de u et par bilinéarité du produit scalaire de référence $(\cdot\,|\,\cdot)$, l'application

$$\psi_u = \big[(x,y) \mapsto \big(u(x)\,\big|\,u(y)\big)\big]$$

est, de même que φ, une forme bilinéaire sur E.

Par définition, les colonnes P_1, …, P_n de la matrice P représentent les vecteurs $u(e_1)$, …, $u(e_n)$ dans la base $\mathscr{C}$. Comme la base $\mathscr{C}$ est orthonormée pour le produit scalaire de référence $(\cdot\,|\,\cdot)$,

$$\forall\, 1 \leqslant i,j \leqslant n, \quad \big(u(e_i)\,\big|\,u(e_j)\big) = P_i^\top.P_j = A_{i,j} = \varphi(e_i,e_j).$$

Comme les deux formes bilinéaires φ et ψ_u coïncident sur une base de E, on en déduit qu'elles sont égales sur E :

$$\forall\,(x,y) \in E, \quad \big(u(x)\,\big|\,u(y)\big) = \varphi(x,y).$$

✍ *De même que toute forme linéaire sur un espace euclidien E peut s'exprimer à l'aide du produit scalaire considéré (Théorème de représentation de Riesz) :*

$$\forall\, x \in E, \qquad f(x) = (\,a\,|\,x\,),$$

tout produit scalaire sur E peut s'exprimer à l'aide du produit scalaire de référence :

$$\forall\, x,y \in E, \qquad \varphi(x,y) = \big(u(x)\,\big|\,u(y)\big).$$

Solution 25 15-13

1. Soit $\mathscr{B}_0 = (e_1,\ldots,e_n)$, une base orthonormée pour le produit scalaire φ_0. Par définition,

$$\forall\, 1 \leqslant i,j \leqslant n, \quad \varphi(e_i,e_j) = \delta_{i,j}$$

donc la matrice de Gram $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\varphi_0)$ est égale à I_n.

Par définition, la matrice de Gram relative à la base $\mathscr{B}_0$ de l'autre produit scalaire φ

$$\Gamma = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\varphi) = \big(\varphi(e_i,e_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

est une matrice symétrique réelle :

$$\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant n, \quad \varphi(e_i, e_j) = \varphi(e_j, e_i) \in \mathbb{R}.$$

Par ailleurs, quelle que soit la colonne $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$,

$$X^\top.\Gamma.X = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \Gamma_{i,j} x_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \varphi(e_i, e_j) x_j$$
$$= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \varphi(x, x)$$

et comme φ est un produit scalaire, $X^\top.\Gamma.X$ est un réel positif, qui est nul si, et seulement si, la colonne X est la colonne nulle. Donc la matrice symétrique Γ est bien définie positive : $\Gamma \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

2. Comme la matrice Γ est symétrique réelle, on déduit du Théorème spectral qu'il existe une matrice orthogonale Q et une matrice diagonale Δ telles que

$$Q^\top.\Gamma.Q = Q^{-1}.\Gamma.Q = \Delta = \mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n).$$

✍ *De plus, les coefficients diagonaux de Δ sont les valeurs propres de Γ et comme Γ est définie positive, ses valeurs propres sont des réels strictement positifs.*

3. En tant que matrice inversible, la matrice Q est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}_0$ à une nouvelle base

$$\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n).$$

✍ *Une matrice est orthogonale si, et seulement si, c'est la matrice de passage d'une base orthonormée à une autre base orthonormée (changement de base orthonormée).*

❧ Comme la matrice de passage de $\mathscr{B}_0$ à $\mathscr{B}$ est orthogonale et que la base $\mathscr{B}_0$ est une base orthonormée pour φ_0, la base $\mathscr{B}$ est aussi une base orthonormée pour φ_0. Par conséquent,

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi_0) = I_n.$$

✍ *La matrice de Gram d'un produit scalaire ψ relative à une base $\mathscr{B}$ sert à calculer (matriciellement) le produit scalaire $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ au moyen des coordonnées relatives à la base $\mathscr{B}$ des vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$:*

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = X^\top.\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\psi).Y.$$

❧ Par définition de la base $\mathscr{B}$, les colonnes $Q_1, \ldots, Q_n$ de la matrice de passage Q représentent les vecteurs $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ de la base $\mathscr{B}$ dans la base orthonormée $\mathscr{B}_0$ et par conséquent

$$\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant n, \quad Q_i^\top.\Gamma.Q_j = \varphi(\varepsilon_i, \varepsilon_j).$$

On en déduit que

$$\big(\varphi(\varepsilon_i, \varepsilon_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = Q^\top.\Gamma.Q = \Delta.$$

✍ *La formule de changement de base pour les matrices de Gram (hors programme !) nous assure que*

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\psi) = Q^\top.\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\psi).Q$$

pour toute forme bilinéaire ψ et toute matrice de passage $Q = \mathfrak{Mat}(\mathscr{B}_0 \to \mathscr{B})$ (que cette matrice Q soit orthogonale ou non).

Comme la matrice Δ est diagonale, on en déduit en particulier que

$$\forall\, 1 \leqslant i \neq j \leqslant n, \qquad \varphi(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0.$$

La nouvelle base $\mathscr{B} = (\varepsilon_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est donc orthonormée pour le produit scalaire de référence φ_0 et orthogonale pour l'autre produit scalaire φ.

✍ *S'il existe une base qui est orthonormée à la fois pour le produit scalaire φ_0 et pour le produit scalaire φ, alors en fait ces deux produits scalaires n'en font qu'un !*

En effet, si $A = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi_0)$, alors

$$\forall\, x, y \in E, \quad \varphi(x, y) = X^\top.A.Y = \varphi_0(x, y)$$

où les colonnes X et Y représentent les vecteurs x et y dans la base $\mathscr{B}$.

(On suppose ici seulement que les deux produits scalaires ont une même matrice de Gram dans une base $\mathscr{B}$ donnée, on ne suppose même pas que la matrice de Gram A est égale à I_n.)

Solution 26 15-14

1. Si $v^2 = u$, alors

$$u \circ v = v^2 \circ v = v \circ v^2 = v \circ u$$

et comme les deux endomorphismes commutent, tout sous-espace propre de l'un est stable par l'autre.

❧ Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Comme l'endomorphisme auto-adjoint u est positif, son spectre est contenu dans $\mathbb{R}_+$, donc le réel λ est positif et $\sqrt{\lambda}$ est bien définie.

Supposons que $x \in \mathrm{Ker}(v - \sqrt{\lambda}\,\mathrm{I})$. Alors $v(x) = \sqrt{\lambda} \cdot x$ et, par hypothèse,

$$u(x) = v^2(x) = (\sqrt{\lambda})^2 \cdot x = \lambda \cdot x.$$

Par conséquent,

$$\mathrm{Ker}(v - \sqrt{\lambda}\,\mathrm{I}) \subset \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{I}).$$

❧ Réciproquement, le sous-espace propre $E_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{I})$ de u est stable par v, donc il existe un endomorphisme $v_\lambda \in L(E_\lambda)$ induit par restriction de v.

Comme v est auto-adjoint, alors v_λ est aussi auto-adjoint et donc diagonalisable (Théorème spectral). Pour tout $x \in E_\lambda$, on a

$$v_\lambda^2(x) = v^2(x) = u(x) = \lambda \cdot x$$

donc $X^2 - \lambda$ est un polynôme annulateur de v_λ et comme λ est un réel positif, le spectre de v_λ est contenu dans $\{\pm\sqrt{\lambda}\}$.

Mais on a supposé que v était auto-adjoint positif, donc v_λ est aussi auto-adjoint positif :

$$\forall\, x \in E_\lambda, \quad \big(x \,\big|\, v_\lambda(x)\big) = \big(x \,\big|\, v(x)\big) \geqslant 0$$

donc le spectre de v_λ est contenu dans $\{+\sqrt{\lambda}\}$. Or v_λ est diagonalisable, donc son spectre n'est pas vide : son spectre est donc égal à $\{\sqrt{\lambda}\}$.

Un endomorphisme diagonalisable qui n'a qu'une seule valeur propre est une homothétie, donc

$$\forall\, x \in E_\lambda, \quad v(x) = v_\lambda(x) = \sqrt{\lambda} \cdot x$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{I}) \subset \mathrm{Ker}(v - \sqrt{\lambda}\,\mathrm{I}).$$

On a ainsi démontré par double inclusion que

$$\forall\, \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \qquad \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{I}) = \mathrm{Ker}(v - \sqrt{\lambda}\,\mathrm{I}).$$

❧ Comme l'endomorphisme u est auto-adjoint, il est diagonalisable et

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}^{\perp} \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{I}).$$

Si $v \in \mathcal{S}^+(E)$ vérifie $v^2 = u$, alors on vient de voir que

$$\forall\, \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ \forall\, x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{I}), \quad v(x) = \sqrt{\lambda} \cdot x.$$

D'après le Théorème de caractérisation des applications linéaires (version caractérisation par une décomposition de E en somme directe), il existe donc au plus un endomorphisme $v \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $u = v^2$.

✍ *Pour justifier l'existence d'une racine carrée positive de u, nous allons reprendre certains des arguments précédents dans un ordre différent et surtout* dans un contexte différent *: on ne va pas commencer par supposer qu'un tel endomorphisme existe — et ça change tout !*

2. Comme u est un endomorphisme auto-adjoint positif, il existe une base orthonormée de E

$$\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$$

constituée de vecteurs propres de u et le spectre de u est contenu dans $\mathbb{R}_+$:

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n,\ \exists\, \lambda_k \in \mathbb{R}_+, \quad u(\varepsilon_k) = \lambda_k \cdot \varepsilon_k.$$

Comme les réels λ_k sont positifs, on déduit du Théorème de caractérisation des applications linéaires (via une base de l'espace de départ) qu'il existe un endomorphisme v de E tel que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad v(\varepsilon_k) = \sqrt{\lambda_k} \cdot \varepsilon_k.$$

Comme $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de vecteurs propres pour v, cet endomorphisme est auto-adjoint et comme ses valeurs propres $\sqrt{\lambda_k}$ sont toutes positives, c'est un endomorphisme auto-adjoint positif : $v \in \mathcal{S}^+(E)$.

En outre,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad v^2(\varepsilon_k) = (\sqrt{\lambda_k})^2 \cdot \varepsilon_k = \lambda_k \cdot \varepsilon_k = u(\varepsilon_k).$$

Comme u et v^2 sont deux endomorphismes de E qui coïncident sur une base de E, ils sont en fait égaux :

$$\forall\, x \in E, \quad v^2(x) = u(x)$$

et on a ainsi démontré qu'il existait une (et une seule !) racine carrée positive de u.

3. Si on n'impose pas $\mathrm{Sp}(v) \subset \mathbb{R}_+$, alors tout endomorphisme w tel que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad w(\varepsilon_k) = \pm\sqrt{\lambda_k} \cdot \varepsilon_k$$

est un endomorphisme auto-adjoint tel que $w^2 = u$. Il y a donc au moins 2^n endomorphismes auto-adjoints possibles !

❧ En reprenant l'analyse menée plus haut, si les sous-espaces propres de E sont tous des droites, il n'y a que 2^n possibilités : pour toute valeur propre λ de u, il existe un vecteur x_λ non nul tel que

$$\mathrm{Ker}(u - \lambda\, \mathrm{I}) = \mathbb{R} \cdot x_\lambda$$

et comme $v(x_\lambda) = \pm\sqrt{\lambda} \cdot x_\lambda$,

— ou bien

$$\forall\, x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda\, \mathrm{I}), \quad v(x) = +\sqrt{\lambda} \cdot x,$$

— ou bien

$$\forall\, x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda\, \mathrm{I}), \quad v(x) = -\sqrt{\lambda} \cdot x$$

❧ En revanche, s'il existe un sous-espace propre $\mathrm{Ker}(u - \lambda\, \mathrm{I})$ de dimension supérieure à 2, alors ce sous-espace contient une infinité de familles orthonormées (a_λ, b_λ) et pour chacune de ces familles, il existe un endomorphisme $v \in \mathcal{S}(E)$ tel que

$$v(a_\lambda) = +\sqrt{\lambda} \cdot a_\lambda \quad \text{et} \quad v(b_\lambda) = -\sqrt{\lambda} \cdot b_\lambda.$$

Il existe dans ce cas une infinité de racines carrées pour u.

✍ *Du moment qu'on assure l'existence d'une base orthonormée de vecteurs propres, on peut faire tout ce qu'on veut, on obtiendra un endomorphisme auto-adjoint !*

✍ *Ceux qui ont besoin de* voir *pour croire gagneront à se rappeler la forme générale des matrices de réflexion en dimension 2 et vérifieront que*

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} \alpha\cos\theta & \alpha\sin\theta & & & \\ \alpha\sin\theta & -\alpha\cos\theta & & & \\ & & \alpha_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \alpha_n \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & & & \\ 0 & \alpha^2 & & & \\ & & \alpha_3^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \alpha_n^2 \end{pmatrix}$$

pour croire *enfin !*

Solution 27 — 15-17

1. Soit $0 \leqslant k \leqslant d$. D'après l'inégalité de Schwarz,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \big|\langle\, \varepsilon_k \,|\, P_n \,\rangle\big| \leqslant \|\varepsilon_k\|\, \|P_n\| = \|P_n\|.$$

Comme la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, le majorant tend vers 0 et par encadrement,

$$\langle\, \varepsilon_k \,|\, P_n \,\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

2. Puisque $(\varepsilon_k)_{0\leqslant k\leqslant d}$ est une base orthonormée de E,

$$P_n = \sum_{k=0}^{d} \langle\, \varepsilon_k \,|\, P_n \,\rangle \cdot \varepsilon_k$$

et en particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{d} \langle \varepsilon_k \,|\, P_n \rangle \cdot \varepsilon_k(x).$$

La suite $\big(P_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ apparaît ainsi comme une combinaison linéaire de suites de limite nulle, donc elle tend vers 0.

✍ *Rien d'étonnant, ici !*
L'espace $\mathbb{R}_d[X]$ est muni de la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ et on considère une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers le polynôme nul.
Comme $\mathbb{R}_d[X]$ est un espace vectoriel de dimension finie, toutes les formes linéaires sont continues et en particulier les formes linéaires $[P \mapsto P(x)]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution 28 ccp20-EB

1. Tout d'abord, toute matrice $A \in O_n(\mathbb{R})$ vérifie

$$A^\top.A = A.A^\top = I_n$$

donc elle est inversible, d'inverse $A^{-1} = A^\top$. Donc $O_n(\mathbb{R})$ est contenu dans le groupe multiplicatif $GL_n(\mathbb{R})$.
Si les matrices A et B sont orthogonales, alors

$$(AB)^\top.(AB) = B^\top.(A^\top.A).B = B^\top.B = I_n$$

donc $AB \in O_n(\mathbb{R})$, donc la multiplication matricielle est une loi de composition interne sur $O_n(\mathbb{R})$.
Comme $I_n^\top.I_n = I_n$, l'élément neutre I_n de $GL_n(\mathbb{R})$ appartient bien à $O_n(\mathbb{R})$.
Enfin, si $A \in O_n(\mathbb{R})$, on a vu que A admettait $A^\top$ pour inverse et comme

$$(A^\top)^\top.(A^\top) = A.A^\top = I_n,$$

son inverse appartient aussi à $O_n(\mathbb{R})$.
On a démontré que $O_n(\mathbb{R})$ était un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.
❧ Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux, donc les valeurs propres de $A \in T_n^+$ sont des réels strictement positifs. En particulier, $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$ et la matrice A est inversible, donc $T_n^+ \subset GL_n(\mathbb{R})$.
Si les matrices A et B appartiennent à T_n^+, alors

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \star & \star \\ 0 & \ddots & \star \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \star & \star \\ 0 & \ddots & \star \\ 0 & 0 & b_{nn} \end{pmatrix}$$

donc

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \star & \star \\ 0 & \ddots & \star \\ 0 & 0 & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix} \in T_n^+$$

(puisqu'un produit de réels strictement positifs est encore un réel strictement positif). La multiplication matricielle est donc bien une loi de composition interne sur T_n^+.
Il est clair que $I_n \in T_n^+$.
Enfin, si $A \in T_n^+$, alors (en conservant les notations précédentes)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & \star & \star \\ 0 & \ddots & \star \\ 0 & 0 & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix} \in T_n^+$$

puisque l'inverse d'un réel strictement positif est encore un réel strictement positif.
On a démontré que T_n^+ était un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.
❧ On a déjà vérifié que $I_n \in O_n(\mathbb{R}) \cap T_n^+$.
Considérons $A \in O_n(\mathbb{R}) \cap T_n^+$. Avec les notations précédentes,

$$\mathrm{Sp}(A) = \{a_{11}, \dots, a_{nn}\} \subset \mathbb{R}_+^*$$

(ce qui ne doit pas faire croire que les a_{kk} soient deux à deux distincts !) et comme $A \in O_n(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{\pm 1\}.$$

Par conséquent,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad a_{kk} = 1.$$

Si la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \star & \star \\ 0 & \ddots & \star \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est orthogonale, chaque colonne est un vecteur unitaire et par conséquent, les coefficients situés au-dessus de la diagonale sont tous nuls. Donc $A = I_n$ et finalement

$$O_n(\mathbb{R}) \cap T_n^+ = \{I_n\}.$$

2. a. Quelles que soient les matrices colonnes X et Y dans E, le produit matriciel

$$X^\top.(A^\top.A).Y$$

est bien défini et appartient à $\mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$, qu'on peut identifier à $\mathbb{R}$. De ce point de vue, φ est bien une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

D'après les règles du calcul matriciel, l'application φ est bilinéaire.

Il est clair que $\mathfrak{M}_1(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_1(\mathbb{R})$ et donc que

$$\begin{aligned} \forall\, X, Y \in E, \quad \varphi(Y,X) &= Y^\top.(A^\top.A).X && \text{(définition)} \\ &= [Y^\top.(A^\top.A).X]^\top && \text{(symétrie)} \\ &= X^\top.(A^\top.A).Y = \varphi(X,Y) \end{aligned}$$

puisque la matrice $A^\top.A$ est évidemment symétrique.

Il reste alors à vérifier que φ, forme bilinéaire symétrique sur E, est définie positive.

Pour tout $X \in E$,

$$\varphi(X,X) = (AX)^\top.(AX) = \|AX\|^2 \geqslant 0$$

avec égalité si, et seulement si, $AX = 0$ (la norme sépare les points), c'est-à-dire $X = 0$ (puisque A est supposée inversible).

On a démontré que φ était bien un produit scalaire sur E.

2. b. En appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à la base canonique de E, on obtient une base $\mathscr{B}$ qui est orthonormée pour le produit scalaire φ et la matrice de passage est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux qui sont tous strictement positifs.

✍ *Quels que soient* $1 \leqslant i, j \leqslant n$,

$$\varphi(E_i, E_j) = E_i^\top.(A^\top.A).E_j = (A^\top.A)_{ij}$$

donc

$$\big(\varphi(E_i, E_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = A^\top.A.$$

La base canonique est donc une base orthonormée pour φ si, et seulement si, la matrice A est orthogonale.

2. c. Soient X, Y dans E. Par définition de la base canonique,

$$\mathfrak{Mat}_{can}(X) = X, \qquad \mathfrak{Mat}_{can}(Y).$$

D'après la formule du changement de base,

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(X) = P^{-1}X, \qquad \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(Y) = P^{-1}Y.$$

Comme la base $\mathscr{B}$ est une base orthonormée pour φ,

$$\varphi(X,Y) = (P^{-1}X)^\top.(P^{-1}Y) = X^\top.((P^{-1})^\top.P^{-1}).Y.$$

Comme $P \in T_n^+$, on sait **[1.]** que $T = P^{-1} \in T_n^+$ et la relation précédente, *qui est vraie quelles que soient les matrices colonnes X et Y*, montre que

$$A^\top.A = T^\top.T.$$

3. Considérons la matrice $T \in T_n^+$ définie à la question précédente et posons

$$O = AT^{-1} \in GL_n(\mathbb{R}).$$

Par définition de T,
$$O^\top.O = (T^{-1})^\top.(A^\top.A).T^{-1} = (T^{-1})^\top.T^\top.T.T^{-1} = I_n$$
donc $O \in O_n(\mathbb{R})$ et, par construction, $A = OT$.

Supposons enfin qu'il existe deux matrices orthogonales O_1 et O_2, ainsi que deux matrices T_1 et T_2 dans T_n^+ telles que
$$A = O_1T_1 = O_2T_2.$$
On déduit des deux structures de groupes du **[1.]** que
$$O_n(\mathbb{R}) \ni O_2^{-1}O_1 = T_2T_1^{-1} \in T_n^+,$$
donc que
$$O_2^{-1}O_1 = T_2T_1^{-1} = I_n$$
et enfin que
$$O_1 = O_2 \quad \text{et} \quad T_1 = T_2,$$
ce qui prouve l'unicité de la factorisation de A.

✍ *Cette factorisation des matrices inversibles généralise la décomposition (unique) $z = |z|\,e^{i\theta}$ des complexes non nuls où $|z| > 0$ et $e^{i\theta}$ est unitaire.*

Solution 29 — ccp24-NH

1. Si $x \in F^\perp$, alors en particulier
$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \langle e_i \,|\, x\rangle = 0$$
et donc
$$\|x\|^2 = \langle x \,|\, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \,|\, x\rangle = 0.$$
Autrement dit, $x = 0_E$.

Réciproquement, comme $F^\perp$ est un sous-espace de E, il contient nécessairement le vecteur nul.

Donc $F^\perp = \{0_E\}$.

❧ Comme F est un sous-espace de dimension finie, on sait que
$$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$$
et on déduit de ce qui précède que
$$E = F = \mathrm{Vect}(e_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n).$$
Autrement dit : la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille génératrice de E.

✍ *La relation $E = F \oplus F^\perp$ est vraie pour tout sous-espace F lorsque E est un espace euclidien (c'est-à-dire un espace de dimension finie).*

En revanche, si la dimension de E est infinie, il arrive que cette relation soit fausse et que seule soit vraie l'inclusion
$$E \supset F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp.$$
(Cf Problème du supplémentaire orthogonal *dans le cours.)*

2. Comme E est un espace vectoriel de dimension finie, tout endomorphisme $v \in L(E)$ admet un adjoint v^*.

✍ *Autre subtilité : le cours sur l'adjoint se borne au cas des espaces euclidiens.*

Si v est un endomorphisme d'un espace préhilbertien de dimension infinie, il admet au plus un *adjoint (même démonstration que dans le cours), mais rien ne prouve en général l'existence d'un adjoint.*

L'inégalité de Schwarz prouve que : si v admet un adjoint, alors l'application linéaire v est nécessairement continue. (Eh oui ! Si la dimension de E est infinie, un endomorphisme de E n'est pas nécessairement continu !)

Et même si l'endomorphisme v est continu, on n'est pas sûr qu'il admette un adjoint.

Pour être sûr de l'existence d'un adjoint pour tout endomorphisme $v \in L(E)$, il suffit que E soit un espace de Hilbert, c'est-à-dire un espace préhilbertien dans lequel toute série absolument convergente est en fait convergente. (Il s'agit donc d'un espace de dimension infinie qui ressemble beaucoup à un espace de dimension finie.)

L'endomorphisme $v + v^*$ est alors un endomorphisme auto-adjoint :

$$(v + v^*)^* = v^* + (v^*)^* = v^* + v = v + v^*$$

et donc un endomorphisme diagonalisable (Théorème spectral).

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de $(v + v^*)$, alors il existe un vecteur propre x associé à λ et

$$\begin{aligned}
\langle (v+v^*)(x) \,|\, x \rangle &= \langle v(x) \,|\, x \rangle + \langle v^*(x) \,|\, x \rangle && \text{(linéarité à gauche du p.s.)} \\
&= \langle v(x) \,|\, x \rangle + \langle x \,|\, v(x) \rangle && \text{(définition de l'adjoint)} \\
&= 2 \langle v(x) \,|\, x \rangle && \text{(symétrie du produit scalaire)} \\
&= 0 && \text{(hypothèse sur } v\text{)} \\
&= \langle \lambda x \,|\, x \rangle && \text{(vecteur propre associé à } \lambda\text{)} \\
&= \lambda \|x\|^2 && \text{(linéarité à gauche du p.s.)}
\end{aligned}$$

et comme $\|x\|^2 > 0$ (puisque x est, par hypothèse, un vecteur propre), on en déduit que $\lambda = 0$.

Un endomorphisme diagonalisable n'admettant que 0 pour valeur propre est l'endomorphisme nul, donc

$$v^* = -v.$$

3. Il est clair que u est un endomorphisme de E.

✍ *Il faut penser à analyser l'expression de u, car elle doit évoquer des souvenirs !*
Si la famille $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ était une base orthonormée de E, alors

$$\sum_{i=1}^{n} \langle e_i \,|\, x \rangle \cdot e_i$$

serait le projeté orthogonal de x sur le sous-espace F engendré par la famille $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $u(x)$ serait le projeté orthogonal de x sur le sous-espace $F^\perp$.

La définition de u est donc une indication qui ne dit pas son nom : si on est capable de mener cette analyse, on est aussi capable de traiter cet exercice sans avoir besoin de cette indication.

Quels que soient les vecteurs x et y de E,

$$\begin{aligned}
\langle u(x) \,|\, y \rangle &= \langle x \,|\, y \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \,|\, x \rangle \langle e_i \,|\, y \rangle && \text{(linéarité à gauche du p.s.)} \\
&= \langle y \,|\, x \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \,|\, y \rangle \langle e_i \,|\, x \rangle && \text{(symétrie du p.s. et commutativité de } \times\text{)} \\
&= \left\langle y - \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \,|\, y \rangle \cdot e_i \,\middle|\, y \right\rangle && \text{(linéarité à gauche du p.s.)} \\
&= \langle u(y) \,|\, x \rangle = \langle x \,|\, u(y) \rangle && \text{(symétrie du p.s.)}
\end{aligned}$$

ce qui prouve que l'endomorphisme u est auto-adjoint.

✍ *Le cours sur les espaces euclidiens nous assure que toute projection orthogonale est un endomorphisme auto-adjoint (aussi bien la projection orthogonale sur F que la projection orthogonale sur $F^\perp$) : on ne doit pas être surpris par le résultat de ce calcul.*

✍ *La propriété qu'on a établie :*

$$\forall\, x, y \in E, \quad \langle u(x) \,|\, y \rangle = \langle x \,|\, u(y) \rangle$$

prouve d'abord que l'endomorphisme u admet un adjoint et ensuite que cet adjoint est égal à u lui-même. Dans ce cas, il n'est pas nécessaire de supposer que la dimension de E est finie ou que E est un espace de Hilbert !

❧ En développant (linéarité à gauche), on obtient

$$\forall\, x \in E, \quad \langle u(x) \,|\, x \rangle = \langle x \,|\, x \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \,|\, x \rangle^2 = 0$$

par hypothèse sur la famille $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

D'après la question précédente, $u^* = -u$ et comme u est auto-adjoint, on a $u^* = u$. Ainsi, $u = -u$ et u est l'endomorphisme nul. On a donc démontré que

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \,|\, x \rangle \cdot e_i.$$

4. On a démontré plus haut que la dimension de E était finie, ce n'est donc pas une hypothèse !

❧ Par hypothèse, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\|e_i\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \langle e_j \,|\, e_i \rangle^2 = \|e_i\|^2 + \sum_{j \neq i} \langle e_j \,|\, e_i \rangle^2$$

et donc

$$\sum_{j \neq i} \underbrace{\langle e_j \,|\, e_i \rangle^2}_{\geqslant 0} = 0.$$

Lorsqu'une somme de termes positifs est nulle, chaque terme est nul, donc

$$\forall i \neq j, \quad \langle e_i \,|\, e_j \rangle = 0.$$

La famille $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est donc une famille orthogonale.

❧ D'après la question précédente, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} \langle e_j \,|\, e_i \rangle \cdot e_j = \|e_i\|^2 \cdot e_i + \sum_{j \neq i} \langle e_j \,|\, e_i \rangle \cdot e_j = \|e_i\|^2 \cdot e_i$$

puisque la famille $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est orthogonale.

Par homogénéité de la norme, on en déduit que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \|e_i\| = \|e_i\|^3$$

et donc que $\|e_i\| = 1$ (puisqu'on a supposé que les vecteurs e_i n'étaient pas nuls).

La famille $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est donc une famille orthonormée.

✍ *Cet exercice est un grand classique qu'on a fait précéder de quelques questions de cours. J'ai donc utilisé les résultats précédents pour montrer que les vecteurs sont unitaires, mais c'est inutile : d'après l'hypothèse initiale,*

$$\|e_i\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \langle e_j \,|\, e_i \rangle^2 = \|e_i\|^4 + \sum_{j \neq i} \langle e_j \,|\, e_i \rangle^2$$

et comme les vecteurs sont deux à deux orthogonaux, on a $\|e_i\|^2 = \|e_i\|^4$, d'où $\|e_i\| = 1$ (puisque cette norme n'est pas nulle).

❧ Comme elle engendre E (d'après la première question), c'est une base orthonormée de E.

Solution 30 pg23S4-a

Comme f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$, les fonctions f' et g' sont continues sur le segment $[0,1]$ et par conséquent, l'intégrale est bien définie. Ainsi φ est bien une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

❧ Il est clair que φ est bilinéaire et symétrique.

❧ D'après l'inégalité de Schwarz,

$$\left(\int_0^1 f'(t) \times 1 \, dt \right)^2 \leqslant \int_0^1 \left[f'(t) \right]^2 dt \int_0^1 1^2 \, dt.$$

Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$, on déduit du Théorème fondamental de l'Analyse que

$$\left[f(1) - f(0) \right]^2 \leqslant \int_0^1 \left[f'(t) \right]^2 dt.$$

On peut alors conclure : quelle que soit la fonction $f \in E$,

$$\begin{aligned} \varphi(f,f) &= \int_0^1 \left[f'(t) \right]^2 dt + 2f(0)f(1) \\ &\geqslant f(1)^2 + f(0)^2 - 2f(0)f(1) + 2f(0)f(1) \\ &\geqslant f(1)^2 + f(0)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

✍ *L'application ψ définie par*

$$\psi(f,g)=\int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt-f(0)g(1)-f(1)g(0)$$

est bien une forme bilinéaire symétrique, mais elle n'est pas positive. En effet, avec

$$f=[t\mapsto 1+t],$$

on obtient

$$\varphi(f,f)=\int_0^1 0\,dt-1\cdot 2-2\cdot 1=-4.$$

On trouve ce contre-exemple en se rappelant du cas d'égalité dans l'inégalité de Schwarz : ici, l'inégalité de Schwarz devient une égalité si, et seulement si, la dérivée f' et la fonction constante $[t\mapsto 1]$ sont proportionnelles, c'est-à-dire si $f(t)=t+K$.

❧ On vient de démontrer que

$$\forall f\in E,\quad \varphi(f,f)\geqslant f(1)^2+f(0)^2.$$

Par suite, si $\varphi(f,f)=0$, alors

$$f(1)^2+f(0)^2=0,$$

donc $f(1)=f(0)=0$ et par conséquent,

$$\varphi(f,f)=\int_0^1\big[f'(t)\big]^2\,dt=0.$$

Or la fonction $(f')^2$ est continue et positive sur $[0,1]$, donc elle est identiquement nulle sur cet intervalle. La fonction f est donc constante et comme elle s'annule (en $t=0$ et en $t=1$), elle est identiquement nulle.

► L'application φ est bien un produit scalaire sur E.

Solution 31 pg23S4-b

1. Puisque $E=\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique, la base canonique est une base orthonormée.

❧ Posons

$$a=(1,1,1,1),\quad b=(1,-1,1,-1)\quad\text{et}\quad u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4.$$

Comme $\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique, on déduit du système d'équations que

$$\forall u\in E,\qquad u\in F\iff \langle a\,|\,u\rangle=\langle b\,|\,u\rangle=0$$

c'est-à-dire

$$F=(\mathbb{R}\cdot a)^\perp\cap(\mathbb{R}\cdot b)^\perp=\big[\mathrm{Vect}(a,b)\big]^\perp.$$

Et comme $\langle a\,|\,b\rangle=1-1+1-1=0$, on connaît une base orthogonale de $F^\perp$.

D'après le cours, la projection orthogonale q sur $F^\perp$ s'exprime donc par

$$\forall u\in E,\quad q(u)=\frac{\langle a\,|\,u\rangle}{\|a\|^2}\cdot a+\frac{\langle b\,|\,u\rangle}{\|b\|^2}\cdot b$$

et la projection p sur F par

$$\forall u\in E,\quad p(u)=u-q(u).$$

Par conséquent, les coordonnées du vecteur $p(u)$ relatives à la base canonique sont

$$\frac14\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}-\frac{x+y+z+t}{4}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{x-y+z-t}{4}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}=\frac14\cdot\begin{pmatrix}2x&&-2z&\\&2y&&-2t\\-2x&&2z&\\&-2y&&2t\end{pmatrix}$$
$$=\frac12\cdot\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$$

donc

$$\mathfrak{Mat}_{\mathrm{can}}(p)=\frac12\cdot\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}.$$

✍ *Avant de conclure, il est judicieux de s'assurer*

— *que la matrice trouvée est bien symétrique (une projection orthogonale est un endomorphisme auto-adjoint et la base canonique est ici orthonormée, donc la matrice doit être symétrique) ;*
— *que son rang est égal à 2 (= la dimension de F) ;*
— *que sa trace est égale à 2 (la trace d'un projecteur est toujours égale à son rang)*
— *et que les colonnes de la matrice appartiennent bien au sous-espace F.*

2. D'après le cours,

$$d(c,F) = \|c - p(c)\| = \|q(c)\|$$

et d'après l'expression de q donnée plus haut

$$q(c) = \frac{6}{4}\cdot(1,1,1,1) - \frac{2}{4}\cdot(1,-1,1,-1) = (1,2,1,2).$$

Comme la base canonique est orthonormée,

$$d(c,F) = \sqrt{1^2+2^2+1^2+2^2} = \sqrt{10}.$$

Solution 32 pg23S4-c

Soient x et y, deux vecteurs de E ; $\lambda \in \mathbb{R}$, un scalaire. Développons

$$\big\|f(\lambda x + y) - \big[\lambda f(x) + f(y)\big]\big\|^2.$$

Par bilinéarité et symétrie du produit scalaire, on trouve

$$\begin{aligned}\big\|f(\lambda x + y)\big\|^2 + \big\|\lambda f(x)\big\|^2 + \big\|f(y)\big\|^2 \\ - 2\lambda\,\langle\, f(\lambda x + y) \,|\, f(x)\,\rangle - 2\,\langle\, f(\lambda x + y) \,|\, f(y)\,\rangle + 2\lambda\,\langle\, f(x) \,|\, f(y)\,\rangle.\end{aligned}$$

Comme la norme est absolument homogène et que f conserve le produit scalaire (et donc aussi la norme), cette expression devient

$$\begin{aligned}\|\lambda x + y\|^2 + \lambda^2\|x\|^2 + \|y\|^2 \\ - 2\lambda\,\langle\, \lambda x + y \,|\, x\,\rangle - 2\,\langle\, \lambda x + y \,|\, y\,\rangle - 2\lambda\,\langle\, x \,|\, y\,\rangle\end{aligned}$$

et en finissant de développer, on finit par trouver que cette expression est nulle, ce qui nous inscrit dans la prestigieuse lignée du Savant Cosinus.

Bon, bref : on a démontré que le vecteur

$$f(\lambda x + y) - \big[\lambda f(x) + f(y)\big]$$

était nul (quels que soient x, y et λ) et donc que f était bien linéaire.

Solution 33 pg23S4-d

✍ *La condition signifie que l'angle formé par les vecteurs x_i et x_j est obtus.*
Il s'agit donc de démontrer que, dans un espace euclidien de dimension n, le cardinal d'une famille obtusangle *est inférieur à $(n+1)$.*

Nous allons procéder par récurrence sur la dimension de E.

❧ **Initialisation**
Si $\dim E = 1$, alors il existe un vecteur a *unitaire* tel que $E = \mathbb{R}\cdot a$ et il existe trois scalaires λ_1, λ_2 et λ_3 tels que

$$x_1 = \lambda_1 a, \quad x_2 = \lambda_2 a, \quad x_3 = \lambda_3 a.$$

Comme le vecteur a est unitaire,

$$\forall\, i \neq j, \quad \langle\, x_i \,|\, x_j\,\rangle = \lambda_i\lambda_j < 0.$$

Il n'y a que deux signes possibles pour un réel. Par conséquent, parmi les trois réels λ_1, λ_2 et λ_3, il y en a nécessairement deux de même signe, ce qui contredit l'hypothèse sur les produits scalaires.

❧ **HR**
On suppose qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que : dans un espace euclidien de dimension n, le cardinal d'une famille obtusangle est inférieur à $(n+1)$.

On vient de vérifier que l'hypothèse de récurrence était vraie pour $n = 1$.

❧ **Itération**
Supposons qu'il existe une famille obtusangle $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n+2}$ dans un espace euclidien E de dimension $(n+2)$.
En particulier, le vecteur x_{n+2} n'est pas nul (sinon $\langle y \,|\, x_{n+2}\rangle = 0$ quel que soit le vecteur $y \in E$). Nous pouvons donc définir

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n+1, \quad y_k = x_k - \frac{\langle x_k \,|\, x_{n+2}\rangle}{\|x_{n+2}\|^2}\cdot x_{n+2}.$$

La famille $(y_k)_{0\leqslant k\leqslant n+1}$ est une famille de $(n+2)$ vecteurs appartenant tous au sous-espace

$$F = (\mathbb{R}\cdot x_{n+2})^\perp,$$

qui est de dimension $\dim E - 1 = n$ (on aura reconnu l'expression de la projection orthogonale sur la droite $\mathbb{R}\cdot x_{n+2}$).
Quels que soient les indices $k \neq \ell$ entre 0 et $(n+1)$,

$$\langle y_k \,|\, y_\ell\rangle = \langle x_k \,|\, x_\ell\rangle - \frac{\langle x_k \,|\, x_{n+2}\rangle\,\langle x_\ell \,|\, x_{n+2}\rangle}{\|x_{n+2}\|^2}.$$

Or $\langle x_k \,|\, x_\ell\rangle < 0$, $\langle x_k \,|\, x_{n+2}\rangle < 0$ et $\langle x_\ell \,|\, x_{n+2}\rangle < 0$, donc

$$\langle y_k \,|\, y_\ell\rangle < 0$$

(en tant que somme de réels strictement négatifs).
Il existerait donc une famille obtusangle de $(n+2)$ vecteurs dans un espace de dimension n, ce qui est impossible par **HR**.
❧ On a ainsi démontré par récurrence que le cardinal d'une famille obtusangle dans un espace euclidien E est toujours majoré par $1 + \dim E$.

✍ *Les trois racines cubiques de l'unité donnent un exemple simple de famille obtusangle de cardinal $(n+1) = 3$ dans un espace euclidien de dimension $n = 2$.*
On peut s'en inspirer pour trouver une famille obtusangle de cardinal 4 dans un espace euclidien de dimension 3 (penser à une molécule de méthane — pardon, aux segments qui relient les sommets d'un tétraèdre régulier au centre de ce tétraèdre).

Solution 34 pg23S5-c

✍ *On note $f_*(A)$, l'image (directe) de l'ensemble A par l'application f :*

$$y \in f_*(A) \iff \exists\, x \in A, \quad y = f(x)$$

c'est-à-dire

$$f_*(A) = \big\{f(x),\ x \in A\big\}.$$

❧ Par hypothèse, F est un sous-espace de E et, d'après le cours, $F^\perp$ est aussi un sous-espace de E.
On sait que l'image d'un sous-espace de E par un endomorphisme de E est encore un sous-espace de E, donc $f_*(F^\perp)$ et $\big(f_*(F)\big)^\perp$ sont des sous-espaces de E.
❧ Comme E est un espace euclidien, on sait que

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp = \big(f_*(F)\big) \overset{\perp}{\oplus} \big(f_*(F)\big)^\perp$$

et en particulier que

$$\dim F^\perp = \operatorname{codim} F \quad \text{et} \quad \dim\big(f_*(F)\big)^\perp = \operatorname{codim} f_*(F).$$

❧ Pour tout endomorphisme f et tout sous-espace F de E,

$$\dim f_*(F) \leqslant \dim F$$

(puisque l'image par f d'une base de F est une famille génératrice de $f_*(F)$).
Si l'endomorphisme f est injectif, alors l'image d'une base de F est une famille libre (et toujours génératrice) de $f_*(F)$, donc

$$\dim f_*(F) = \dim F.$$

Comme une isométrie vectorielle est en particulier une application linéaire et injective, on sait donc que

$$\operatorname{codim} f_*(F) = \operatorname{codim} F$$

et aussi que

$$\dim f_*(F^\perp) = \dim F^\perp.$$

On en déduit que

$$\dim\big(f_*(F)\big)^\perp = \dim f_*(F^\perp).$$

❧ Pour prouver que les deux sous-espaces $f_*(F^\perp)$ et $\big(f_*(F)\big)^\perp$ sont égaux, il ne reste donc qu'à vérifier que l'un est contenu dans l'autre.

Considérons $x \in f_*(F^\perp)$: il existe donc un vecteur $u \in F^\perp$ tel que $x = f(u)$. Pour tout vecteur $y \in f_*(F)$, il existe un vecteur $v \in F$ tel que $y = f(v)$ et

$$\langle x \,|\, y \rangle = \big\langle f(u) \,\big|\, f(v) \big\rangle = \langle u \,|\, v \rangle$$

(puisque f est une isométrie vectorielle). Mais $u \in F^\perp$ et $v \in F$, donc

$$\langle x \,|\, y \rangle = \langle u \,|\, v \rangle = 0,$$

ce qui prouve que tout vecteur $x \in f_*(F^\perp)$ est orthogonal au sous-espace $f_*(F)$. Autrement dit,

$$f_*(F^\perp) \subset \big(f_*(F)\big)^\perp.$$

❧ On a ainsi démontré que

$$f_*(F^\perp) = \big(f_*(F)\big)^\perp.$$

Solution 35 pg23S5-d

1. Par bilinéarité et symétrie,

$$\langle u+v \,|\, u-v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2 = 0$$

puisque les deux vecteurs u et v ont même norme.

2. Soient x et y, deux vecteurs non nuls. Alors les vecteurs

$$u = \frac{x}{\|x\|} \quad \text{et} \quad v = \frac{y}{\|y\|}$$

sont unitaires. D'après la question précédente, les vecteurs $u+v$ et $u-v$ sont orthogonaux et, par hypothèse sur f, les vecteurs $f(u+v)$ et $f(u-v)$ sont orthogonaux.

❧ Par linéarité de f, par bilinéarité et symétrie du produit scalaire, on a donc

$$0 = \big\langle f(u+v) \,\big|\, f(u-v) \big\rangle = \big\|f(u)\big\|^2 - \big\|f(v)\big\|^2.$$

Comme $\|f(u)\|$ et $\|f(v)\|$ sont deux réels positifs, on en déduit que

$$\big\|f(u)\big\| = \big\|f(v)\big\|.$$

Par linéarité de f et absolue homogénéité de la norme,

$$\frac{\big\|f(x)\big\|}{\|x\|} = \frac{\big\|f(y)\big\|}{\|y\|}.$$

Cette égalité (= une relation de proportionnalité en fait) étant vraie quels que soient les vecteurs non nuls x et y, on en déduit qu'il existe un réel α (forcément positif !) tel que

$$\forall\, x \neq 0_E, \qquad \big\|f(x)\big\| = \alpha\,\|x\|.$$

❧ Par linéarité de f, il est clair que cette relation est encore vraie pour $x = 0_E$.

3. Si $\alpha = 0$, alors f est l'application nulle et on peut choisir $g = I_E$.

❧ Si $\alpha > 0$, alors l'endomorphisme $g = \frac{1}{\alpha} \cdot f$ est une isométrie vectorielle puisque

$$\forall\, x \in E, \quad \big\|g(x)\big\| = \Big\|\frac{1}{\alpha} \cdot f(x)\Big\| = \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha\|x\| = \|x\|$$

(par absolue homogénéité de la norme).

❧ Dans tous les cas, il existe bien une isométrie $g \in O(E)$ telle que $f = \alpha \cdot g$. (Mais seul le cas $f \neq \omega_E$ est vraiment intéressant d'un point de vue géométrique.)

Solution 36 pg23S5-e

Comme E est un espace vectoriel de dimension finie,

$$\dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Im} u = \dim E = \dim \operatorname{Ker} u^* + \dim \operatorname{Im} u^*$$

(Théorème du rang appliqué aux endomorphismes u et u^*) et d'autre part

$$\dim(\operatorname{Im} u)^\perp = \operatorname{codim} \operatorname{Im} u \quad \text{et} \quad \dim(\operatorname{Ker} u)^\perp = \operatorname{codim} \operatorname{Ker} u$$

puisque

$$E = \operatorname{Ker} u \overset{\perp}{\oplus} (\operatorname{Ker} u)^\perp = \operatorname{Im} u \overset{\perp}{\oplus} (\operatorname{Im} u)^\perp.$$

❧ Soient $x \in \operatorname{Ker} u^*$ et $y \in \operatorname{Im} u$: il existe $z \in E$ tel que $y = u(z)$ et

$$\langle x \,|\, y \rangle = \big\langle x \,\big|\, u(z) \big\rangle = \big\langle u^*(x) \,\big|\, z \big\rangle = \langle 0_E \,|\, z \rangle = 0.$$

Cela prouve que

$$\operatorname{Ker} u^* \subset (\operatorname{Im} u)^\perp.$$

Réciproquement, soit $x \in (\operatorname{Im} u)^\perp$. Alors

$$\forall\, y \in E, \quad \big\langle u^*(x) \,\big|\, y \big\rangle = \big\langle x \,\big|\, \underbrace{u(y)}_{\in \operatorname{Im} u} \big\rangle = 0.$$

Le seul vecteur de E orthogonal à tous les autres est le vecteur nul, donc $u^*(x) = 0_E$. On vient ainsi de démontrer que

$$(\operatorname{Im} u)^\perp \subset \operatorname{Ker} u^*$$

et donc (par double inclusion) que

$$(\operatorname{Im} u)^\perp = \operatorname{Ker} u^*.$$

❧ Puisque l'égalité précédente a été établie pour *tous* les endomorphismes de E, elle est en particulier vraie pour l'adjoint u^* :

$$\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker}(u^*)^* = (\operatorname{Im} u^*)^\perp$$

et comme E est un espace euclidien,

$$\operatorname{Im} u^* = \big[(\operatorname{Im} u^*)^\perp\big]^\perp = (\operatorname{Ker} u)^\perp.$$

✍ *Cette seconde propriété aurait aussi pu être démontrée par double inclusion.*

❧ *Si $x \in \operatorname{Im} u^*$, alors il existe $y \in E$ tel que $x = u^*(y)$ et*

$$\forall\, z \in \operatorname{Ker} u, \quad \langle x \,|\, z \rangle = \big\langle u^*(y) \,\big|\, z \big\rangle = \big\langle y \,\big|\, u(z) \big\rangle = \langle y \,|\, 0_E \rangle = 0$$

donc $\operatorname{Im} u^* \subset (\operatorname{Ker} u)^\perp$.

❧ *Réciproquement, quels que soient les sous-espaces vectoriels A et B,*

$$A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$$

et comme E est un espace euclidien (dimension finie !), on en déduit que

$$B^\perp \subset A^\perp \implies B = (B^\perp)^\perp \subset (A^\perp)^\perp = A.$$

Autrement dit, dans un espace euclidien (mais pas dans un espace préhilbertien de dimension quelconque),

$$A \subset B \iff B^\perp \subset A^\perp.$$

Nous allons donc démontrer que

$$(\operatorname{Ker} u)^\perp \subset \operatorname{Im} u^*$$

en vérifiant que

$$(\operatorname{Im} u^*)^\perp \subset \operatorname{Ker} u.$$

Quels que soient les vecteurs $x \in (\operatorname{Im} u^*)^\perp$ et $y \in E$,

$$0 = \big\langle x \,\big|\, \underbrace{u^*(y)}_{\in \operatorname{Im} u^*} \big\rangle = \big\langle u(x) \,\big|\, y \big\rangle.$$

Le vecteur $u(x)$ est donc orthogonal à tous les vecteurs $y \in E$, donc $u(x) = 0_E$, c'est-à-dire $x \in \operatorname{Ker} u$.

Solution 37 rl25S4-a

1.

✍ *Même s'il ne faut pas se servir systématiquement de cette formule (trop lourde pour être efficace en général !),* ***il faut savoir*** *que*

$$\langle A \,|\, B \rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j}.$$

On doit savoir que toute matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique en somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique :

$$M = \underbrace{\frac{1}{2}(M+M^\top)}_{\in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\frac{1}{2}(M-M^\top)}_{\in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})}.$$

✍ *On retrouve cette décomposition, ainsi que la preuve de l'unicité de cette décomposition, par analyse et synthèse : on suppose que $M = S + A$, on transpose (pour exploiter les hypothèses de symétrie/antisymétrie) et on résout le système d'inconnues S et A.*

Autrement dit,

$$\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$

Il reste à démontrer que ces deux sous-espaces vectoriels sont orthogonaux.

❧ Quelles que soient les matrices $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\langle S \,|\, A \rangle &= \operatorname{tr}(S^\top.A) = \operatorname{tr}(S.A) \\
&= \langle A \,|\, S \rangle && \text{(symétrie du produit scalaire)} \\
&= \operatorname{tr}(A^\top.S) = \operatorname{tr}(-A.S) = -\operatorname{tr}(A.S) \\
&= -\operatorname{tr}(S.A) && \text{(propriété bien connue de la trace)}
\end{aligned}$$

et par conséquent $\langle S \,|\, A \rangle = 0$.

Ainsi,

$$\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

ce qui prouve que

$$\left[\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\right]^\perp = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

et que

$$\left[\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\right]^\perp = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

✍ *On sait que la transposition est une symétrie : c'est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et*

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad ({}^\top M^\top) = M.$$

De plus, quelles que soient les matrices A et B de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\langle A^\top \,|\, B \rangle = \operatorname{tr}(A.B) = \operatorname{tr}(B.A) = \langle B^\top \,|\, A \rangle = \langle A \,|\, B^\top \rangle$$

(en utilisant la propriété bien connue de la trace et la symétrie du produit scalaire).

Cela signifie que la transposition est un endomorphisme auto-adjoint et donc en fait une symétrie orthogonale.

Et c'est pour cette raison que ses deux sous-espaces propres sont supplémentaires et orthogonaux !

2. L'espace $D_n(\mathbb{R})$ des matrices diagonales est engendré par les matrices $E_{k,k}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$, donc

$$A \in [D_n(\mathbb{R})]^\perp \iff \forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \langle A \,|\, E_{k,k} \rangle = 0.$$

Or, quelle que soit la matrice A,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \langle A \,|\, E_{k,k} \rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}.(\delta_{i,k}\delta_{j,k}) = a_{k,k}$$

donc la matrice A est orthogonale au sous-espace $D_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, tous les coefficients diagonaux de A sont nuls.

3. D'après l'expression développée du produit scalaire,

$$\Phi(M) = \|A - M\|^2.$$

Par conséquent,

$$\inf_{M\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \Phi(M) = d\big(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\big)$$

et on sait que le projeté orthogonal S_A de A sur le sous-espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est l'unique matrice $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\Phi(M) = d\big(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\big).$$

Autrement dit, cette borne inférieure est en fait un minimum et ce minimum est égal à $\Phi(S_A)$, c'est-à-dire à $\|A - S_A\|^2$.

La décomposition de S dans la somme directe orthogonale

$$\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

(rappelée plus haut) nous assure alors que

$$S_A = \frac{1}{2}(A + A^\top)$$

et donc que

$$A - S_A = \frac{1}{2}(A - A^\top).$$

Finalement,

$$\min_{M\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \Phi(M) = \frac{1}{4}\|A - A^\top\|^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{i,j} - a_{j,i})^2.$$

Solution 38 rl25S4-b

1.

✍ *Le sous-espace F est défini à l'aide de deux formes linéaires non proportionnelles. C'est donc l'intersection de deux hyperplans distincts et comme c'est un sous-espace d'un espace de dimension 4, la dimension de F est égale à 2.*

Si on n'apprécie pas ce type de raisonnement, on peut aussi considérer que F est l'ensemble des solutions d'un système linéaire de deux équations en quatre inconnues ; résoudre ce système (en introduisant deux paramètres) et en déduire une base de F (constituée de deux vecteurs).

Comme ce système est triangulaire, la résolution est très rapide.

Le quadruplet (x_1, x_2, x_3, x_4) est une solution du système

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ \quad 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

si, et seulement si, il existe deux paramètres réels s et t tels que

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ \quad 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \quad\quad x_2 \quad\quad = s \\ \quad\quad\quad\quad x_4 = t \end{cases}$$

c'est-à-dire tels que

$$\begin{cases} x_1 = -4s - 2t \\ x_2 = \quad s \\ x_3 = -2s - \quad t \\ x_4 = \quad\quad t. \end{cases}$$

Une base de F est donc constituée (par exemple) des vecteurs

$$e_1 = (-4, 1, -2, 0), \qquad e_2 = (-2, 0, -1, 1).$$

D'après le cours, pour calculer la distance du vecteur y au plan F, il faut déterminer le projeté orthogonal x de y sur F et en déduire

$$d(y,F) = \|y-x\| = \sqrt{\langle y \,|\, y-x\rangle}.$$

D'après le cours, le projeté orthogonal x est l'unique vecteur $x \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$x \in F \qquad \text{et} \qquad (y-x) \in F^\perp.$$

La représentation cartésienne de F nous dit que

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4) \in F \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

et la connaissance d'une base (e_1,e_2) de F nous dit que

$$(y-x) \in F^\perp \iff \begin{cases} \langle x \,|\, e_1\rangle = \langle y \,|\, e_1\rangle \\ \langle x \,|\, e_2\rangle = \langle y \,|\, e_2\rangle, \end{cases}$$

ce système étant équivalent au système

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 - 2x_3 = -5 \\ -2x_1 - x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$$

Il nous reste alors à résoudre le système suivant.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -4x_1 + x_2 - 2x_3 = -5 \\ -2x_1 - x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$$

On trouve

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{13}(12,-5,6,4)$$

donc

$$y-x = \frac{1}{13}(1,18,7,9)$$

et finalement

$$d(y,F) = \sqrt{\langle y \,|\, y-x\rangle} = \sqrt{\frac{35}{13}}.$$

✍ *Il vaut mieux éviter de terminer le calcul de manière naïve ! En effet,*

$$d(y,F) = \|y-x\| = \frac{\sqrt{455}}{13},$$

ce qui résulte d'un calcul plus compliqué et qui n'est pas clairement simplifiable...

✍ *Variante un peu plus savante et moins pénible (pas de système 4x4 à résoudre).*
Les deux équations qui caractérisent le sous-espace F peuvent s'interpréter comme des produits scalaires (nuls). Elles nous donnent deux vecteurs

$$e_3=(1,2,-1,1) \qquad \text{et} \qquad e_4=(0,2,1,1)$$

qui sont orthogonaux à F. Ce sont deux vecteurs non proportionnels de $F^\perp$ et comme $F^\perp$ est un plan, ces deux vecteurs constituent une base de $F^\perp$.
La condition $(y-x) \in F^\perp$ se traduit alors par l'existence de deux scalaires α et β tels que

$$y-x = \alpha \cdot e_3 + \beta \cdot e_4$$

et donc tels que

$$x = y - \alpha \cdot e_3 - \beta \cdot e_4 = (1-\alpha, 1-2\alpha-2\beta, 1+\alpha-\beta, 1-\alpha-\beta).$$

On peut alors déterminer les valeurs de α et β au moyen des équations qui caractérisent F (le vecteur x doit appartenir à F) :

$$\begin{cases} 3 - 7\alpha - 4\beta = 0 \\ 4 - 4\alpha - 6\beta = 0. \end{cases}$$

On trouve $\alpha = 1/13$ et $\beta = 8/13$, donc

$$y - x = \frac{1}{13}\cdot e_3 + \frac{8}{13}\cdot e_4 = \frac{1}{13}(1,18,7,9)$$

et on retrouve bien que

$$d(y,F) = \sqrt{\frac{35}{13}}.$$

2. Pour trouver une base orthonormée de F, on commence par calculer une base orthogonale qu'il suffira de normaliser pour conclure.

❧ **Première méthode.**
On connaît déjà une base de F : (e_1, e_2) et il vaut mieux partir de la base

$$(e_1', e_2) = (e_1 - 2e_2, e_2) = \big((0,1,0,-2),\ (-2,0,-1,1)\big)$$

qui est plus simple. Il reste alors à suivre la méthode de Gram & Schmidt en cherchant un vecteur

$$e_2' = e_2 + t\cdot e_1' = (-2, t, -1, 1-2t) \in F$$

qui soit orthogonal au vecteur e_1' :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ t \\ -1 \\ 1-2t \end{pmatrix} = 5t - 2 = 0$$

donc $t = 2/5$ et

$$e_2' = \frac{1}{5}\cdot(-10,2,-5,1).$$

❧ **Deuxième méthode.**
On part d'un vecteur de F, par exemple e_1' (qu'il est facile de deviner sur les équations cartésiennes) et on cherche un vecteur de F (deux équations cartésiennes à vérifier) qui soit orthogonal à e_1' (une troisième équation cartésienne). Il s'agit alors de résoudre le système linéaire suivant.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

En s'armant de courage, on trouve

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4\cdot(-10,2,-5,1).$$

❧ Quelle que soit la méthode retenue, une base orthonormée de F est donc par exemple constituée des vecteurs

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot(0,1,0,-2) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{130}}\cdot(10,-2,5,-1).$$

Solution 39 — Off2017-94b

1. Comme $v \neq 0_E$, il existe une base $\mathscr{B}$ de E de la forme

$$\mathscr{B} = (v, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$$

(Théorème de la base incomplète appliqué à la famille libre (v)).

De même, comme la colonne

$$C_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

n'est pas la colonne nulle, il existe une matrice inversible Q de la forme

$$Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \star \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_n & \cdots & \star \end{pmatrix}.$$

Comme la matrice Q est inversible, il existe une base $\mathscr{C} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que

$$\mathfrak{Mat}(\mathscr{B} \to \mathscr{C}) = Q^{-1} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mathfrak{Mat}(\mathscr{C} \to \mathscr{B}) = Q.$$

Par définition de la matrice de passage, la première colonne de Q donne les coordonnées du premier vecteur de $\mathscr{B}$ dans la base $\mathscr{C}$, donc

$$v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k.$$

2. D'après le Théorème de la base orthonormée incomplète, on peut supposer dans ce qui précède que les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont des bases orthogonales : les familles libres (v) et (C_1) étant orthogonales, on peut les compléter en bases orthogonales.

❧ Si on exige que la base $\mathscr{C}$ soit une base orthonormée, il faut alors que

$$\|v\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2.$$

Cette condition nécessaire est aussi une condition suffisante : en effet, si

$$\|v\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2,$$

alors les familles

$$\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{C_1}{\|v\|}\right)$$

sont des familles orthonormées et le Théorème de la base orthonormée incomplète nous assure qu'il existe une base orthonormée de la forme

$$\mathscr{B}' = \left(\frac{v}{\|v\|}, \varepsilon_2', \dots, \varepsilon_n'\right)$$

et une matrice orthogonale de la forme

$$Q = \begin{pmatrix} \lambda_1/\|v\| & \cdots & \star \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_n/\|v\| & \cdots & \star \end{pmatrix}.$$

Comme la matrice Q est orthogonale et que la base $\mathscr{B}'$ est orthonormée, il existe donc une base orthonormée $\mathscr{C}' = (e_k')_{1 \leqslant k \leqslant n}$ telle que

$$\mathfrak{Mat}(\mathscr{B}' \to \mathscr{C}') = Q^{-1} = Q^{\top} \in O_n(\mathbb{R}).$$

Comme plus haut, on en déduit que

$$\frac{v}{\|v\|} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\|v\|} \cdot e_k'$$

et donc que

$$v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot e_k'.$$

Solution 40 — Off2017-100b

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. S'il existe deux polynômes P et Q tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(\cos x) = \cos nx = Q(\cos x),$$

alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (P - Q)(\cos x) = 0.$$

Comme cos est une surjection de $\mathbb{R}$ sur $[-1, 1]$, on en déduit que

$$\forall u \in [-1, 1], \quad (P - Q)(u) = 0.$$

Comme le polynôme $P - Q$ admet une infinité de racines, on en déduit que $P = Q$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe donc *au plus un* polynôme T_n tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos x) = \cos nx.$$

❧ Il est clair que $T_0 = 1$ et $T_1 = X$ conviennent :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad \cos 0x = 1 \quad\text{et}\quad \cos 1x = \cos x.$$

Supposons que, pour un entier $n \geqslant 1$, il existe deux polynômes T_n et T_{n-1} tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad T_n(\cos x) = \cos nx \quad\text{et}\quad T_{n-1}(\cos x) = \cos(n-1)x.$$

D'après les formules d'addition, quel que soit $x \in \mathbb{R}$,

$$2\cos x \cos nx = \cos(n+1)x + \cos(n-1)x$$

donc

$$\cos(n+1)x = 2\cos x\, T_n(\cos x) - T_{n-1}(\cos x).$$

Cela prouve que le polynôme

$$T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$$

vérifie bien

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad T_{n+1}(\cos x) = \cos(n+1)x.$$

On a ainsi démontré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un (unique !) polynôme T_n tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad T_n(\cos x) = \cos nx.$$

On a en particulier établi la relation de récurrence suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}.$$

❧ On sait déjà que $\deg T_0 = 0$ et que $\deg T_1 = 1$.
En supposant que $\deg T_n = n$ et $\deg T_{n-1} = n-1$ pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$, on déduit de la relation de récurrence que

$$T_{n+1} = \underbrace{2XT_n}_{}\, n + 1 - \underbrace{T_{n-1}}_{}\, n - 1$$

et donc que

$$\deg T_{n+1} = n+1.$$

On a démontré par récurrence que $\deg T_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

✍ *On aura reconnu les polynômes de Tchebychev.*

2. La fonction

$$f_0 = \left[t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right]$$

est continue sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$. En tant que dérivée de la fonction Arcsin, qui est continue sur le segment $[-1,1]$, la fonction f_0 admet une primitive qui tend vers une limite finie aussi bien au voisinage de -1 qu'au voisinage de 1. Par conséquent, l'intégrale généralisée

$$\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

est convergente.
Comme la fonction f_0 est positive sur $]-1,1[$, on en déduit que f_0 est intégrable sur $]-1,1[$.
Le produit PQ est continu sur le segment $[-1,1]$ (fonction polynomiale !), donc il est borné.
En tant que produit d'une fonction intégrable par une fonction continue et bornée, l'expression

$$\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$$

est intégrable sur $]-1,1[$, donc $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est bien une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.
❧ Il est clair que l'application $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est bilinéaire, symétrique et positive (intégration bornes croissantes d'une fonction positive).
Si $\langle P|P\rangle = 0$, alors

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = 0.$$

On intègre ici une fonction *positive* et *continue* sur $]-1,1[$, et l'intégrale est nulle, donc

$$\forall\, t \in]-1,1[, \quad \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} = 0.$$

On en déduit que $P(t) = 0$ pour tout $t \in]-1,1[$ et donc que $P = 0_E$ (seul le polynôme nul admet une infinité de racines).
Donc $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur E.

3. Tout d'abord, la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$ puisqu'elle est échelonnée en degré au sens où

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \deg T_n = n.$$

❧ On sait que la fonction $\varphi = \operatorname{Arccos}$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ (et décroissante) de l'intervalle $]0,\pi[$ sur l'intervalle $]-1,1[$, que

$$\forall\, t \in]-1,1[, \quad \cos\varphi(t) = \cos\operatorname{Arccos} t = t$$

et que

$$\forall\, t \in]-1,1[, \quad \operatorname{Arccos}'(t) = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

❧ Soient P et Q, deux polynômes fixés. On sait que la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} = P\big(\cos\underbrace{[\varphi(t)]}_{\theta}\big)Q\big(\cos[\varphi(t)]\big)\cdot\big|\varphi'(t)\big| \right]$$

est intégrable sur $]-1,1[$. On déduit du Théorème de changement de variable que la fonction

$$[\theta \mapsto P(\cos\theta)Q(\cos\theta)]$$

est intégrable sur $]0,\pi[$ (ce n'est pas une surprise : il s'agit ici d'une fonction continue sur le segment $[0,\pi]$!) et que

$$\int_{]0,\pi[} P(\cos\theta)Q(\cos\theta)\,d\theta = \int_{]-1,1[} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

Autrement dit, quels que soient les polynômes P et Q,

$$\langle P \,|\, Q \rangle = \int_0^\pi P(\cos\theta)Q(\cos\theta)\,d\theta.$$

❧ En particulier, pour $0 \leqslant m < n$,

$$\langle T_m \,|\, T_n \rangle = \int_0^\pi \cos m\theta \cos n\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta\,d\theta = 0$$

puisque les pulsations $(n+m)$ et $(n-m)$ sont strictement positives.
Cela prouve que la base $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une base orthogonale.

❧ Pour $m = n \geqslant 1$, on a cette fois

$$\langle T_n \,|\, T_n \rangle = \frac{1}{2}\int_0^\pi 1 + \cos 2n\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2}$$

et

$$\langle T_0 \,|\, T_0 \rangle = \int_0^\pi d\theta = \pi.$$

Donc la base $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une base orthonormée.

Solution 41 — Off2017-191

1. On suppose que, quel que soit le vecteur $y \in E$,

$$\lim_{n\to+\infty} \langle x_n - \ell_1 \,|\, y \rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle x_n - \ell_2 \,|\, y \rangle = 0.$$

Par linéarité à gauche,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \langle x_n - \ell_1 \,|\, y \rangle - \langle x_n - \ell_2 \,|\, y \rangle = \langle \ell_2 - \ell_1 \,|\, y \rangle$$

et donc

$$\forall\, y \in E, \quad \langle \ell_2 - \ell_1 \,|\, y \rangle = 0.$$

Dans un espace préhilbertien, le seul vecteur orthogonal à tous les autres est le vecteur nul, donc $\ell_2 = \ell_1$.

2. On suppose que

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - \ell\| = 0.$$

D'après l'inégalité de Schwarz,

$$\forall\, y \in E,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\quad \big|\langle x_n - \ell \,|\, y\rangle\big| \leqslant \|x_n - \ell\|\,\|y\|$$

donc, par encadrement,

$$\forall\, y \in E,\quad \lim_{n\to+\infty} \langle x_n - \ell \,|\, y\rangle = 0.$$

3. Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers ℓ, on vient de prouver qu'elle converge aussi faiblement vers ℓ et le cours nous dit que

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - \ell\| = 0.$$

❧ Réciproquement, supposons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers ℓ. Alors, pour $y = \ell \in E$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \langle x_n - \ell \,|\, \ell\rangle = 0$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty} \langle x_n \,|\, \ell\rangle = \|\ell\|^2.$$

Par ailleurs, si $\|x_n\|$ converge vers $\|\ell\|$, alors

$$\|\ell - x_n\|^2 = \|\ell\|^2 + \|x_n\|^2 - 2\langle \ell \,|\, x_n\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|\ell\|^2 + \|\ell\|^2 - 2\|\ell\|^2 = 0$$

ce qui signifie que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers ℓ.

4. Si E est un espace euclidien, il admet une base orthonormée $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant d}$.
Si la suite de vecteurs $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $\ell \in E$, alors en particulier

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant d,\quad \lim_{n\to+\infty} \langle x_n - \ell \,|\, e_k\rangle = 0.$$

Mais puisque la base $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant d}$ est ORTHONORMÉE,

$$\|x_n - \ell\|^2 = \sum_{k=1}^{d} \langle x_n - \ell \,|\, e_k\rangle^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers ℓ.

Il n'y a donc pas de différence entre *convergence forte* et *convergence faible* en dimension finie.

✍ *Si $E = \mathbb{R}[X]$ est muni d'un produit scalaire, on peut considérer la base orthonormée $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ déduite de la base canonique par l'algorithme de Gram-Schmidt.*

L'inégalité de Bessel (variante moderne du Théorème de Pythagore) nous dit que

$$\forall\, x \in E,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\quad \sum_{k=0}^{n} \langle x \,|\, e_k\rangle^2 \leqslant \|x\|^2$$

et en particulier que

$$\forall\, x \in E,\quad \lim_{n\to+\infty} \langle x \,|\, e_k\rangle = 0.$$

Cela signifie que la suite $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers le vecteur nul.

Comme il s'agit d'une suite de vecteurs unitaires *et que le vecteur nul n'est pas unitaire, la suite $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge pas fortement vers le vecteur nul. Nous venons ainsi de prouver que les deux notions de convergence diffèrent en dimension infinie.*

(Autre bizarrerie : la suite $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ n'a aucune valeur d'adhérence, alors même qu'elle est bornée...)

Solution 42 **Off2017-201a**

1. On peut se contenter de remarquer que

$$\forall\, P \in E, \quad \varphi(P) = \int_{-1}^{1} 1 \cdot P(t)\, dt = \langle\, 1 \,|\, P \,\rangle .$$

Cela prouve que φ est bien une application de E dans $\mathbb{R}$ et, par bilinéarité du produit scalaire, φ est une forme linéaire sur E.

❧ En particulier, $\varphi(1) = 2 \neq 0$, donc la forme linéaire φ n'est pas identiquement nulle. Par conséquent, elle est surjective :

$$\operatorname{Im} \varphi = \mathbb{R}, \qquad \operatorname{rg} \varphi = 1$$

et son noyau est un hyperplan de E.

Puisque nous avons déjà, de fait, appliqué le Théorème de représentation de Riesz, il est clair que

$$\operatorname{Ker} \varphi = (\mathbb{R} \cdot 1)^{\perp}.$$

Comme E est un espace de dimension **finie**,

$$(\operatorname{Ker} \varphi)^{\perp} = \mathbb{R} \cdot 1 = \mathbb{R}_0[X].$$

2. Comme φ est une forme linéaire, on peut considérer que φ est à valeurs dans le sous-espace $\mathbb{R}_0[X]$ des polynômes constants et donc aussi à valeurs dans E.

Dans ces conditions,

$$f_a = I_E + 2a\varphi$$

est un endomorphisme de E (en tant que combinaison linéaire de deux endomorphismes).

❧ Quels que soient les polynômes P et Q, par bilinéarité du produit scalaire,

$$\begin{aligned} \left\langle\, g_a(P) \,\middle|\, Q \,\right\rangle &= \langle\, P \,|\, Q \,\rangle + 2a\varphi(P)\, \langle\, 1 \,|\, Q \,\rangle \\ &= \langle\, P \,|\, Q \,\rangle + 2a\varphi(P)\varphi(Q) \\ &= \left\langle\, P \,\middle|\, Q + 2a\varphi(Q) \,\right\rangle = \left\langle\, P \,\middle|\, g_a(Q) \,\right\rangle \end{aligned}$$

donc g_a est un endomorphisme auto-adjoint.

3. Dans le cas particulier $n = 3$,

$$\varphi(1) = 2, \quad \varphi(X) = 0, \quad \varphi(X^2) = 2/3, \quad \varphi(X^3) = 0$$

donc

$$\mathfrak{Mat}_{\text{can}}(g_a) = \begin{pmatrix} 1+4a & 0 & 4a/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice est triangulaire supérieure, donc elle est inversible si, et seulement si, ses coefficients diagonaux sont tous différents de 0. Ainsi, l'endomorphisme g_a est inversible si, et seulement si, $a \neq -1/4$.

✍ *Dans le cas général ($n \in \mathbb{N}^*$), comme g_a est un endomorphisme de E, espace vectoriel* ***de dimension finie****, g_a est inversible si, et seulement si, il est injectif.*

Il est clair que le noyau de g_a est contenu dans $\mathbb{R}_0[X]$:

$$g_a(P) = P + 2a\varphi(P) = 0 \implies P = -2a\varphi(P) \in \mathbb{R}_0[X].$$

Comme $g_a(1) = 1 + 4a$, la condition est la même : l'endomorphisme g_a est inversible si, et seulement si, $a \neq -1/4$.

✍ *On ne doit pas s'étonner que la matrice de g_a ne soit pas symétrique alors que l'endomorphisme g_a est auto-adjoint. En effet, le lien entre les endomorphismes auto-adjoints et les matrices symétriques n'existe* QUE DANS LES BASES ORTHONORMÉES *et la base canonique n'est pas une base orthonormée, même pas une base orthogonale :*

$$\langle\, 1 \,|\, X^2 \,\rangle = 2/3, \quad \langle\, X \,|\, X^3 \,\rangle = 2/5.$$

4. Comme φ est une forme linéaire, l'application

$$[P \mapsto 2a\varphi(P) \cdot X]$$

est une application linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}_1[X]$. Comme $n \geqslant 1$, l'application f_a est donc bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pas seulement pour $n = 3$).

❧ D'après les calculs précédents,

$$\mathfrak{Mat}_{can}(f_a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4a & 1 & 4a/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

❧ On reconnaît une matrice triangulaire par blocs :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \star & \star \\ 4a & 1 & \star & \star \\ & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc f_a est inversible si, et seulement si, les deux blocs diagonaux sont inversibles.

Comme les deux blocs diagonaux sont triangulaires et que leurs coefficients diagonaux sont tous différents de 0, c'est bien le cas : l'endomorphisme f_a est inversible.

❧ Comme on l'a remarqué plus haut, il ne suffit pas de constater que la matrice de g_a n'est pas symétrique pour en déduire que l'endomorphisme g_a n'est pas auto-adjoint (puisque la base canonique *n'est pas* une base orthonormée).

Quels que soient P et Q,

$$\begin{aligned} \langle f_a(P) \,|\, Q \rangle &= \langle P \,|\, Q \rangle + 2a \langle 1 \,|\, P \rangle \langle X \,|\, Q \rangle \\ &\overset{?}{=} \langle P \,|\, Q \rangle + 2a \langle X \,|\, P \rangle \langle 1 \,|\, Q \rangle = \langle P \,|\, f_a(Q) \rangle. \end{aligned}$$

Si f_a est auto-adjoint, alors en particulier (pour $P = 1$ et $Q = X$) :

$$2a \langle 1 \,|\, 1 \rangle \langle X \,|\, X \rangle = 2a \langle 1 \,|\, X \rangle \langle 1 \,|\, X \rangle.$$

Si $a = 0$, alors $g_a = I_E$ est évidemment auto-adjoint !

Si $a \neq 0$, alors il faut que

$$|\langle 1 \,|\, X \rangle| = \|1\| \, \|X\|$$

et donc que les vecteurs 1 et X soient colinéaires (cas d'égalité dans l'inégalité de Schwarz), ce qui est faux !

L'endomorphisme f_a est donc auto-adjoint si, et seulement si, $a = 0$.

✍ *On peut répondre de manière plus savante...*

Comme la matrice canonique est triangulaire par blocs et que les blocs diagonaux sont eux-mêmes triangulaires, les valeurs propres de f_a sont les coefficients diagonaux de la matrice. Le spectre de f_a est donc réduit à $\{1\}$.

D'après le Théorème spectral, si f_a est auto-adjoint, alors cet endomorphisme est diagonalisable.

Mais un endomorphisme diagonalisable qui n'a qu'une seule valeur propre est une homothétie, donc : si f_a est auto-adjoint, alors $f_a = I_E$ et donc $a = 0$.

Solution 43 — Off2017-207b

1. Comme P et Q sont des polynômes, on peut les assimiler à des applications de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc $\langle P \,|\, Q \rangle$ est bien défini.

Il est clair que $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire et symétrique sur E.

Quel que soit le polynôme P,

$$\langle P \,|\, P \rangle = \sum_{k=0}^{n} \left(P^{(k)}(1)\right)^2 \geqslant 0$$

en tant que somme de réels positifs et donc

$$\langle P \,|\, P \rangle = 0 \iff \forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad P^{(k)}(1) = 0.$$

D'après la formule de Taylor pour les polynômes de degré inférieur à n,

$$\forall\, P \in E, \qquad P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!} \cdot (X-1)^k.$$

Donc $\langle P \,|\, P \rangle = 0$ équivaut à $P = 0$. La forme bilinéaire $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ est donc définie positive.

Autrement dit, $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

2. On peut remarquer que

$$P \in F \iff \langle P \,|\, 1 \rangle = 0.$$

En effet, avec $Q = 1$, on a $Q^{(0)}(1) = 1$ et $Q^{(k)}(1) = 0$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$.

L'ensemble F est donc un sous-espace de E en tant que noyau de l'application linéaire

$$[P \mapsto \langle P \,|\, 1 \rangle].$$

Plus précisément, comme cette application linéaire est une forme linéaire non identiquement nulle (puisque $\langle 1 \,|\, 1 \rangle = 1 \neq 0$), le sous-espace F est un hyperplan de E et donc

$$\dim F = \dim E - 1 = n.$$

3. Comme E est un espace euclidien (dimension FINIE !), on déduit de la question précédente que

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp} = F \overset{\perp}{\oplus} (\mathbb{R} \cdot 1).$$

Comme le projeté orthogonal du monôme 1 sur le sous-espace F est le vecteur nul, le cours nous dit que

$$d(1, F) = \|1 - 0\| = \|1\| = 1.$$

✍ *Pour un polynôme quelconque $P \in E$, le projeté orthogonal de P sur la droite $F^{\perp}$ est le polynôme constant*

$$\frac{\langle P \,|\, 1 \rangle}{\langle 1 \,|\, 1 \rangle} \cdot 1 = P(1),$$

donc

$$P = \underbrace{(P - P(1))}_{\in F} + \underbrace{P(1)}_{\in F^{\perp}}.$$

Dans ce cas,

$$d(P, F) = \big\|P(1)\big\| = \big|P(1)\big| \, \|1\| = \big|P(1)\big|.$$

Solution 44 — Off2017-220a

✍ *Comme $\mathbb{R}^3$ est un espace euclidien, la projection orthogonale sur un sous-espace quelconque de $\mathbb{R}^3$ est bien définie.*

Comme $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique, le vecteur

$$\mathbf{u} = (1, -2, 1)$$

est un vecteur orthogonal au plan H :

$$\mathbf{x} = (x, y, z) \in H \iff \langle \mathbf{x} \,|\, \mathbf{u} \rangle = 0$$

et par conséquent

$$\mathbb{R}^3 = H \overset{\perp}{\oplus} (\mathbb{R} \cdot \mathbf{u})^{\perp}.$$

D'après le cours, le projeté orthogonal du vecteur $\mathbf{x} = (x, y, z)$ sur la droite $\mathbb{R} \cdot \mathbf{u}$ est le vecteur

$$\frac{\langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{u} \rangle} \cdot \mathbf{u} = \frac{x - 2y + z}{6} \cdot (1, -2, 1)$$

et le projeté orthogonal du vecteur $\mathbf{x}$ sur le plan H est donc le vecteur

$$p(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{x - 2y + z}{6} \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{6} \cdot (5x + 2y - z, \; 2x + 2y + 2z, \; -x + 2y + 5z).$$

La matrice relative à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur H est donc

$$\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

✍ *On remarque que cette matrice est symétrique, ce qui est normal (une projection orthogonale est un endomorphisme auto-adjoint et, ici, la base dans laquelle on le représente est bien une base orthonormée).*

On constate également que la trace de la matrice est égale à 2, ce qui est bien la dimension du sous-espace H sur lequel on projette.

Il est un peu plus long de vérifier que les colonnes appartiennent au sous-espace H et que le vecteur $\mathbf{u}$ appartient au noyau (puisque $C_1 - 2C_2 + C_3 = 0$).

Ces vérifications simples servent à nous donner confiance dans le résultat des calculs (ou éventuellement à détecter une erreur de calcul).

Solution 45 — Off2017-228a

1. Pour tout réel α, la fonction

$$f_\alpha = \left[t \mapsto t^\alpha e^{-t}\right]$$

est continue sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$.

Lorsque t tend vers 0,

$$f_\alpha(t) \sim t^\alpha.$$

On sait que la fonction $[t \mapsto t^\alpha]$ est intégrable au voisinage de 0 si, et seulement si, $\alpha > -1$. Donc f_α est intégrable au voisinage de 0 si, et seulement si, $\alpha > -1$.

Lorsque t tend vers $+\infty$,

$$f_\alpha(t) = t^\alpha e^{-t/2} \cdot e^{-t/2} = o(e^{-t/2}).$$

On sait que la fonction $\left[t \mapsto e^{-t/2}\right]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, donc la fonction f_α est intégrable au voisinage de $+\infty$ quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Par conséquent, f_α est intégrable sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, $\alpha > -1$ (et en particulier pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$).

2. Les expressions

$$f'(t)g(t) = (n+1)t^n \cdot (-e^{-t}) \quad \text{et} \quad f(t)g'(t) = t^{n+1} \cdot e^{-t}$$

sont intégrables sur $]0, +\infty[$ et le produit

$$f(t)g(t) = t^{n+1} \cdot (-e^{-t})$$

tend vers une limite finie (nulle !) lorsque t tend vers 0 et lorsque t tend vers $+\infty$.

✍ *Si on est vraiment décidé à bien travailler, il n'est pas difficile de vérifier avec soin et rigueur les conditions d'application de la formule d'intégration par parties : il suffit de prendre le temps de poser les calculs au brouillon...*

D'après la formule d'intégration par parties,

$$\int_0^{+\infty} (n+1)t^n \cdot (-e^{-t})\,dt = \lim_{t\to+\infty} t^{n+1} \cdot (-e^{-t}) - \lim_{t\to 0} t^{n+1} \cdot (-e^{-t}) - \int_0^{+\infty} t^{n+1} \cdot e^{-t}\,dt$$

c'est-à-dire

$$-(n+1)I_n = -I_{n+1}.$$

Comme

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1,$$

on en déduit par récurrence que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad I_n = n!.$$

3. Quels que soient les polynômes P et Q dans E, la fonction

$$\left[t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}\right]$$

est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$. De plus, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$P(t)Q(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}(t^n)$$

donc, d'après la première question, l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,dt$$

est (absolument) convergente.

L'application $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est donc bien définie sur $E \times E$. Il est clair qu'il s'agit d'une forme bilinéaire et symétrique.
Quel que soit le polynôme $P \in E$,

$$\langle P \,|\, P \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)^2 e^{-t}\, dt \geqslant 0$$

(intégration bornes croissantes d'une fonction intégrable et positive).
Comme la fonction $\left[t \mapsto P(t)^2 e^{-t}\right]$ est **continue** et positive, on en déduit que

$$\forall\, t \in [0, +\infty[, \quad P(t)^2 e^{-t} = 0,$$

donc que

$$\forall\, t \in [0, +\infty[, \quad P(t) = 0$$

(puisque la fonction exp ne s'annule pas) et donc que P est bien le polynôme nul (le seul polynôme admettant une infinité de racines).
Donc $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur E.

4. Pour tout $P \in E$, il est clair que

$$\varphi(P) = XP'' + (1 - X)P'$$

est un polynôme. On vérifie sans peine que, quels que soient les polynômes P et Q, quel que soit le scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + Q) &= X(\lambda P + Q)'' + (1 - X)(\lambda P + Q)' \\ &= \lambda\left[XP'' + (1 - X)P'\right] + \left[Q'' + (1 - X)Q'\right] \\ &= \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)\end{aligned}$$

ce qui prouve que φ est bien un endomorphisme de E.

5. Nous allons à nouveau intégrer par parties. Toujours d'après la première question, les expressions

$$f'(t)g(t) = \left[tP''(t) + (1 - t)P'(t)\right]e^{-t} \cdot Q(t)$$

et

$$f(t)g'(t) = \left[tP'(t)e^{-t}\right] \cdot Q'(t)$$

sont intégrables sur $[0, +\infty[$ et il est clair que le produit

$$f(t)g(t) = tP'(t)Q(t)e^{-t}$$

tend vers une limite finie (nulle...) lorsque t tend vers 0 et lorsque t tend vers $+\infty$.
Par conséquent,

$$\int_0^{+\infty} f'(t)g(t)\, dt = -\int_0^{+\infty} f(t)g'(t)\, dt$$

c'est-à-dire

$$\left\langle \varphi(P) \,\middle|\, Q \right\rangle = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\, dt.$$

✍ *On a trouvé une expression* symétrique *en fonction de P et Q.*

❧ Une nouvelle intégration par parties avec

$$f(t) = P(t) \quad \text{et} \quad g(t) = tQ'(t)e^{-t}$$

nous donne alors

$$\left\langle \varphi(P) \,\middle|\, Q \right\rangle = (-1)^2 \left\langle P \,\middle|\, \varphi(Q) \right\rangle.$$

✍ *Inutile d'entrer dans les détails : c'est essentiellement la même chose. Le simple fait d'expliciter les fonctions f et g montre qu'on sait parfaitement de quoi il retourne — et qu'on ne cherche pas à faire illusion.*

L'endomorphisme φ admet donc un adjoint, qui est égal à φ lui-même.

✍ *Dans un espace euclidien (dimension* finie*), tout endomorphisme admet un adjoint.*
En revanche, dans un espace préhilbertien de dimension infinie*, il n'est pas sûr qu'un endomorphisme admette un adjoint. C'est pour cette raison que je rédige ainsi la conclusion.*

Solution 46 **Off2019-175**

1. Si une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est à la fois symétrique et antisymétrique, alors

$$M = M^T = -M$$

donc $M = O_n$. Les sous-espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont donc en somme directe.

D'autre part, toute matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique :

$$M = \frac{M + M^T}{2} + \frac{M - M^T}{2} \qquad (\star)$$

donc

$$\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R}).$$

Enfin, si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et si $B \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, alors

$$\langle A \,|\, B \rangle = \operatorname{tr}(A^T B) = \operatorname{tr}(AB)$$

(symétrie de A) cependant que

$$\begin{aligned} \langle A \,|\, B \rangle &= \langle B \,|\, A \rangle \\ &= \operatorname{tr}(B^T A) = \operatorname{tr}(-BA) = -\operatorname{tr}(AB) \end{aligned}$$

(symétrie du produit scalaire, antisymétrie de B et propriété de la trace). Par conséquent, $\langle A \,|\, B \rangle = 0$, donc ces deux sous-espaces sont orthogonaux et

$$\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathscr{A}_n(\mathbb{R}).$$

2. On applique la relation $(\star)$: $M = p(M) + q(M)$ où

$$p(M) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$$

$$q(M) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{A}_3(\mathbb{R}).$$

La distance de M à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est égale à

$$\begin{aligned} \|M - p(M)\| = \|q(M)\| &= \frac{1}{2}\sqrt{4 \times 3^2 + 2 \times 2^2} \\ &= \sqrt{11}. \end{aligned}$$

3. L'ensemble H est un hyperplan de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ en tant que noyau de la forme linéaire tr ou bien en tant qu'orthogonal de la droite $D = \mathbb{R} \cdot I_n$ puisque

$$\operatorname{tr}(M) = 0 \iff \langle I_n \,|\, M \rangle = 0.$$

Puisqu'on connaît une base orthogonale de D, on peut calculer facilement la décomposition de M dans $E = D \overset{\perp}{\oplus} H$: il s'agit de

$$M = \frac{\langle I_n \,|\, M \rangle}{\|I_n\|^2} I_n + \left(M - \frac{\langle I_n \,|\, M \rangle}{\|I_n\|^2} I_n \right).$$

La distance de M au sous-espace H est alors égale à

$$\left\| \frac{\langle I_n \,|\, M \rangle}{\|I_n\|^2} I_n \right\| = \frac{|\langle I_n \,|\, M \rangle|}{\|I_n\|}.$$

Dans le cas particulier où $M = I_n$, la décomposition est simplement

$$I_n = \underbrace{I_n}_{\in D} + \underbrace{0_n}_{\in H}$$

et la distance cherchée est égale à $\|I_n\| = \sqrt{n}$.

Solution 47 Off2020-198b

1. Ces intégrales existent au sens propre : les intégrandes sont des fonctions continues sur l'intervalle borné $]0,1]$ et tendent vers une limite finie (nulle, en fait !) au voisinage de 0 (par croissances comparées des puissances de t et des puissances de $\ln t$).

❧ Comme $t^{n+1}\ln t$ et $t^{n+1}\ln^2 t$ tendent vers 0 lorsque t tend vers 0, on peut intégrer par parties sur $]0,1]$.

$$\int_0^1 t^n \ln t\,dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln t\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^n}{n+1}\,dt = \frac{-1}{(n+1)^2}$$
$$\int_0^1 t^n \ln^2 t\,dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln^2 t\right]_0^1 - \frac{2}{n+1}\int_0^1 t^n \ln t\,dt = \frac{2}{(n+1)^3}$$

2. **Rappel —** Le projeté orthogonal de w sur F est l'unique vecteur $p(w) \in F$ tel que $w - p(x) \in F^\perp$.

❧ Notons $p(w)$, le projeté orthogonal de w sur F. Il existe deux réels a et b tels que

$$w = a\cdot u + b\cdot v$$

et comme

$$F = \text{Vect}(u,v),$$

le vecteur $w - p(w)$ est orthogonal à F si, et seulement si,

$$\begin{cases} \langle w - p(w)\,|\,u\rangle &= 0\\ \langle w - p(w)\,|\,v\rangle &= 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} a\langle u\,|\,u\rangle + b\langle u\,|\,v\rangle &= \langle w\,|\,u\rangle\\ a\langle u\,|\,v\rangle + b\langle v\,|\,v\rangle &= \langle w\,|\,v\rangle. \end{cases}$$

❧ D'après la question précédente,

$$\langle u\,|\,u\rangle = 1/3,\quad \langle u\,|\,v\rangle = 1/4,\quad \langle v\,|\,v\rangle = 1/5,\quad \langle w\,|\,u\rangle = -1/16,\quad \langle w\,|\,v\rangle = -1/25.$$

On applique les formules de Cramer et on trouve

$$p(w) = \frac{-3}{5}\cdot u + \frac{11}{20}\cdot v.$$

3. On considère trois fonctions

$$u = [t\mapsto 1]\qquad v = [t\mapsto t]\qquad w = [t\mapsto t\ln t]$$

en convenant que $w(0) = 0$ pour que ces trois fonctions soient continues sur le segment $[0,1]$. On note E, le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ engendré par ces trois fonctions :

$$E = \text{Vect}(u,v,w)$$

qu'on munit du produit scalaire défini par

$$\forall\, f,g\in E,\quad \langle f\,|\,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,t^2\,dt.$$

✍ *Il faut prendre soin de démontrer qu'il s'agit bien d'un produit scalaire !*

❧ *Comme $E\subset\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, toutes les intégrales sont bien définies.*

❧ *Si $\langle f\,|\,f\rangle = 0$, alors $[f(t)]^2 = 0$ pour tout $t\in]0,1[$ (car $\left[t\mapsto t^2f^2(t)\right]$ est une fonction continue et positive sur l'intervalle $]0,1[$ et que son intégrale est nulle). Comme f est continue sur le segment $[0,1]$, cela prouve que f est bien le vecteur nul de E.*

On considère alors le sous-espace

$$F = \text{Vect}(u,v).$$

Quels que soient les réels a et b, la fonction

$$[t\mapsto at+b] = a\cdot u + b\cdot v$$

est un vecteur de F et par conséquent

$$\int_0^1 (at+b-t\ln t)^2 t^2\,dt = \|(a\cdot u + b\cdot v) - w\|^2.$$

❧ Il s'agit donc ici de calculer (le carré de) la distance du vecteur w au plan F. Plus précisément, la borne inférieure cherchée est égale à

$$\langle w \,|\, w - p_F(w) \rangle \qquad (\star)$$

où $p_F(w)$ est le projeté orthogonal de w sur le sous-espace F.

❧ La borne inférieure

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (at + b - t\,\ell n\, t)^2 t^2 \, dt$$

est égale à $\big[\, d(w, F)\big]^2$ et donc à

$$\begin{aligned} \langle w \,|\, w - p(w) \rangle &= \langle w \,|\, w \rangle - \langle w \,|\, a \cdot u + b \cdot v \rangle \\ &= \langle w \,|\, w \rangle - a \langle w \,|\, u \rangle - b \langle w \,|\, v \rangle \\ &= \frac{2}{125} - \frac{-3}{5} \cdot \frac{-1}{16} - \frac{11}{20} \cdot \frac{-1}{25} = \frac{1}{2\,000}. \end{aligned}$$

✍ *Une fois encore, il faut retarder autant que possible les applications numériques et choisir l'expression littérale qui donnera les calculs les plus simples !*

Si on ignore la formule ($\star$), on va devoir calculer

$$\big\| w - (a \cdot u + b \cdot v) \big\|^2.$$

En développant cette expression, on trouve

$$\langle w \,|\, w \rangle - a \langle w \,|\, u \rangle - b \langle v \,|\, w \rangle + \big[a^2 \|u\|^2 + 2ab \langle u \,|\, v \rangle + b^2 \|v\|^2 - a \langle w \,|\, u \rangle - b \langle w \,|\, v \rangle \big]$$

et les calculs (littéraux !) effectués précédemment nous assurent que la quantité entre crochets est nulle : comme ça ne saute pas aux yeux, il nous faudra donc calculer numériquement cette quantité (avec tous les risques d'erreur que cela comporte : on calcule ici sur des rationnels) pour trouver qu'elle est nulle.

Solution 48 rms130-525

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et on va traiter la matrice M comme un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$: quitte à identifier le vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ à la colonne X qui le représente dans la base canonique (orthonormée !) de $\mathbb{R}^n$, on identifie la colonne MX au vecteur Mx, image de x par l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice M.

✍ *(Toutes ces précautions pour légitimer les abus de notation qui vont suivre et qui, en fait, n'abusent personne.)*

❧ Soient $x \in \operatorname{Ker} M$ et $y \in \operatorname{Im} M$: il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = Mx_0$ et comme M est antisymétrique,

$$\langle y \,|\, x \rangle = \langle Mx_0 \,|\, x \rangle = (Mx_0)^\top . x = x_0^\top . (-Mx) = -\langle x \,|\, 0 \rangle = 0.$$

On en déduit que les deux sous-espaces Ker M et Im M sont orthogonaux. D'après le théorème du rang,

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} M \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im} M.$$

Cette décomposition en somme directe orthogonale est d'autant plus intéressante que les deux sous-espaces sont stables par M.

❧ En concaténant une base orthonormée $\mathscr{B}_0$ de Ker M et une base orthonormée $\mathscr{B}_1$ de Im M, on obtient donc une base orthonormée $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^n$ et en notant Q, la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$, on obtient donc une matrice orthogonale (changement de base orthonormée) telle que

$$M' = Q^{-1} M Q = Q^\top . M . Q = \begin{pmatrix} 0_{n-r} & 0_{n-r,r} \\ 0_{r,n-r} & M_1 \end{pmatrix}$$

(formule du changement de base et décomposition en somme directe de sous-espaces stables).

❧ La matrice M_1 représente, dans la base orthonormée $\mathscr{B}_1$ de Im M, l'endomorphisme v induit par restriction de M au sous-espace stable Im M.

Du fait que M est antisymétrique, on déduit que le produit $Q^\top . M . Q$ est aussi antisymétrique et par conséquent la matrice $M_1 \in \mathfrak{M}_r(\mathbb{R})$ est elle aussi une matrice antisymétrique.

Si $v(x) = 0$, alors x appartient à la fois à Im M (= espace sur lequel v est défini) et à Ker M (un vecteur du noyau de v est, par définition, un vecteur du noyau de M). Or Ker M et Im M sont en somme directe, donc $x = 0$ et par conséquent v est inversible (Théorème du rang, appliqué à un endomorphisme de Im M, espace de dimension finie). La matrice M_1 est donc inversible.

Comme $M_1 \in \mathfrak{M}_r(\mathbb{R})$ est antisymétrique et inversible, on a donc

$$0 \neq \det M_1 = \det(M_1^\top) = \det(-M_1) = (-1)^r \det M_1,$$

ce qui prouve que l'entier r est pair. Or, par construction, $r = \dim \operatorname{Im} M$, donc $r = \operatorname{rg} M$.

Solution 49 rms130-532

1. Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. D'après le Théorème spectral, il existe une matrice orthogonale Q telle que $Q^\top.S.Q$ soit diagonale et les valeurs propres de S sont strictement positives. Il existe donc des réels $a_1, \dots, a_n$ strictement positifs tels que

$$Q^\top.S.Q = \mathrm{Diag}(a_1, \dots, a_n)^2$$

c'est-à-dire

$$S = [Q.\mathrm{Diag}(a_1, \dots, a_n)].[\mathrm{Diag}(a_1, \dots, a_n)^\top.Q^\top] = P.P^\top$$

en posant $P = Q.\mathrm{Diag}(a_1, \dots, a_n)$, qui est inversible en tant que produit de deux matrices inversibles.

❧ Réciproquement, si P est inversible, alors la matrice $S = P.P^\top$ est symétrique :

$$S^\top = (P.P^\top)^\top = (P^\top)^\top.P^\top = P.P^\top = S$$

et pour toute colonne X,

$$X^\top.S.X = (P.X)^\top.(P.X) = \|PX\|^2 \geqslant 0.$$

En outre, si $X^\top.S.X = 0$, alors $\|PX\| = 0$, donc $PX = 0$ et comme la matrice P est inversible, alors $X = 0$.

Ainsi, la matrice $P.P^\top$ est symétrique définie positive, quelle que soit la matrice inversible P.

2. D'après la question précédente,

$$S.T = P.P^\top.T = P.P^\top.T.(P.P^{-1}) = P.(P^\top.T.P).P^{-1}$$

donc $S.T$ est semblable à la matrice $P^\top.T.P$, qui est une matrice symétrique réelle :

$$(P^\top.T.P)^\top = P^\top.T^\top.(P^\top)^\top = P^\top.T.P$$

puisque $T \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

D'après le Théorème spectral, toute matrice symétrique réelle est diagonalisable. Comme $S.T$ est semblable à une matrice diagonalisable, elle est elle-même diagonalisable.

✍ *À moins que S et T ne commutent, la matrice $S.T$ n'est pas symétrique ! Les matrices symétriques réelles ne sont pas les seules matrices diagonalisables...*

3. Si la matrice A est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible Q et une matrice diagonale Δ telles que

$$A = Q.\Delta.Q^{-1}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \Delta = Q^{-1}.A.Q.$$

Par conséquent, comme Δ est symétrique (elle est diagonale !),

$$A^\top = (Q.\Delta.Q^{-1})^\top = (Q^{-1})^\top.\Delta.Q^\top = (Q^{-1})^\top.(Q^{-1}.A.Q).Q^\top.$$

En posant $S = Q.Q^\top$, on définit une matrice symétrique définie positive, dont l'inverse est égal à

$$(Q.Q^\top)^{-1} = (Q^\top)^{-1}.Q^{-1} = (Q^{-1})^\top.Q^{-1},$$

ce qui prouve que $A^\top = S^{-1}.A.S$.

✍ *Il faut savoir qu'une matrice Q est inversible si, et seulement si, sa transposée est inversible et que, le cas échéant,*

$$(Q^\top)^{-1} = (Q^{-1})^\top$$

puisque

$$Q^\top.(Q^{-1})^\top = (Q^{-1}.Q)^\top = I_n = (Q.Q^{-1})^\top = (Q^{-1})^\top.Q^\top.$$

On ne doit pas perdre de temps à vérifier cette propriété à chaque fois qu'on doit s'en servir !

❧ Réciproquement, s'il existe une matrice $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que

$$A^\top = S^{-1}.A.S,$$

alors il existe une matrice inversible P telle que $S = P.P^\top$ et

$$A^\top = (P.P^\top)^{-1}.A.(P.P^\top) = (P^\top)^{-1}.(P^{-1}.A.P).P^\top,$$

donc

$$P^{-1}.A.P = P^\top.A^\top.(P^\top)^{-1} = (P^{-1}.A.P)^\top.$$

Cela prouve que la matrice $P^{-1}.A.P$ est symétrique réelle. D'après le Théorème spectral, cette matrice est semblable à une matrice diagonale et par transitivité, la matrice A est elle aussi semblable à une matrice diagonale.

✍ *On a ainsi caractérisé les matrices diagonalisables : la matrice A est diagonalisable si, et seulement si, il existe une matrice $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A^\top = S^{-1}.A.S$.*

Cela dit, ce critère ne me paraît pas d'une utilité pratique particulière !

Solution 50 rms130-680

1.

✍ *On ne vérifie pas qu'il s'agit bien d'un produit scalaire, mais il faut savoir le faire sans hésiter.*

Quel que soit le polynôme P, il est clair que $f(P)$ est un polynôme. Il est clair également que f est linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$. Il nous reste à vérifier que le sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par f.

✍ *Ce serait une faute logique d'étudier $f(P)$ en supposant que le degré de P est **égal** à n, il faut étudier le degré de $f(P)$ en supposant que celui de P est **inférieur** à n.*
Nous ferons mieux en supposant que le degré de P est inférieur *à $k \neq n$.*

Si $\deg P \leqslant k \leqslant n$, alors $\deg P' \leqslant k-1$ et $\deg P'' \leqslant k-2$, donc

$$\deg(X^2-1)P'' \leqslant k \quad \text{et} \quad \deg XP' \leqslant k,$$

si bien que $\deg f(P) \leqslant k$. Chaque sous-espace $\mathbb{R}_k[X]$ est donc stable par f : en particulier, f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

De plus la matrice de f relative à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est une matrice triangulaire supérieure, ce qui va nous donner immédiatement le spectre de f.

❧ L'endomorphisme f est auto-adjoint : quels que soient les polynômes P et Q,

$$\begin{aligned}
\langle f(P) \,|\, Q \rangle &= \int_{-1}^{1} \Big[\frac{1}{2}(t^2-1)P''(t) + tP'(t)\Big]Q(t)\,dt - \langle P \,|\, Q \rangle \\
&= \int_{-1}^{1} \Big[\frac{1}{2}(t^2-1)P'(t)\Big]'Q(t)\,dt - \langle P \,|\, Q \rangle \\
&= \Big[\frac{1}{2}(t^2-1)P'(t)Q(t)\Big]_{-1}^{1} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(t^2-1)P'(t)Q'(t)\,dt - \langle P \,|\, Q \rangle \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-t^2)P'(t)Q'(t)\,dt - \langle P \,|\, Q \rangle .
\end{aligned}$$

L'expression trouvée est symétrique en P et Q, donc $\langle f(P) \,|\, Q \rangle = \langle P \,|\, f(Q) \rangle$ et l'endomorphisme f est bien auto-adjoint.

✍ *Dans ce genre de situation, l'intégration par parties est le **seul** moyen de rendre l'intégrale symétrique en P et Q : on fait disparaître la dérivée seconde de P en faisant apparaître la dérivée première de Q.*

✍ *Comme l'endomorphisme f est auto-adjoint et que sa matrice relative à la base canonique n'est pas symétrique, la base canonique n'est pas une base orthonormée pour le produit scalaire considéré.*

❧ Il est clair que $f(1) = -1$; $f(X) = 0$ et que

$$\forall\, 2 \leqslant k \leqslant n, \quad f(X^k) = \frac{k^2+k-2}{2}X^k - \frac{k(k-1)}{2}X^{k-2}.$$

La matrice de f relative à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ étant triangulaire (supérieure), les valeurs propres de f sont les coefficients diagonaux de cette matrice :

$$\mathrm{Sp}(f) = \Big\{\frac{k^2+k-2}{2},\ 0 \leqslant k \leqslant n\Big\}.$$

Le trinôme t^2+t-2 atteint son minimum en $t = -1/2$ (sommet de la parabole en $-b/(2a)$), donc la fonction $\big[t \mapsto t^2+t-2\big]$ est strictement croissante sur $[-1/2, +\infty[$ et en particulier, les valeurs propres

$$\lambda_k = \frac{k^2+k-2}{2}$$

sont deux à deux distinctes.

✍ *On a ainsi démontré deux fois que f était diagonalisable : en tant qu'endomorphisme auto-adjoint (Théorème spectral) et en tant qu'endomorphisme d'un espace de dimension $(n+1)$ qui possède $(n+1)$ valeurs propres distinctes.*
Chaque argument permet de préciser l'autre ! En effet,
— la seconde propriété montre que chaque sous-espace propre est une droite vectorielle : deux vecteurs propres associés à une même valeur propre sont donc proportionnels ;

— le Théorème spectral prouve alors que ces droites sont deux à deux orthogonales !
Ainsi, n'importe quelle base de vecteurs propres de f est une base orthogonale (non nécessairement orthonormée).

❧ Pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$, il existe donc un vecteur propre P_k associé à la valeur propre λ_k. Comme tous les vecteurs propres associés à λ_k sont proportionnels (et non nuls...), ils ont tous le même degré. Mais lequel ?

Chaque sous-espace $\mathbb{R}_k[X]$ étant stable par f, on peut définir les endomorphismes f_k induits par restriction de f aux sous-espaces $\mathbb{R}_k[X]$ et la matrice relative à la base canonique nous montre que λ_k appartient au spectre de f_k mais pas au spectre de f_{k-1}. Par conséquent, il existe un vecteur propre de f associé à λ_k dans $\mathbb{R}_k[X]$ (son degré est inférieur à k) mais pas dans $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ (donc son degré est strictement supérieur à $(k-1)$). Donc le degré de tous les vecteurs propres associés à λ_k est égal à k.

✍ *Toute base de vecteurs propres est donc échelonnée en degré et il suffit de connaître le degré d'un vecteur propre pour connaître la valeur propre qui lui est associée !*

2. D'après l'algorithme de Gram-Schmidt, $(T_0, \dots, T_k)$ est une base orthonormée de

$$\mathrm{Vect}(1, X, \dots, X^k) = \mathbb{R}_k[X],$$

donc (décomposition d'un vecteur dans une base orthonormée)

$$\forall\, Q \in \mathbb{R}_k[X], \quad Q = \sum_{i=0}^{k} \langle\, Q \,|\, T_i \,\rangle \cdot T_i.$$

Comme $\mathbb{R}_k[X]$ est stable par f, alors $f(T_k) \in \mathbb{R}_k[X]$ et

$$\begin{aligned} f(T_k) &= \sum_{i=0}^{k} \langle\, f(T_k) \,|\, T_i \,\rangle \cdot T_i \\ &= \sum_{i=0}^{k} \langle\, T_k \,|\, f(T_i) \,\rangle \cdot T_i. \qquad (f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_n[X])) \end{aligned}$$

Pour $0 \leqslant i < k$, le polynôme T_i appartient à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ et comme $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ est stable par f,

$$f(T_i) \in \mathbb{R}_{k-1}[X] = \mathrm{Vect}(T_0, T_1, \dots, T_{k-1}) \perp T_k$$

(puisque la famille $(T_0, T_1, \dots, T_{k-1}, T_k)$ est orthogonale. Donc

$$\forall\, 0 \leqslant i < k, \qquad \langle\, T_k \,|\, f(T_i) \,\rangle = 0$$

et il ne reste plus que

$$f(T_k) = \langle\, f(T_k) \,|\, T_k \,\rangle \cdot T_k.$$

Comme T_k n'est pas nul (vecteur unitaire !), c'est un vecteur propre de f, (associé à la valeur propre $\langle\, f(T_k) \,|\, T_k \,\rangle$).

Comme $\deg T_k = k = \deg P_k$, on déduit de la question précédente que T_k et P_k sont associés à la même valeur propre et donc proportionnels entre eux.

Solution 51 rms130-683

Comme X est un vecteur propre unitaire de A associé à λ, on a

$$AX = \lambda X \quad \text{et} \quad X^\top . X = 1.$$

D'autre part, $X^\top . A = (A^\top . X)^\top = (AX)^\top$ puisque A est symétrique. On en déduit que, pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (A - u.X.X^\top)^2 &= A^2 - u.X.X^\top.A - u.A.X.X^\top + u^2.X.X^\top.X.X^\top \\ &= A^2 - 2u\lambda.X.X^\top + u^2.X.X^\top. \end{aligned}$$

Comme X est un vecteur unitaire, la matrice carrée $X.X^\top$ est la projection orthogonale sur la droite dirigée par X et sa trace est donc égale à 1.

✍ *On rappelle que la projection orthogonale p sur la droite $D = \mathbb{R} \cdot \mathbf{u}$ (où $\mathbf{u}$ est un vecteur unitaire) s'exprime*

$$\forall\, \mathbf{x} \in E, \quad p(\mathbf{x}) = (\, \mathbf{u} \,|\, \mathbf{x} \,) \cdot \mathbf{u}.$$

Dans une base orthonormée, cette expression se traduit matriciellement par

$$(U^\top.X).U = U.(U^\top.X) = (U.U^\top).X.$$

On rappelle également que, pour toute projection, la trace est égale au rang. On projette ici sur une droite, donc le rang est égal à 1.

Ainsi,

$$\forall\, u \in \mathbb{R},\quad \operatorname{tr}(A - u\cdot X.X^\top)^2 = \operatorname{tr}(A^2) - 2u\lambda + u^2.$$

Il s'agit ici d'un trinôme du second degré en la variable u, il atteint son minimum en $u = (2\lambda/2) = \lambda$ et ce minimum est égal à

$$F_A(X) = \operatorname{tr}(A^2) - \lambda^2.$$

✍ *L'expression dépend de X, car λ est la valeur propre associée à X !*

Lorsque X parcourt W, la valeur propre λ parcourt $\operatorname{Sp}(A)$, donc

$$m(A) = \min_{X\in W} F_A(X) = \min_{\lambda\in\operatorname{Sp}(A)} [\operatorname{tr}(A^2) - \lambda^2] = \operatorname{tr}(A^2) - \rho(A)^2.$$

Comme A est diagonalisable, elle est semblable à une matrice de la forme

$$\operatorname{Diag}(a_1, \dots, a_n)$$

et par conséquent, A^2 est semblable à $\operatorname{Diag}(a_1^2, \dots, a_n^2)$. On en déduit que

$$\operatorname{Sp}(A^2) = \{\lambda^2,\ \lambda \in \operatorname{Sp}(A)\},$$

puis que

$$\rho(A^2) = \big[\rho(A)\big]^2$$

et donc que

$$m(A) = \operatorname{tr}(A^2) - \rho(A^2).$$

Solution 52 rms130-779

1. L'image de f est engendrée par les colonnes de A, donc $\operatorname{rg} f = 2$ et

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big((1,1,1,1),(1,0,0,1)\big).$$

D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ et comme deux relations de liaison entre les colonnes sautent aux yeux, on en déduit que

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\big((1,0,0,-1),(0,1,-1,0)\big).$$

2. Quel que soit l'endomorphisme f, l'image de f est TOUJOURS stable par f ! (Et le calcul pour le prouver est immédiat !)

3. Prenons pour base de $\operatorname{Im} f$ les deux vecteurs donnés ci-dessus :

$$\mathscr{B} = \big((1,1,1,1),(1,0,0,1)\big).$$

On vérifie que

$$f(1,1,1,1) = (4,2,2,4) = 2\cdot(1,1,1,1) + 2\cdot(1,0,0,1)$$
$$f(1,0,0,1) = (2,2,2,2) = 2\cdot(1,1,1,1) + 0\cdot(1,0,0,1)$$

et on en déduit que la matrice de g dans la base $\mathscr{B}$ est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

✍ *A priori, la matrice trouvée dépend de la base choisie ! Mais c'est sans importance pour la suite.*

4. Le polynôme caractéristique de M est égal à $X^2 - 2X - 4$.
Les valeurs propres de la matrice M sont donc

$$1 \pm \sqrt{5}$$

et, quelle que soit la valeur propre λ de M, il est clair que les vecteurs du noyau de

$$(M-\lambda I_2)=\begin{pmatrix}2-\lambda & 2\\ 2 & -\lambda\end{pmatrix}$$

sont proportionnels au vecteur (non nul !)

$$\begin{pmatrix}\lambda\\ 2\end{pmatrix}$$

. De plus,

$$(M-\lambda I_2)\begin{pmatrix}\lambda\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2-2\lambda-4\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

d'après le polynôme caractéristique de M.

✍ *Les vecteurs propres de la matrice M nous donnent des vecteurs propres de g (et donc de f) par leurs coordonnées relatives à la base $\mathscr{B}$ que nous avons choisie plus haut.*
Plus précisément, un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda = 1\pm\sqrt{5}$ est donné par

$$\lambda\cdot(1,1,1,1)+2\cdot(1,0,0,1)=(\lambda+2,\lambda,\lambda,\lambda+2).$$

5. En conclusion, l'endomorphisme f est diagonalisable (sa matrice est symétrique réelle...) ;
— le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est Ker f, dont on a donné une base plus haut ;
— le sous-espace propre associé à la valeur propre $1+\sqrt{5}$ est la droite dirigée par le vecteur

$$(1+\sqrt{5})\cdot(1,1,1,1)+2\cdot(1,0,0,1)$$

— et le sous-espace propre associé à la valeur propre $1-\sqrt{5}$ est la droite dirigée par le vecteur

$$(1-\sqrt{5})\cdot(1,1,1,1)+2\cdot(1,0,0,1).$$

Solution 53 rms130-784

✍ *Attention à ne pas mélanger φ, l'endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ étudié ici, avec les matrices $\varphi(M)$ qui sont toutes diagonalisables (puisqu'elles sont toutes symétriques et réelles).*

❧ On doit savoir que la transposition

$$\tau=\left[M\mapsto M^\top\right]$$

est une symétrie sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Elle est donc diagonalisable et

$$\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})=\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\oplus\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

où l'espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques est le sous-espace propre associé à $+1$ et l'espace $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques, le sous-espace propre associé à -1.
Cela étant rappelé, on constate que

$$\varphi=\mathrm{Id}+\tau,$$

donc φ est diagonalisable, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est le sous-espace propre associé à 2 et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, le sous-espace propre associé à 0 (alias le noyau de φ).

✍ *Bien entendu, il est possible de traiter cet exercice par le calcul... Mais si cela ne pose pas de réelle difficulté, il faut bien veiller à ne pas diviser par zéro !*
Concrètement : Si $M+M^\top=\lambda M$, alors
— ou bien $\lambda\neq 0$ et dans ce cas

$$M=\frac{1}{\lambda}(M+M^\top)\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

et donc

$$\varphi(M)=2M$$

d'où $\lambda=2$;
— ou bien $\lambda=0$ et dans ce cas

$$M+M^\top=0$$

donc M est antisymétrique.
Il ne reste plus qu'à compter les dimensions pour conclure.

Solution 54 rms130-830

Il est clair que l'application φ est une forme bilinéaire sur $E = \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Comme la matrice A est symétrique et que $X^\top.A.Y \in \mathfrak{M}_1(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_1(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\varphi(X,Y) &= X^\top.A.Y = (X^\top.A.Y)^\top = Y^\top.A^\top.X = Y^\top.A.X\\ &= \varphi(Y,X).\end{aligned}$$

De plus, comme $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, quelle que soit la colonne X non nulle,

$$\varphi(X,X) = X^\top.A.X > 0,$$

ce qui prouve que φ est définie positive. Ainsi, φ est bien un produit scalaire.

✍ *Avant d'aller plus loin, rappelons que la matrice A est bien inversible (en tant que matrice symétrique **définie** positive) et que son inverse est symétrique elle aussi :*

$$A^{-1} = (A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top.$$

❧ Considérons maintenant l'endomorphisme T défini par

$$\forall\, X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad T(X) = (A^{-1}B).X$$

et calculons son adjoint pour le produit scalaire φ : quelles que soient les colonnes X et Y,

$$\begin{aligned}\varphi\big(T(X),Y\big) &= [(A^{-1}B).X]^\top.A.Y\\ &= X^\top.B^\top.(A^{-1})^\top.A.Y = X^\top.B.A^{-1}.A.Y \qquad (\text{car } A^{-1},\ B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}))\\ &= X^\top.B.Y = X^\top.A.(A^{-1}B.Y) = \varphi\big(X,T(Y)\big).\end{aligned}$$

L'endomorphisme T est donc auto-adjoint pour le produit scalaire φ.

❧ L'endomorphisme T est donc diagonalisable (Théorème spectral) et par conséquent, la matrice $(A^{-1}B)$ (qui représente l'endomorphisme T dans la base canonique de $\mathfrak{M}_{1,1}(\mathbb{R})$) est diagonalisable.

✍ *Rien ne prouve que la matrice $A^{-1}B$ soit symétrique ! En effet, cette matrice représente l'endomorphisme auto-adjoint T dans la base canonique et rien ne doit laisser penser que cette base soit une base orthonormée pour le produit scalaire φ.*

Solution 55 rms130-922

1. Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ et ne s'annule pas, on a

$$\begin{array}{ccccccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & f(t) & \mapsto & \langle f(t)\,|\,f(t)\rangle & \mapsto & \sqrt{\langle f(t)\,|\,f(t)\rangle}\end{array}$$

donc l'application $[t \mapsto \|f(t)\|]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ en tant que composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et d'après la Formule de Leibniz (dérivation d'un produit — ici d'un produit scalaire)

$$\frac{d}{dt}\big(\|f(t)\|\big) = \frac{\langle f(t)\,|\,f'(t)\rangle}{\|f(t)\|}.$$

❧ En tant que quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ (dont le dénominateur ne s'annule pas), la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\begin{aligned}g'(t) &= \frac{f'(t)}{\|f(t)\|} - \frac{f(t)}{\|f(t)\|^2}\cdot\frac{d}{dt}\big(\|f(t)\|\big)\\ &= \frac{f'(t)}{\|f(t)\|} - \frac{\langle f(t)\,|\,f'(t)\rangle\cdot f(t)}{\|f(t)\|^3}.\end{aligned}$$

Par hypothèse, le couple de vecteurs $\big(f(t),f'(t)\big)$ est une famille liée et le vecteur $f(t)$ n'est pas nul, donc il existe $\alpha(t) \in \mathbb{R}$ tel que

$$f'(t) = \alpha(t)\cdot f(t)$$

et par conséquent

$$g'(t) = \frac{\alpha(t)\cdot f(t)}{\|f(t)\|} - \frac{\alpha(t)\,\|f(t)\|^2\cdot f(t)}{\|f(t)\|^3} = 0.$$

2. La fonction g est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Il existe donc un vecteur $e = g(0)$ unitaire tel que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad g(t) = e$$

et par conséquent

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = \|f(t)\| \cdot e \in \mathbb{R} \cdot e.$$

✍ *Réciproquement,*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad f'(t) = \frac{\langle f(t) \,|\, f'(t) \rangle}{\|f(t)\|} \cdot e \in \mathbb{R} \cdot e$$

donc les vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$ forment une famille liée.

3. Pour $t \geqslant 0$, on pose $f(t) = t^2 \cdot e_1$ et pour $t \leqslant 0$, on pose $f(t) = t^2 \cdot e_2$. Ces deux définitions sont cohérentes, car $f(0) = 0$ dans les deux cas.

Il est clair que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ avec

$$\forall\, t > 0, \quad f'(t) = 2t \cdot e_1 \quad \text{et} \quad \forall\, t < 0, \quad f'(t) = 2t \cdot e_2.$$

De plus, $f(t) = \mathcal{O}(t^2)$ lorsque t tend vers 0, donc f est en fait dérivable en $t = 0$ avec $f'(0) = 0$. Les expressions de $f'(t)$ pour $t \neq 0$ montrent alors que f' est bien continue sur $\mathbb{R}$.

Donc f est une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, t \neq 0, \quad f'(t) = \frac{2}{t} \cdot f(t) \quad \text{et} \quad f'(0) = 0$$

donc le couple $\big(f(t), f'(t)\big)$ est une famille liée pour tout $t \in \mathbb{R}$.

✍ *Interprétation cinématique : si le vecteur position $f(t)$ et le vecteur vitesse sont proportionnels, alors le mouvement est rectiligne tant que le vecteur position ne s'annule pas ; si le vecteur position et le vecteur vitesse s'annulent simultanément, alors on peut changer de direction lors du passage par l'origine...*

Solution 56 rms130-981

Comme U est supposé ouvert, il y a un sens à supposer que f soit de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et comme U est supposé convexe :

$$\forall\, (a, b) \in U \times U,\ \forall\, t \in [0, 1], \quad (1 - t)a + tb \in U$$

et il y a donc un sens à supposer que f soit convexe sur U.

❧ On suppose que f est convexe sur U et on fixe deux points $a \neq b$ dans U :

$$\forall\, t \in [0, 1], \quad f\big((1 - t)a + tb\big) \leqslant (1 - t)f(a) + tf(b).$$

L'application $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x \in [0, 1], \quad g(x) = f\big((1 - x)a + xb\big)$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$ (comme composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$).

Quels que soient $0 \leqslant x < y \leqslant 1$ et $t \in [0, 1]$, on pose

$$z = (1 - t)x + ty \in [0, 1]$$

et (par associativité du barycentre)

$$(1 - z)a + zb = (1 - t)\big[(1 - x)a + xb\big] + t\big[(1 - y)a + yb\big]$$

donc (par convexité de f)

$$g(z) \leqslant (1 - t)g(x) + tg(y)$$

ce qui prouve que g est convexe sur $[0, 1]$.

En particulier, la dérivée de g est une fonction croissante et donc

$$\frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} \geqslant g'(0)$$

c'est-à-dire

$$f(b) - f(a) \geqslant \mathrm{d}f(a)(b-a) = \left\langle \nabla f(a) \,\middle|\, b-a \right\rangle.$$

❧ Réciproquement, on suppose que

$$\boxed{\forall\, (u,v) \in U \times U,} \quad f(u) \geqslant f(v) + \left\langle \nabla f(v) \,\middle|\, u-v \right\rangle$$

et on considère trois points de U :

$$a, \quad b \quad \text{et} \quad c = (1-t)a + tb$$

(où $t \in [0,1]$).

Par hypothèse,

$$f(a) \geqslant f(c) + \left\langle \nabla f(c) \,\middle|\, a-c \right\rangle,$$
$$f(b) \geqslant f(c) + \left\langle \nabla f(c) \,\middle|\, b-c \right\rangle.$$

Or $a-c = t(a-b)$ et $b-c = (1-t)(b-a)$, donc

$$f(a) \geqslant f(c) - t\left\langle \nabla f(c) \,\middle|\, b-a \right\rangle,$$
$$f(b) \geqslant f(c) + (1-t)\left\langle \nabla f(c) \,\middle|\, b-a \right\rangle$$

donc

$$t\big[f(b)-f(c)\big] \geqslant t(1-t)\left\langle \nabla f(c) \,\middle|\, b-a \right\rangle \geqslant (1-t)\big[f(c)-f(a)\big]$$

et finalement

$$f(c) \leqslant (1-t)f(a) + tf(b),$$

ce qui prouve que f est bien convexe sur U.

Solution 57 rms130-1066

1.

✍ *Rappelons que les produits scalaires canoniques sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ sont respectivement définis par*

$$(X\,|\,Y) = X^\top.Y \quad \textit{et par} \quad \langle A\,|\,B\rangle = \mathrm{tr}(A^\top.B).$$

La matrice

$$K_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est symétrique réelle, donc (Théorème spectral) il existe une base orthonormée $(U_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres pour K_n :

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n,\ \exists\, \lambda \in \mathbb{R}, \qquad K_n U_k = \lambda_k U_k.$$

2. Il est clair que T est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Nous allons prouver qu'il est auto-adjoint (pour le produit scalaire canonique sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$).

Quelles que soient les matrices A et B dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \left\langle T(A) \,\middle|\, B \right\rangle &= \mathrm{tr}\big((K_n.A + A.K_n + A)^\top.B\big) \\ &= \mathrm{tr}(A^\top.K_n^\top.B + K_n^\top.A^\top.B + A^\top.B) \\ &= \left\langle A \,\middle|\, (K_n.B) \right\rangle + \mathrm{tr}(A^\top.B.K_n) + \langle A\,|\,B\rangle \\ &= \left\langle A \,\middle|\, (K_n.B + B.K_n + B) \right\rangle = \left\langle A \,\middle|\, T(B) \right\rangle \end{aligned}$$

où on a utilisé la symétrie de K_n (c'est-à-dire $K_n^\top = K_n$) et la propriété bien connue de la trace.

✍ *Rappelons au passage que la propriété*

$$\forall\, M, N, \qquad \mathrm{tr}(MN) = \mathrm{tr}(NM)$$

est vraie non seulement lorsque M et N sont des matrices carrées de même taille, mais plus généralement lorsque M et N sont des matrices rectangulaires de tailles compatibles, c'est-à-dire quelles que soient les matrices $M \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $N \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Ainsi, même si les matrices $MN \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $NM \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$ sont de formats différents, elles ont toujours la même trace.

❧ D'après le Théorème spectral, il existe une base orthonormée de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres pour T. Nous allons vérifier qu'il en existe une qui est particulièrement simple.

3. Par hypothèse, $(U_i \,|\, U_j) = U_i^\top . U_j = \delta_{i,j}$ pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Quels que soient les indices $1 \leqslant i, j, k, \ell \leqslant n$,

$$\begin{aligned}\langle V_{i,j} \,|\, V_{k,\ell} \rangle &= \operatorname{tr}\big((U_i.U_j^\top)^\top.(U_k.U_\ell^\top)\big)\\ &= \operatorname{tr}\big(U_j.(U_i^\top.U_k).U_\ell^\top\big)\\ &= \operatorname{tr}(U_j.(U_i \,|\, U_k).U_\ell^\top)\\ &= \delta_{i,k}\operatorname{tr}(U_j.U_\ell^\top) = \delta_{i,k}\operatorname{tr}(U_\ell^\top.U_j) \qquad (\star)\\ &= \delta_{i,k}(U_\ell \,|\, U_j) = \delta_{i,k}\delta_{j,\ell}\end{aligned}$$

en appliquant $(\star)$ la propriété bien connue de la trace et en remarquant par la même occasion que $U_\ell^\top.U_j \in \mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$, ce qui rend le calcul de la trace particulièrement simple !

On a ainsi démontré que $(V_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une famille orthonormée de n^2 vecteurs de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, c'est donc une base orthonormée de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

❧ Enfin, quels que soient $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on sait que

$$K_n.U_i = \lambda_i.U_i$$

et que

$$U_j^\top.K_n = (K_n.U_j)^\top = \lambda_j.U_j^\top = \lambda_j.U_j^\top$$

(puisque la matrice K_n est symétrique). On en déduit que

$$\begin{aligned}T(V_{i,j}) &= K_n.U_i.U_j^\top + U_i.U_j^\top.K_n + V_{i,j}\\ &= \lambda_i.U_i.U_j^\top + U_i.(\lambda_j.U_j^\top) + V_{i,j}\\ &= (1+\lambda_i+\lambda_j).V_{i,j}\end{aligned}$$

donc les matrices $V_{i,j}$ (non nulles, puisque leur norme est égale à 1) sont des vecteurs propres de T.

Solution 58 rms130-1135

1. On peut calculer facilement le polynôme caractéristique au moyen d'opérations de pivot judicieuses (et sans passer par une relation de récurrence).

Partant de

$$(-1)^n\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b & \cdots & b\\ b & & & \\ \vdots & & \ddots & \\ b & & & a-\lambda \end{vmatrix}$$

on effectue d'abord les opérations

$$\forall\, 2 \leqslant i \leqslant n, \quad L_i \leftarrow L_i - L_1$$

pour obtenir

$$(-1)^n\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b & \cdots & b\\ b-a+\lambda & a-b-\lambda & & \\ \vdots & & \ddots & \\ b-a+\lambda & & & a-b-\lambda \end{vmatrix}$$

avant d'effectuer

$$C_1 \leftarrow C_1 + \sum_{j=2}^{n} C_j$$

pour parvenir à une matrice triangulaire

$$(-1)^n\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda+(n-1)b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a-b-\lambda \end{vmatrix}$$

qui donne directement

$$\chi_M = (X-a+b)^{n-1}\big(X-a-(n-1)b\big).$$

❧ On en déduit en particulier que

$$\det M(a,b) = (-1)^n\chi_M(0) = (a-b)^{n-1}\big(a+(n-1)b\big).$$

✍ *On n'est pas obligé de calculer le polynôme caractéristique pour trouver le déterminant !*

✍ ***Autre méthode très astucieuse pour calculer le déterminant.***
On commence par considérer

$$f(x) = \begin{vmatrix} a+x & c+x & \cdots & c+x \\ b+x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & c+x \\ b+x & \cdots & b+x & a+x \end{vmatrix}.$$

On peut vérifier que f est une fonction affine de x en effectuant les opérations de pivot

$$\forall\, 2 \leqslant j \leqslant n, \quad C_j \leftarrow C_j - C_1$$

pour obtenir

$$\begin{vmatrix} a+x & c-a & \cdots & c-a \\ b+x & a-b & c-b & \cdots & c-b \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & c-b \\ b+x & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

qu'on développe par la première colonne :

$$f(x) = (a+x)\times M_{1,1} + (b+x)\times\left[\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+1}M_{i,1}\right]$$

où les mineurs $M_{i,1}$ ne dépendent pas de x.
Il existe donc deux constantes A et B telles que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = Ax + B.$$

❧ *Pour $x = -c$, il est clair que*

$$f(c) = Ac + B = (a-c)^n$$

(déterminant d'une matrice triangulaire inférieure) et pour $x = -b$, il est tout aussi clair que

$$f(b) = Ab + B = (a-b)^n$$

(déterminant d'une matrice triangulaire supérieure).

❧ *En supposant que $b \neq c$, on déduit des formules de Cramer que*

$$A = \frac{(a-c)^n - (a-b)^n}{c-b} \quad \textit{et} \quad B = \frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b}.$$

En particulier,

$$f(0) = B = \frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b}.$$

❧ *En tant que fonction de b et c, l'expression $f(x)$ est continue (car polynomiale !) donc*

$$\det M(a,b) = \lim_{c\to b} \frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b}$$

On pose alors $c = b+h$ et on conclut par un développement limité :

$$\frac{(a-b)^n}{h}\cdot\left((b+h) - b\left[1-\frac{h}{a-b}\right]^n\right) \xrightarrow[h\to 0]{} (a-b)^{n-1}\big((a-b)+nb\big).$$

2. La matrice $M(a,b)$ est symétrique mais ses coefficients a et b sont complexes : on ne peut donc pas conclure directement à l'aide du Théorème spectral !

La matrice $M(0,1)$ est, elle, symétrique réelle donc diagonalisable : il existe une matrice de passage Q telle que

$$Q^{-1}M(0,1)Q$$

soit diagonale.

On en déduit alors que, quels que soient les nombres complexes a et b, la matrice

$$Q^{-1}M(a,b)Q = a\underbrace{Q^{-1}M(1,0)Q}_{I_n} + b\underbrace{Q^{-1}M(0,1)Q}_{\text{diag.}}$$

est diagonale, ce qui prouve que toutes les matrices $M(a,b)$ sont diagonalisables.

✍ *Qu'on puisse ici choisir la matrice de passage dans le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est sans intérêt.*

3. Si $b = 0$, alors $M(a,b) = aI_n$ est une homothétie et son polynôme minimal est donc $(X-a)$.

Si $b \neq 0$, alors $M(a,b)$ n'est pas une homothétie et le degré de son polynôme minimal est donc supérieur à 2.

Il est alors classique de considérer la matrice

$$J = M(1,1)$$

dont tous les coefficients sont égaux à 1. On a donc

$$J^2 = nJ$$

et comme

$$M(a,b) - (a-b)I_n = bJ$$

alors

$$\begin{aligned}[M(a,b)-(a-b)I_n]^2 &= b^2J^2\\ &= nb.(bJ)\\ &= nb.[M(a,b)-(a-b)I_n].\end{aligned}$$

Cela nous montre que le polynôme

$$[X-(a-b)]^2 - nb.[X-(a-b)]$$

est un polynôme annulateur de $M(a,b)$, de degré 2 et unitaire : c'est donc le polynôme minimal de $M(a,b)$.

Conclusion :

$$\mu_M = (X-a+b)\big(X-a-(n-1)b\big).$$

✍ ***Variante plus élaborée :***

Le polynôme caractéristique de $M(a,b)$ nous donne ses deux valeurs propres (ou sa valeur propre si $b=0$) et on sait que $M(a,b)$ est diagonalisable. Par conséquent, son polynôme minimal est unitaire, scindé, à racines simples et ses racines sont les valeurs propres de $M(a,b)$ (c'est-à-dire les racines de χ_M) : cela caractérise le polynôme minimal.

4. Comme $I_n + M(a,b) = M(a+1,b)$, le déterminant de $I_n + M(a,b)$ est égal à

$$(1+a-b)^{n-1}\big(1+a+(n-1)b\big).$$

Solution 59 rms130-1142

1. Comme le produit fg est une fonction continue sur le segment $[-1,1]$, l'intégrale $\langle f \mid g \rangle$ est bien définie. Donc $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

Cette application est évidemment symétrique et elle est bilinéaire (par linéarité de l'intégrale).

Si $f = g$, alors la fonction intégrande f^2 est positive. Comme les bornes de l'intégrale sont dans l'ordre croissant, l'intégrale $\langle f \mid f \rangle$ est positive.

Si $\langle f \mid f \rangle = 0$, alors on a une fonction continue et positive dont l'intégrale sur $[-1,1]$ est nulle. Donc $f^2(t) = 0$ pour tout $t \in [-1,1]$ et par conséquent $f = 0_E$.

L'application $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est donc un produit scalaire sur E.

2. a. Le sous-espace F est engendré par deux vecteurs, donc sa dimension est inférieure à 2.

Ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels, donc ils forment une famille libre et par conséquent $\dim F = 2$.

2. b. Comme $f_0 f_1$ est une fonction continue et impaire, son intégrale sur le segment $[-1,1]$ est nulle (ce segment admet l'origine pour centre de symétrie).

Les deux vecteurs f_0 et f_1 sont donc orthogonaux.

3. Toute fonction $f \in F$ est une fonction affine. En particulier, sa dérivée seconde est nulle. Comme la dérivée seconde de g n'est pas nulle, $g \notin F$.

4. Puisqu'on connaît une base orthogonale de F, le projeté de g sur F est le vecteur h défini par

$$h = \frac{\langle g \mid f_0 \rangle}{\|f_0\|^2} \cdot f_0 + \frac{\langle g \mid f_1 \rangle}{\|f_1\|^2} \cdot f_1.$$

Or

$$\|f_0\|^2 = 2, \quad \|f_1\|^2 = \frac{2}{3}, \quad \langle g \mid f_0 \rangle = e - e^{-1}, \quad \langle g \mid f_1 \rangle = 2e^{-1}$$

puisque

$$\int^x te^t \, dt = [te^t]^x - \int^x e^t \, dt = (x-1)e^x.$$

Ainsi, pour tout $t \in [-1,1]$,

$$h(t) = \frac{e - e^{-1}}{2} + 3e^{-1}t.$$

5. Il s'agit de calculer le minimum de

$$\left\| g - (af_0 + bf_1) \right\|^2.$$

On sait que ce minimum existe, qu'il est atteint seulement pour $af_0 + bf_1 = h$ et qu'il est égal à

$$\langle g - h \mid g \rangle = \|g\|^2 - \frac{e - e^{-1}}{2} \langle g \mid f_0 \rangle - 3e^{-1} \langle g \mid f_1 \rangle = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} - \frac{(e - e^{-1})^2}{2} - 6e^{-2} = 1 - 7e^{-2}.$$

Solution 60 rms130-1144

1. L'application $[x \mapsto k \langle x \mid a \rangle \cdot a]$ est linéaire (par linéarité à gauche du produit scalaire) et c'est une application de E dans E. Comme l'identité $[x \mapsto x]$ est aussi un endomorphisme de E, on en déduit que f est un endomorphisme de E.

2. Soient x et y dans E.

Comme $k \langle x \mid a \rangle \in \mathbb{R}$ et que le produit scalaire est linéaire à gauche,

$$\langle f(x) \mid y \rangle = \langle x \mid y \rangle + k \langle x \mid a \rangle \langle a \mid y \rangle.$$

De même, par linéarité à droite du produit scalaire,

$$\langle x \mid f(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle + k \langle y \mid a \rangle \langle x \mid a \rangle.$$

Par symétrie du produit scalaire,

$$k \langle y \mid a \rangle \langle x \mid a \rangle = k \langle a \mid y \rangle \langle x \mid a \rangle = k \langle x \mid a \rangle \langle a \mid y \rangle,$$

ce qui prouve que l'endomorphisme f est bien auto-adjoint.

3. Comme f est un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie, le Théorème du rang nous assure que f est inversible si, et seulement si, son noyau est réduit au vecteur nul.

Si $x \in \operatorname{Ker} f$, alors

$$f(x) = x + k \langle x \mid a \rangle \cdot a = 0_E$$

donc $x = -k \langle x \mid a \rangle \cdot a$. On en déduit que le vecteur x est nécessairement colinéaire au vecteur a et donc que $\operatorname{Ker} f \subset \mathbb{R} \cdot a$.

Or $f(a) = (1 + k\|a\|^2) \cdot a = (1+k) \cdot a$ puisque a est un vecteur unitaire.

Deux cas se présentent :

— si $k = -1$, alors $a \in \operatorname{Ker} f$ et donc $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R} \cdot a \neq \{0_E\}$;
— si $k \neq -1$, alors $a \notin \operatorname{Ker} f$ et donc $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

Par conséquent, l'endomorphisme f est inversible si, et seulement si, $k \neq -1$.

4. Pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) &= f\big(x + k\langle x \,|\, a\rangle \cdot a\big)\\ &= f(x) + k\langle x \,|\, a\rangle \cdot f(a)\\ &= f(x) + (1+k)\big[k\langle x \,|\, a\rangle \cdot a\big]\\ &= f(x) + (1+k)\big[f(x) - x\big] = (2+k)\cdot f(x) - (1+k)\cdot x.\end{aligned}$$

✍ *On déduit de cette relation que le polynôme*

$$X^2 - (2+k)X + (1+k) = (X-1)(X-1-k)$$

est un polynôme annulateur de f.

5. Comme f est symétrique, il est diagonalisable (Théorème spectral) et ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

On a déjà remarqué que $f(a) = (1+k)\cdot a$, donc a est un vecteur propre (unitaire, donc *non nul*) associé à la valeur propre $(1+k)$.

Si x est orthogonal à a, alors $f(x) = x = 1 \cdot x$, donc 1 est aussi une valeur propre de f. On distingue à nouveau deux cas.

— Si $k = 0$, alors $f = \mathrm{Id}$ et $\operatorname{Sp}(f) = \{1\}$.
— Si $k \neq 0$, alors $\operatorname{Sp}(f) = \{1, 1+k\}$ et les sous-espaces propres associés à 1 et à $(1+k)$ sont respectivement la droite $\mathbb{R}\cdot a$ et l'hyperplan $(\mathbb{R}\cdot a)^\perp$.

✍ *Un endomorphisme est inversible si, et seulement si, son spectre ne contient pas 0. On a ainsi retrouvé le fait que f était inversible si, et seulement si, $k \neq -1$.*

✍ *Comme f est diagonalisable et qu'il admet 1 et $1+k$ pour valeurs propres, on en déduit que, si $k \neq 0$, alors son polynôme minimal est égal à $(X-1)(X-1-k)$.*
Pour $k = 0$, son polynôme minimal est évidemment $X - 1$.

Solution 61 rms130-1145

1. Il est clair que l'application

$$[(x, y) \mapsto \langle f(x) \,|\, y\rangle]$$

est une forme bilinéaire symétrique sur E.

Appliquons le Théorème spectral à l'endomorphisme f, qui est supposé symétrique : il existe une base orthonormée

$$\mathscr{B} = (\varepsilon_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$$

de E constituée de vecteurs propres pour f.

Pour tout vecteur $x \in E$, il existe une famille de scalaires $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ telle que

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \varepsilon_k.$$

Comme $\mathscr{B}$ est une base orthonormée, on déduit du Théorème de Pythagore que

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

En notant α_k la valeur propre de f associée au vecteur propre ε_k, on a aussi

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \cdot \varepsilon_k$$

et comme $\mathscr{B}$ est une base orthonormée (bis !),

$$\langle f(x) \,|\, x \rangle = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\alpha_k}_{>0} \underbrace{x_k^2}_{\geqslant 0}.$$

Il est maintenant clair que

$$\forall\, x \in E, \quad \langle f(x) \,|\, x \rangle \geqslant 0.$$

Si une somme de termes positifs est nulle, c'est que tous ses termes sont nuls. Comme les α_k sont strictement positifs, si $\langle f(x) \,|\, x \rangle = 0$, c'est que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad x_k = 0$$

et donc que $x = x_1 \cdot \varepsilon_1 + \cdots + x_n \cdot \varepsilon_n = 0_E$.

Donc $[(x, y) \mapsto \langle f(x) \,|\, y \rangle]$ est bien un produit scalaire.

2. Soit $A = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Comme les α_k sont strictement positifs, il existe un unique endomorphisme g de E tel que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \mathrm{Diag}(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n})$$

et les valeurs propres $\sqrt{\alpha_k}$ de cet endomorphisme g sont strictement positives elles aussi.

La matrice de g dans la base $\mathscr{B}$ est symétrique (réelle) et $\mathscr{B}$ est une base orthonormée, donc l'endomorphisme g est bien symétrique.

Enfin,

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(g^2) = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$$

donc $g^2 = f$.

Solution 62 rms130-1147

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $[t \mapsto f(t)t^n]$ est continue sur le segment $[0, 1]$, donc l'intégrale

$$\int_0^1 f(t)t^n \,\mathrm{d}t$$

est bien définie.

Comme f est continue sur le segment $[0, 1]$, elle y reste bornée et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in [0, 1], \quad \left|f(t)t^n\right| \leqslant \|f\|_\infty.$$

Par positivité de l'intégrale, on en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \left|\int_0^1 f(t)t^n \,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \left|f(t)t^n\right| \mathrm{d}t \leqslant \|f\|_\infty.$$

L'ensemble

$$\left\{\left|\int_0^1 f(t)t^n \,\mathrm{d}t\right|,\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

est donc une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}_+$: elle admet bien une borne supérieure et cette borne supérieure est un réel positif.

Ainsi, N est bien une application de $E = \mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}_+$.

✍ *Faut-il prendre la peine de justifier pourquoi l'ensemble considéré n'est pas vide ?*

On a justifié l'existence de chaque intégrale, donc cet ensemble contient tous les termes d'une suite réelle (pas nécessairement distincts deux à deux, mais c'est sans importance).

Je ne pense pas qu'il faille en dire plus.

En revanche, il est crucial de justifier l'existence de chaque intégrale, de justifier clairement que l'ensemble est borné et de mentionner (juste mentionner, en passant) qu'il n'est pas vide.

▶ Soit $f \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il est clair que

$$\left|\int_0^1 (\lambda f)(t)t^n \,\mathrm{d}t\right| = \underbrace{|\lambda|}_{\geqslant 0} \left|\int_0^1 f(t)t^n \,\mathrm{d}t\right|$$

et par conséquent

$$N(\lambda f) = |\lambda| \sup\left\{ \left| \int_0^1 f(t)t^n \, dt \right|, \ n \in \mathbb{N} \right\} = |\lambda| \, N(f).$$

✍ *Là encore, inutile d'entrer dans les détails (à mon avis).*
Mais un jour d'oral, on doit se tenir prêt à fournir les détails nécessaires pour justifier que, pour toute partie non vide et majorée $A \subset \mathbb{R}$,

$$\forall \, t > 0, \quad \sup(t.A) = t. \sup(A).$$

(Rien de compliqué, mais ça prend pas mal de temps de bien le rédiger.)

▶ Quelle que soient les fonctions f et g dans E, quel que soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 (f+g)(t)t^n \, dt \right| &= \left| \int_0^1 f(t)t^n \, dt + \int_0^1 g(t)t^n \, dt \right| \\ &\leqslant \left| \int_0^1 f(t)t^n \, dt \right| + \left| \int_0^1 g(t)t^n \, dt \right| \\ &\leqslant N(f) + N(g) \end{aligned}$$

(en invoquant successivement la linéarité de l'intégrale, l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$ et le fait que la borne sup est un majorant).

On a trouvé un majorant indépendant de n, on peut donc passer au sup :

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \int_0^1 (f+g)(t)t^n \, dt \right| \leqslant N(f) + N(g)$$

ce qui signifie précisément que N vérifie aussi l'inégalité triangulaire :

$$\forall \, f, g \in E, \quad N(f+g) \leqslant N(f) + N(g).$$

✍ *Je tiens à ce style de démonstration avec les bornes sup (ou inf) : on commence par trouver un majorant et on conclut en rappelant que, par définition, la borne sup est le plus petit de tous les majorants possibles. — C'est peut-être une manie personnelle ?*

▶ Il reste à vérifier que N sépare les points. Pour cela, nous considérons $f \in E$ telle que $N(f) = 0$, c'est-à-dire

$$\forall \, n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 f(t)t^n \, dt = 0.$$

Par combinaison linéaire, on en déduit que

$$\int_0^1 f(t)P(t) \, dt = 0$$

pour toute application polynomiale $P \in E$.

❧ La fonction f est CONTINUE sur le SEGMENT $[0,1]$. D'après le Théorème de Weierstrass, il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications polynomiales qui converge uniformément sur le segment $[0,1]$ vers f :

$$\lim_{n \to +\infty} \|f - P_n\|_\infty = 0.$$

❧ Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme f est bornée sur $[0,1]$,

$$\forall \, t \in [0,1], \quad \left| f^2(t) - f(t)P_n(t) \right| = \left| f(t) \right| \left| f(t) - P_n(t) \right| \leqslant \|f\|_\infty \, \|f - P_n\|_\infty.$$

Par linéarité, par inégalité triangulaire et enfin par positivité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f^2(t) \, dt - \int_0^1 f(t)P_n(t) \, dt \right| &= \left| \int_0^1 f^2(t) - f(t)P_n(t) \, dt \right| \\ &\leqslant \int_0^1 \left| f^2(t) - f(t)P_n(t) \right| dt \\ &\leqslant \|f\|_\infty \, \|f - P_n\|_\infty. \end{aligned}$$

❧ On en déduit que

$$\int_0^1 f^2(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t)P_n(t)\,dt.$$

Or on a constaté en commençant que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 f(t)P_n(t)\,dt = 0.$$

Donc

$$\int_0^1 f^2(t)\,dt = 0$$

et comme f^2 est une fonction continue et positive sur $[0,1]$, on en déduit que f est la fonction nulle.

✍ *On peut vérifier facilement que l'application*

$$\left[(f,g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)\,dt\right]$$

définit un produit scalaire sur E. *Le raisonnement qui précède démontre que l'orthogonal du sous-espace* F *des applications polynomiales est réduit à* $\{0\}$ *et donc que*

$$F^\perp = E^\perp = \{0\} \quad \textit{bien que} \quad F \subsetneq E.$$

On en déduit en particulier que $(F^\perp)^\perp = E \neq F$.

Cela n'est possible que parce que E *est un espace de dimension infinie et que* F *est dense dans* E.

Rappel : en dimension finie, tout sous-espace vectoriel est fermé (donc $\overline{F} = F$*) et* $(F^\perp)^\perp = F$.

Solution 63 rms130-1206

1.

✍ *Nous allons traiter cet exercice de manière élémentaire, mais on pourrait évoquer plusieurs résultats de nature géométrique pour aller plus vite en voyant plus loin. À tout à l'heure !*

On note

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

de telle sorte que

$$A = (x_i x_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

ou, plus clairement en lisant A colonne par colonne,

$$A = \begin{pmatrix} x_1 X & x_2 X & \cdots & x_n X \end{pmatrix}.$$

❧ Comme $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ n'est pas la colonne nulle,

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 > 0$$

donc la matrice A n'est pas la matrice nulle et son rang est donc au moins égal à 1.

Réciproquement, toutes les colonnes de A sont proportionnelles à la colonne X, donc le rang de A est au plus égal à 1.

Bref : le rang de A est égal à 1.

❧ En particulier, 0 est une valeur propre de A et le sous-espace propre associé à cette valeur propre (alias $\operatorname{Ker} A$) est un sous-espace de dimension $(n-1)$.

D'autre part,

$$AX = (XX^T).X = X.\underbrace{(X^TX)}_{=\operatorname{tr}(A)\in\mathbb{R}} = \operatorname{tr}(A).X$$

et comme la colonne X n'est pas la colonne nulle, il s'agit d'un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\operatorname{tr}(A) > 0$.

Conclusion : le spectre de A est $\{0,\ \operatorname{tr}(A)\}$.

2. On a trouvé deux valeurs propres distinctes 0 et $\operatorname{tr}(A) > 0$, on a constaté que les dimensions des deux sous-espaces propres étaient respectivement égale à $(n-1)$ et au moins égale à 1, donc A est diagonalisable.

Le sous-espace propre associé à $\operatorname{tr}(A)$ est donc la droite $\mathbb{R} \cdot X$ et le polynôme caractéristique de A est donc égal à

$$(X-0)^{n-1}(X-\operatorname{tr} A)^1 = X^{n-1}(X-\operatorname{tr} A).$$

3. Comme A est semblable à

$$\operatorname{Diag}(\operatorname{tr} A, 0, \dots, 0),$$

alors $I_n + A$ est semblable à

$$\operatorname{Diag}(1+\operatorname{tr} A, 1, \dots, 1)$$

donc

$$\det(I_n + A) = (1+\operatorname{tr} A).1^{n-1} = 1 + \operatorname{tr} A = 1 + X^T.X.$$

✍ *Un peu de géométrie maintenant ?*

Soient e, le vecteur représenté par la colonne X dans la base canonique de $E = \mathbb{R}^n$ et φ, l'endomorphisme représenté par A dans la base canonique de E.

On suppose que E est muni du produit scalaire canonique. Dans ces conditions,

$$\forall\, u \in E, \quad \varphi(u) = e.\langle e \,|\, u\rangle = \langle e \,|\, u\rangle \cdot e = \|e\|^2 \cdot p(u)$$

où p est la projection orthogonale sur la droite $D = \mathbb{R} \cdot e$.

Il est donc clair que le rang de φ est égal à 1 (= le rang de p), que les valeurs propres de φ sont 0 et $\|e\|^2$ (proportionnelles aux valeurs propres de p) et que les sous-espaces propres de φ respectivement associés à ces valeurs propres sont l'hyperplan $H = (\mathbb{R}\cdot e)^\perp$ et $\mathbb{R} \cdot e$ (= les sous-espaces propres de p, c'est-à-dire le noyau et l'image de la projection).

Solution 64 rms130-1314

1. D'après le Théorème spectral, toutes les matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont diagonalisables. Il existe donc un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n(n+1)/2$ dont toutes les matrices sont diagonalisables.

2. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux. Ainsi, le spectre d'une matrice triangulaire *stricte* est réduit à $\{0\}$ (tous les coefficients diagonaux sont nuls). Si une telle matrice est diagonalisable, alors elle est semblable à la matrice nulle (= la matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont nuls) et donc *égale* à la matrice nulle.

✍ *Pour mémoire : $A = P0_nP^{-1} = 0_n$.*

L'ensemble U^+ des matrices triangulaires supérieures strictes est un espace vectoriel de dimension $n(n-1)/2$ et la seule matrice diagonalisable de ce sous-espace est la matrice nulle.

3. Soit V, un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les matrices sont diagonalisables. D'après la question précédente, l'intersection $V \cap U^+$ est réduite à la matrice nulle : $V \cap U^+ = \{0_n\}$, ce qui prouve que ces deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe. On en déduit que

$$\dim V + \dim U^+ \leqslant \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$$

et donc que

$$\dim V \leqslant \frac{n(n+1)}{2} = \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

Ainsi, le sous-espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est maximal parmi les sous-espaces de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les matrices sont diagonalisables.

✍ ***Précision à titre culturel***

*Dans un ensemble ordonné $(E, \prec)$, un élément a est dit **maximal** lorsqu'il n'existe aucun élément strictement supérieur à lui :*

$$\forall\, x \in E, \qquad a \prec x \implies x = a.$$

*Si $\prec$ est une relation d'ordre total (comme $\leqslant$), la notion d'*élément maximal *coïncide avec celle de* plus grand élément.

En revanche, pour une relation d'ordre partiel (comme $\subset$ ou $|$), ces notions diffèrent. Notamment, il peut exister plusieurs éléments maximaux alors qu'il existe au plus un plus grand élément (et s'il existe un plus grand élément, alors c'est le seul élément maximal).

Exemple : si $E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ est ordonné par $|$, alors les éléments maximaux de E sont 6, 7, 8, 9 et 10.

Variante : si E est l'ensemble des entiers naturels supérieurs à 2 (pour $\leqslant$), alors les éléments minimaux de E pour $|$ sont les entiers premiers (pas de diviseur strict dans E) et l'ensemble E n'a pas de plus petit élément.

En revanche, si $E = \mathbb{N}^*$ est ordonné par $|$, l'entier 1 est le seul élément minimal — et c'est donc le plus petit élément de E.

Solution 65 rms130-1320

1. Prenons $x = e_j$: comme e_j est unitaire,

$$1 = \|e_j\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle e_j \,|\, e_i \rangle^2 = \|e_j\|^4 + \sum_{i \neq j} \langle e_j \,|\, e_i \rangle^2$$

et donc

$$\sum_{i \neq j} \langle e_j \,|\, e_i \rangle^2 = 0.$$

Une somme de réels positifs est nulle si, et seulement si, chaque terme est nul, donc

$$\forall\, i \neq j, \quad \langle e_j \,|\, e_i \rangle = 0.$$

La famille $(e_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ est donc orthogonale.

2. Si x est orthogonal au sous-espace $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, alors en particulier

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \langle x \,|\, e_i \rangle = 0$$

et donc

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x \,|\, e_i \rangle^2 = 0.$$

Par conséquent $x = 0_E$.

3. On sait maintenant que $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille orthonormée, et donc libre.
Notons $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$. Comme E est un espace euclidien, on sait que

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$$

et on a démontré que $F^\perp = \{0_E\}$. Par conséquent, $E = F$, ce qui prouve que la famille $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est aussi une famille génératrice de E.

Finalement, la famille $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de E.

✍ *On a démontré en particulier que* $\dim E = n$.

Solution 66 rms130-1322

✍ *On ne vérifie pas qu'il s'agit bien d'un produit scalaire, mais il faut savoir le faire sans hésiter.*

❧ Pour $0 \leqslant i, j \leqslant n$,

$$(X^i \,|\, X^j) = \int_0^1 t^{i+j}\, dt = \frac{1}{i+j+1}.$$

❧ Comme toutes les matrices de Gram, la matrice H est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable.

❧ Soit $U \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, la colonne canoniquement associée à $(a_0, \dots, a_n)$. Alors

$$\begin{aligned} U^\top.H.U &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_i H_{i,j} a_j \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \,\middle|\, \sum_{j=0}^{n} a_j X^j \right) \\ &= \left\| \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \right\|^2 = \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{n} a_i t^i \right)^2 dt. \end{aligned}$$

❧ Par positivité de l'intégrale, on a donc montré que la matrice symétrique H était positive :

$$\forall\, U \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R}), \quad U^\top.H.U \geqslant 0.$$

De plus, si $U^\top.H.U = 0$, alors

$$\left\| \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \right\|^2 = 0$$

donc le polynôme

$$\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$$

est le polynôme nul et par conséquent

$$\forall\, 0 \leqslant i \leqslant n, \quad a_i = 0$$

c'est-à-dire $U = 0$. Donc $H \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et d'après la caractérisation spectrale des matrices définies positives, ses valeurs propres sont toutes strictement positives.

Solution 67 rms130-1331

1. Comme A est une matrice carrée et que

$$A.(A^\top.A) = I_n,$$

la matrice A est inversible et $A^{-1} = A^\top.A$. En particulier, A^{-1} est une matrice symétrique, donc $A = (A^{-1})^{-1}$ est aussi une matrice symétrique.

✍ *On doit savoir que l'inverse d'une matrice inversible et symétrique est aussi une matrice symétrique.*

2. Comme A est symétrique, l'équation devient $A^3 = I_n$. La matrice A admet donc

$$X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$$

pour polynôme annulateur. Mais la matrice A est symétrique et réelle, donc elle est diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles (Théorème spectral). En particulier, son polynôme minimal est un diviseur unitaire, scindé, à racines réelles simples du polynôme annulateur $X^3 - 1$: le polynôme minimal de A est donc $(X-1)$, ce qui prouve que $A = I_3$.

Solution 68 rms130-1332

1. On part de la relation donnée, qu'on transpose :

$$I_n = I_n^\top = (A^2)^\top + (A^\top)^\top = (A^\top)^2 + A.$$

2. On remplace $A^\top$ dans cette relation par $I_n - A^2$ (selon l'hypothèse de l'énoncé) :

$$I_n = (I_n - A^2)^2 + A$$

et, par différence, on en déduit que

$$\begin{aligned} 0_n &= (I_n - A^2)^2 + (A - I_n) \\ &= (I_n - A)^2(I_n + A)^2 - (I_n - A) && (\star) \\ &= (I_n - A)\big[(I_n - A)(I_n + A)^2 - I_n\big] \\ &= (I_n - A)(A^3 + A^2 - A) && (\star) \\ &= A(I_n - A)(A^2 + A - I_n) && (\star) \end{aligned}$$

On a utilisé plusieurs fois $(\star)$ le fait que deux polynômes en A commutent toujours, ce qui permet de factoriser facilement ou d'appliquer la formule du binôme pour développer.

Comme la matrice A est supposée inversible, on en déduit que

$$(I_n - A)(A^2 + A - I_n) = 0_n.$$

✍ *L'anneau $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées n'est pas intègre, il ne suffit pas que la matrice A soit distincte de 0_n pour simplfier l'égalité !*

3. Deux polynômes en $A^\top$ commutent toujours. On peut donc déduire de la première question que :

$$A = I_n - (A^\top)^2 = (I_n - A^\top)(I_n + A^\top).$$

Par conséquent, comme A est supposée inversible,

$$\det A = \det(I_n - A^\top)\det(I_n + A^\top) \neq 0,$$

ce qui prouve que $\det(I - A^\top) \neq 0$ et donc que $(I_n - A^\top)$ est inversible.

✍ *Il est utile de retenir une propriété un peu plus générale que celle qu'on vient d'établir :* si un produit de matrices carrées est inversible, alors chaque facteur est lui-même inversible.

❧ On sait qu'une matrice et sa transposée ont même rang. Or

$$(I_n - A^\top) = (I_n - A)^\top$$

(puisque la matrice I_n est symétrique). Comme $(I_n - A^\top)$ est inversible, on en déduit que $(I_n - A)$ est inversible.

✍ *Autrement dit : le scalaire 1 n'est pas une valeur propre de A.*

4. Comme la matrice $(I_n - A)$ est inversible et que

$$(A - I_n)(A^2 + A - I_n) = 0_n,$$

on en déduit que

$$A^2 + A - I_n = 0_n.$$

En comparant cette égalité avec l'hypothèse de départ,

$$A = I_n - A^2 = A^\top$$

donc la matrice A est bien symétrique.

✍ *La matrice A, symétrique à coefficients réels, est donc diagonalisable (Théorème spectral).*

Solution 69 rms130-1333

1. La propriété

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$$

peut aussi s'écrire sous la forme

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \times 1 = 1$$

et être donc interprétée de la manière suivante :

$$AU = U \qquad \text{pour} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur U appartient donc à $\operatorname{Ker}(A - I_n)$.

L'énoncé a admis que $\dim \operatorname{Ker}(A - I_n) = 1$. Par conséquent,

$$\operatorname{Ker}(A - I_n) = \mathbb{R} \cdot U.$$

✍ *Le théorème d'Hadamard (130-987) nous indique comment démontrer que* $\dim \operatorname{Ker}(A - I_n) = 1$.
Considérons un vecteur $X \neq 0$ *dans* $\operatorname{Ker}(A - I_n)$. *On a donc*

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = x_i$$

c'est-à-dire

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} a_{i,j} x_j = (1 - a_{i,i}) x_i.$$

Considérons maintenant un indice $1 \leqslant i_0 \leqslant n$ *tel que*

$$|x_{i_0}| = \|X\| = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k| > 0.$$

✍ *Si on devait démontrer que* $\|\cdot\|$ *était une norme sur* $\mathbb{R}^n$, *il faudrait justifier l'*existence *de ce maximum. Pour ce qui nous concerne, on se contente d'appliquer la définition du maximum : il existe* au moins *un indice* i_0 *tel que* $|x_{i_0}| = \|X\|$.

On a donc, par inégalité triangulaire,

$$\underbrace{(1-a_{i_0,i_0})}_{>0}\underbrace{|x_{i_0}|}_{>0} = \left|\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i_0}} a_{i_0,j}x_j\right|$$
$$\leqslant \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i_0}} \underbrace{a_{i_0,j}}_{>0}\underbrace{|x_j|}_{\leqslant |x_{i_0}|}$$
$$\leqslant \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i_0}} a_{i_0,j}\,|x_{i_0}| = (1-a_{i_0,i_0})|x_{i_0}|.$$

En divisant par $|x_{i_0}| = \|X\| > 0$, on en déduit que

$$1-a_{i_0,i_0} = \left|\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i_0}} a_{i_0,j}\frac{x_j}{\|X\|}\right|$$
$$\leqslant \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i_0}} a_{i_0,j}\frac{|x_j|}{\|X\|} \qquad \text{(inégalité triangulaire)}$$
$$\leqslant \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i_0}} a_{i_0,j} = 1-a_{i_0,i_0}.$$

On en déduit d'une part que nous sommes dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire : les $a_{i_0,j}x_j$ sont donc tous de même signe et comme les $a_{i_0,j}$ sont tous strictement positifs, on en déduit que les x_j sont tous de même signe.

On en déduit d'autre part que

$$\forall\, j\neq i_0,\quad a_{i_0,j}\frac{|x_j|}{\|X\|} = a_{i_0,j} > 0$$

et donc que $|x_j| = \|X\|$ pour tout $j\neq i_0$ mais aussi (par définition de i_0 !) pour $j = i_0$.

Bref, les coordonnées de X sont toutes de même signe et égales en valeur absolue, donc le vecteur X est proportionnel à U, ce qui prouve que

$$\mathrm{Ker}(A-I_n)\subset \mathbb{R}\cdot U.$$

2. Les coordonnées de la colonne AX sont

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j$$

pour $1\leqslant i\leqslant n$. On déduit de l'inégalité triangulaire que

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n}\underbrace{a_{i,j}}_{>0}|x_j| \leqslant \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right)}_{=1}\|X\| = \|X\|$$

pour tout $1\leqslant i\leqslant n$.

On a trouvé un majorant indépendant de i, on peut donc passer au maximum :

$$\|AX\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \leqslant \|X\|.$$

✍ *Pour arriver à majorer facilement ce genre d'expression, un peu de culture sur les normes est utile. L'inégalité de Hölder nous dit que*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leqslant \|x\|_p\|y\|_q$$

avec les normes classiques

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p} \quad \textit{et} \quad \|y\|_q = \left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{1/q}$$

en supposant que les exposants p et q soient conjugués :

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Fort bien... Deux cas particuliers de l'inégalité de Hölder sont extrêmement utiles.
— *Si $p=q=2$, on retrouve l'inégalité de Schwarz !*
— *Pour $p=1$ et $q=+\infty$ (qui sont bien conjugués !), on retrouve*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leqslant \|x\|_1 \, \|y\|_\infty.$$

C'est précisément cette version qu'il fallait utiliser ici (en appliquant la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur les coordonnées de X comme l'énoncé le suggère).

L'inégalité de Hölder est à peu près la seule *manière de majorer une telle expression, il reste à bien choisir les exposants p et q...*

3. Considérons un vecteur propre X associé à la valeur propre λ. On a donc $AX=\lambda X$ et par homogénéité de la norme

$$\|AX\| = |\lambda| \, \|X\|.$$

On a démontré à la question précédente que

$$\|AX\| \leqslant \|X\|.$$

Et comme $\|X\|>0$, on en déduit que $|\lambda| \leqslant 1$.

4. a. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on a

$$\begin{aligned} b_{i,i} = a_{i,i} + 1 = a_{i,i} + \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} &= 2a_{i,i} + \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} a_{i,j} \\ &= \underbrace{2a_{i,i}}_{>0} + \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} b_{i,j} > \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} b_{i,j}. \end{aligned}$$

4. b. Considérons un vecteur $X \in \operatorname{Ker} B$. On a donc

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} x_j = 0$$

et donc

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad |b_{i,i} x_i| = \left| \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} b_{i,j} x_j \right|.$$

En choisissant un indice $1 \leqslant i_0 \leqslant n$ tel que

$$\forall\, 1 \leqslant j \leqslant n, \qquad |x_j| \leqslant |x_{i_0}| = \|X\|,$$

on en déduit que

$$b_{i_0,i_0}|x_{i_0}| \leqslant \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i_0}} b_{i_0,j}|x_j| \leqslant \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i_0}} b_{i_0,j}|x_{i_0}|$$

puisque tous les $b_{i,j}$ sont positifs. On arrive alors à

$$\underbrace{\left(b_{i_0,i_0} - \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i_0}} b_{i_0,j}\right)}_{>0} \underbrace{|x_{i_0}|}_{\geqslant 0} \leqslant 0$$

ce qui prouve que $\|X\| = |x_{i_0}| = 0$ et donc que $X=0$.

Le noyau de la matrice carrée B étant réduit au vecteur nul, la matrice B est donc inversible.

✍ *Si une matrice n'est pas carrée, il se peut que son noyau soit réduit au vecteur nul mais cette matrice ne peut pas être inversible ! On aurait pu raisonner par l'absurde en supposant $X \neq 0$ pour arriver à une contradiction, mais ce n'est pas une nécessité.*

5. Comme la matrice A est symétrique réelle, elle est diagonalisable et en particulier ses valeurs propres sont réelles. On a vu que 1 était valeur propre de A, que le sous-espace propre associé à 1 était la droite dirigée par le vecteur U. On a vu que les valeurs propres vérifiaient toutes $|\lambda| \leqslant 1$, c'est-à-dire

$$\lambda \in [-1, 1]$$

(puisque les valeurs propres sont réelles) et enfin que -1 n'était pas valeur propre de A.

Par conséquent, il existe une matrice de passage Q et des réels

$$-1 < \lambda_n \leqslant \cdots \leqslant \lambda_2 < 1$$

tels que

$$Q^{-1}AQ = \operatorname{Diag}(1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Donc, pour tout exposant $p \in \mathbb{N}^*$,

$$Q^{-1}A^pQ = \operatorname{Diag}(1, \lambda_2^p, \dots, \lambda_n^p).$$

Comme $|\lambda_k| < 1$ pour tout $2 \leqslant k \leqslant n$, on en déduit que λ_k^p tend vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$.

Par conséquent, la suite $(Q^{-1}A^pQ)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice

$$\operatorname{Diag}(1, 0, \dots, 0)$$

(pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et donc pour n'importe quelle norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$).

L'application (dite conjugaison)

$$\left[M \mapsto QMQ^{-1}\right]$$

est linéaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, espace vectoriel de dimension finie, donc elle est continue. La suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est donc convergente, en tant que composée d'une suite convergente par une application continue (théorème de composition des limites) et

$$\lim_{p\to+\infty} A^p = Q \operatorname{Diag}(1, 0, \dots, 0)Q^{-1}.$$

Solution 70 rms132-174

1. D'après le cours,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad d(x, V)^2 = \|x - \pi_V(x)\|^2.$$

Par conséquent, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$R(\omega)^2 = \left\|X(\omega) - \pi_V\big(X(\omega)\big)\right\|^2 = \left\|(I - \pi_V)\big(X(\omega)\big)\right\|^2 \leqslant \left\|X(\omega)\right\|^2$$

puisque $I - \pi_V$ est une projection orthogonale (la projection orthogonale sur $V^\perp$).

Comme les coordonnées de X sont des variables aléatoires de Rademacher,

$$\left\|X(\omega)\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2(\omega) = n$$

et on a donc

$$\forall\, \omega \in \Omega, \qquad 0 \leqslant R(\omega) \leqslant \sqrt{n}.$$

2. Cf cours.

3. (Dorénavant, la variable ω sera sous-entendue.)

Pour le produit scalaire canonique, la base canonique est une base orthonormée. Par conséquent, d'après la première question,

$$\begin{aligned} R^2 &= X^\top.(I - P).X \\ &= X^\top.(I - D - A).X \\ &= X^\top.(I - D).X - X^\top.A.X. \end{aligned}$$

En notant $c_1, \dots, c_n$, les coefficients diagonaux de la matrice D,

$$\begin{aligned} R^2 &= \sum_{i=1}^{n} (1 - c_i)X_i^2 - X^\top.A.X \\ &= \sum_{i=1}^{n} (1 - c_i) - X^\top.A.X && (\text{car } X_i^2 = 1) \\ &= (n - \operatorname{tr} D) - X^\top.A.X. \end{aligned}$$

Par définition, les coefficients diagonaux de D sont aussi les coefficients diagonaux de P, donc $\operatorname{tr} D = \operatorname{tr} P = \operatorname{rg} P$ (puisque la trace de toute projection est aussi le rang de cette projection). Comme π_V est la projection sur un sous-espace de dimension k, le rang de P est égal à k et on a donc bien

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad R^2(\omega) = n - k - X^\top(\omega).A.X(\omega).$$

❧ Comme R^2 est une variable aléatoire bornée, c'est une variable aléatoire d'espérance finie.
En notant $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on a $a_{i,i} = 0$ (par construction de A) et d'après la formule du produit matriciel,

$$X^\top.A.X = \sum_{i\neq j} X_i.a_{i,j}.X_j.$$

Il s'agit d'une combinaison linéaire de variables aléatoires bornées. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(X^\top.A.X) = \sum_{i\neq j} a_{i,j}\,\mathbf{E}(X_iX_j).$$

Or X_i et X_j sont des variables aléatoires indépendantes (puisque $i \neq j$) et centrées, donc

$$\forall\, i \neq j, \quad \mathbf{E}(X_iX_j) = \mathbf{E}(X_i)\,\mathbf{E}(X_j) = 0$$

donc $\mathbf{E}(X^\top.A.X) = 0$ et finalement

$$\mathbf{E}(R^2) = n - k.$$

4. Avec les notations utilisées plus haut,

$$\operatorname{tr}(D^2) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2.$$

On a déjà remarqué que

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = \operatorname{tr} D = \operatorname{tr} P = k.$$

D'après l'inégalité de Schwarz,

$$k = \sum_{i=1}^{n} c_i.1 \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} c_i^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i=1}^{n} 1^2\Big)^{1/2} = \sqrt{n}\sqrt{\operatorname{tr}(D^2)}$$

et par conséquent

$$\operatorname{tr}(D^2) \geqslant \frac{k^2}{n}.$$

5. On a justifié précédemment que

$$X^\top.A.X = \sum_{i\neq j} a_{i,j}X_iX_j$$

était une combinaison linéaire de variables aléatoires centrées. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\big[(X^\top.A.X)^2\big] &= \mathbf{V}\Big(\sum_{i\neq j} a_{i,j}X_iX_j\Big)\\ &= \sum_{i\neq j} a_{i,j}^2\,\mathbf{V}(X_iX_j) + \sum_{\substack{(i,j)\neq(p,q)\\ \text{avec } i\neq j, p\neq q}} a_{i,j}a_{p,q}\,\mathbf{Cov}(X_iX_j, X_pX_q).\end{aligned}$$

❧ Pour $i \neq j$, le produit X_iX_j est une variable aléatoire centrée, donc

$$\mathbf{V}(X_iX_j) = \mathbf{E}(X_i^2X_j^2) = \mathbf{E}(1) = 1.$$

❧ Pour $(i,j) \neq (p,q)$ avec $i \neq j$ et $p \neq q$, il faut distinguer plusieurs cas.

► Si $\{i,j\} \cap \{p,q\} = \varnothing$, alors X_iX_j et X_pX_q sont indépendantes (lemme des coalitions), donc leur covariance est nulle.

► Si $\{i,j\} \cap \{p,q\}$ est un singleton, on peut supposer que $i = p$ et $j \neq q$ (puisque $i \neq j$ et $p \neq q$). Dans ces conditions,

$$\begin{aligned}\mathbf{Cov}(X_iX_j, X_iX_q) &= \mathbf{E}(X_i^2X_jX_q) - \mathbf{E}(X_iX_j)\,\mathbf{E}(X_iX_q)\\ &= \mathbf{E}(X_jX_q) = 0\end{aligned}$$

puisque $X_i^2 = 1$ et que les trois variables aléatoires X_iX_j, X_iX_q et X_jX_q sont centrées (les indices sont distincts).
► Enfin, si $\{i,j\} = \{p,q\}$, alors $i = q$ et $j = p$ (puisque les couples (i,j) et (p,q) sont distincts), donc

$$\mathbf{Cov}(X_iX_j, X_jX_i) = \mathbf{V}(X_iX_j) = 1.$$

Ainsi,

$$\mathbf{V}\Big(\sum_{i\neq j} a_{i,j}X_iX_j\Big) = \sum_{i\neq j} a_{i,j}^2 + \sum_{i\neq j} a_{i,j}a_{j,i}.$$

Comme elle représente une projection orthogonale dans une base orthonormée, la matrice P est symétrique (réelle) et la matrice A est symétrique elle aussi, donc

$$\mathbf{E}\big[(X^\top.A.X)^2\big] = \mathbf{V}\Big(\sum_{i\neq j} a_{i,j}X_iX_j\Big) = 2\sum_{i\neq j} a_{i,j}^2.$$

❧ Il est temps de se souvenir de l'expression du produit scalaire canonique sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\big[(X^\top.A.X)^2\big] &= 2\Big[\sum_{i,j} a_{i,j}^2 - \sum_{i=1}^n a_{i,i}^2\Big]\\ &= 2\big[\mathrm{tr}(P^\top.P) - \mathrm{tr}(D^\top.D)\big]\\ &= 2\big[\mathrm{tr}\,P - \mathrm{tr}(D^2)\big]\end{aligned}$$

puisque $P^\top.P = P^2 = P$ (matrice de projection orthogonale relative à une base orthonormée) et $D^\top.D = D^2$ (matrice diagonale, donc symétrique).

On a vu plus haut que $\mathrm{tr}\,P = k$ et d'après la minoration de la question précédente,

$$\mathbf{E}\big[(X^\top.A.X)^2\big] = 2\big[k - \mathrm{tr}(D^2)\big] \leqslant 2\Big[k - \frac{k^2}{n}\Big] = \frac{2(n-k)k}{n}.$$

6. Comme R est une variable aléatoire positive,

$$\begin{aligned}[R \geqslant \sqrt{n-k}+2] &= \big[R^2 \geqslant n-k+4+4\sqrt{n-k}\big]\\ &= \big[-X^\top.A.X \geqslant 4+4\sqrt{n-k}\big]\\ &\subset \big[(X^\top.A.X)^2 \geqslant 16(1+\sqrt{n-k})^2\big].\end{aligned}$$

On déduit alors de l'inégalité de Markov et de la majoration précédente que

$$\mathbf{P}\big(R \geqslant \sqrt{n-k}+2\big) \leqslant \frac{\mathbf{E}\big((X^\top.A.X)^2\big)}{16(1+\sqrt{n-k})^2} \leqslant \frac{k}{8n}\cdot\frac{(n-k)}{(1+\sqrt{n-k})^2} \leqslant \frac{k}{8n}.$$

Solution 71 rms132-455

1. Supposons que H soit un hyperplan de E. Par définition, il existe une droite D telle que

$$E = H \oplus D$$

et comme D est une droite, il existe un vecteur u (non nul !) tel que $D = \mathbb{K}\cdot u$. Pour tout vecteur $x \in E$, il existe donc un unique couple

$$\big(y, \ell(x)\big) \in H \times \mathbb{K} \quad \text{tel que} \quad x = y + \ell(x)\cdot u. \tag{3}$$

On a ainsi défini une application $\ell : E \to \mathbb{K}$.
► Étant donnés deux vecteurs x_1 et x_2 dans E, il existe donc deux vecteurs y_1 et y_2 dans H et deux scalaires $\ell(x_1)$ et $\ell(x_2)$ tels que

$$x_1 = y_1 + \ell(x_1)\cdot u \quad \text{et} \quad x_2 = y_2 + \ell(x_2)\cdot u.$$

Pour tout scalaire α, on a donc

$$\alpha\cdot x_1 + x_2 = (\alpha\cdot y_1 + y_2) + \big[\alpha\ell(x_1) + \ell(x_2)\big]\cdot u.$$

Mais en appliquant (3) au vecteur $\alpha\cdot x_1 + x_2$, on a aussi

$$\alpha\cdot x_1 + x_2 = \underbrace{z_1}_{\in H} + \ell(\alpha\cdot x_1 + x_2)\cdot u$$

et l'unicité de la décomposition (3) permet d'identifier terme à terme :

$$\forall\, x_1, x_2 \in E,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{K}, \quad \ell(\alpha \cdot x_1 + x_2) = \alpha\ell(x_1) + \ell(x_2),$$

ce qui prouve que ℓ est bien une forme linéaire sur E.

▶ Comme $u = 0_E + 1 \cdot u$ avec $0_E \in H$ et $1 \in \mathbb{K}$, l'unicité de la décomposition (3) nous dit que $\ell(u) = 1$, donc la forme linéaire ℓ n'est pas identiquement nulle.

▶ Si $\ell(x) = 0$, alors $x = y + \ell(x) \cdot u = y \in H$.

Réciproquement, si $x \in H$, alors $x = x + 0 \cdot u$ avec $x \in H$ et $0 \in \mathbb{K}$. À nouveau, l'unicité de la décomposition (3) nous donne $\ell(x) = 0$.

L'hyperplan H est donc bien le noyau de la forme linéaire ℓ.

❧ Réciproquement, si H est le noyau d'une forme linéaire ℓ non identiquement nulle, alors il existe un vecteur u tel que $\ell(u) \neq 0$. Par linéarité de ℓ, ce vecteur u ne peut être nul et

$$\forall\, x \in H, \quad \ell(x) = \frac{\ell(x)}{\ell(u)} \cdot \ell(u) = \ell\Big(\frac{\ell(x)}{\ell(u)} \cdot u\Big),$$

donc la différence

$$x - \frac{\ell(x)}{\ell(u)} \cdot u$$

appartient à $\operatorname{Ker} \ell = H$ (principe de superposition).

Chaque vecteur $x \in E$ admet donc une décomposition

$$\underbrace{\Big[x - \frac{\ell(x)}{\ell(u)} \cdot u\Big]}_{\in H} + \underbrace{\frac{\ell(x)}{\ell(u)} \cdot u}_{\in \mathbb{K}\cdot u},$$

ce qui prouve que $E = H + \mathbb{K} \cdot u$.

Enfin, comme $\ell(u) \neq 0$, le vecteur u n'appartient pas à H et la droite dirigée par $\mathbb{K} \cdot u$ est donc en somme directe avec H.

On a ainsi démontré que $E = H \oplus D$ et donc que H est un hyperplan.

✍ *Il est utile de retenir une vision géométrique de ce résultat, plus évident qu'il n'y paraît.*

Considérons un espace E de dimension 3 et un plan $P \subset E$: il existe une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de ce plan et on peut la compléter en une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E. À cette base correspondent des formes coordonnées ε_1^*, ε_2^*, ε_3^* telles que

$$\forall\, u \in E, \qquad u = \varepsilon_1^*(u) \cdot \varepsilon_1 + \varepsilon_2^*(u) \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_3^*(u) \cdot \varepsilon_3$$

et on voit qu'ici le plan P est le noyau de la forme coordonnée ε_3^* :

$$u \in P \iff \varepsilon_3^*(u) = 0.$$

Plus concrètement encore, quelle que soit la base choisie dans E, le plan P peut être représenté par une équation cartésienne, au sens où

$$u : (x, y, z) \in P \iff ax + by + cz = 0$$

avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Le plan P apparaît donc comme le noyau de la forme linéaire ℓ définie par

$$\forall\, u : (x, y, z) \in E, \qquad \ell(u) = ax + by + cz.$$

On s'est contenté de démontrer que ce cas très particulier était en fait le cas général !

2. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Par bilinéarité du produit matriciel et par linéarité de la trace, il est clair que l'application

$$\Phi(A) = [M \mapsto \operatorname{tr}(AM)]$$

est une application linéaire de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire une forme linéaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. L'application Φ est donc bien une application de $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ dans l'espace dual $E^* = L\big(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}\big)$ des formes linéaires sur E.

❧ Soient A et B, deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et λ, un scalaire. Alors

$$\begin{aligned} \forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad \operatorname{tr}\big[(\lambda A + B)M\big] &= \operatorname{tr}(\lambda AM + BM) \\ &= \lambda \operatorname{tr}(AM) + \operatorname{tr}(BM) \\ &= \lambda\Phi(A)(M) + \Phi(B)(M). \end{aligned}$$

Cette relation étant vraie pour toute matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on en déduit que

$$\Phi(\lambda A + B) = \lambda\Phi(A) + \Phi(B)$$

et donc que Φ est une application *linéaire* de E dans E^*.

✍ *On sait que* $\dim \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$ *et que* $\dim L(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}) = n^2 \times 1 = n^2$, *c'est-à-dire que l'espace de départ et l'espace d'arrivée sont deux espaces de même dimension (finie !). D'après le Théorème du rang, il suffit que* Φ *soit injective pour que* Φ *soit un isomorphisme.*

Soit $A \in \operatorname{Ker}\Phi$. Cela signifie que $\operatorname{tr}(AM) = 0$ pour *toute* matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Avec les notations habituelles,

$$\operatorname{tr}(AM) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}m_{j,i}.$$

Par conséquent, en faisant varier M dans la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\forall\, 1 \leqslant i,j \leqslant n, \quad \operatorname{tr}(AE_{i,j}) = a_{i,j} = 0,$$

ce qui prouve que A est la matrice nulle.

On a ainsi démontré que Φ était un isomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sur son dual.

✍ *Avec* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, *on peut donner une interprétation euclidienne de ces calculs : comme*

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi(A)(M) = \langle A^\top \,|\, M\rangle,$$

on n'a fait que redémontrer le Théorème de représentation de Riesz.

3. La matrice C est obtenue en permutant les colonnes de la matrice I_n, donc elles ont même rang : la matrice C est bien inversible.

❧ Multiplier à gauche par J_r revient à annuler les $(n-r)$ dernières lignes de la matrice C. Par conséquent,

$$\forall\, 1 \leqslant r \leqslant n, \quad \operatorname{tr}(J_rC) = 0.$$

4. Soit H, un hyperplan de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe donc une forme linéaire *non nulle* ℓ telle que $H = \operatorname{Ker}\ell$ (première question) et une matrice A *non nulle* telle que

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \qquad \ell(M) = \operatorname{tr}(AM).$$

Comme A n'est pas nulle, son rang r est compris entre 1 et n et il existe deux matrices inversibles P et Q telles que

$$Q^{-1}AP = J_r, \quad \text{soit} \quad A = QJ_rP^{-1}.$$

Donc

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad \ell(M) = \operatorname{tr}(Q.J_rP^{-1}M) = \operatorname{tr}(J_rP^{-1}M.Q)$$

En choisissant

$$M = PCQ^{-1},$$

on définit une matrice inversible (produit de trois matrices inversibles) et $\ell(M) = \operatorname{tr}(J_rC) = 0$ d'après la question précédente. Par conséquent, l'hyperplan H contient la matrice inversible PCQ^{-1}.

On a ainsi démontré que tout hyperplan de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

Solution 72 rms132-636

1. Supposons que la matrice A soit antisymétrique.
En choisissant une **base orthonormée** de $\mathbb{R}^n$,

$$\langle Ax\,|\,x\rangle = (AX)^\top.X = X^\top.A^\top.X = -X^\top.A.X = -\langle x\,|\,Ax\rangle.$$

Par symétrie du produit scalaire, on en déduit que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad \langle Ax\,|\,x\rangle = 0.$$

❧ Réciproquement, supposons que $\langle Ax\,|\,x\rangle = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$\forall\, x,y \in \mathbb{R}^n, \quad \langle A(x+y)\,|\,x+y\rangle = 0.$$

En développant, on en déduit que

$$\underbrace{\langle Ax \,|\, x\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle Ay \,|\, y\rangle}_{=0} + \langle Ax \,|\, y\rangle + \langle Ay \,|\, x\rangle = 0.$$

Par symétrie du produit scalaire,

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \langle y \,|\, Ax\rangle + \langle Ay \,|\, x\rangle = 0.$$

En choisissant à nouveau une **BON** de $\mathbb{R}^n$, on en déduit que

$$0 = Y^\top.(AX) + (AY)^\top.X = Y^\top.[(A + A^\top)X] = 0.$$

Cette propriété étant vraie quelles que soient les colonnes X et Y, on peut en déduire que

$$A + A^\top = 0_n$$

c'est-à-dire que A est antisymétrique.

2. Considérons maintenant la fonction définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \|X(t)\|^2 = \langle X(t) \,|\, X(t)\rangle$$

où X est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Le produit scalaire étant bilinéaire et symétrique, la fonction f est bien de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = 2\langle X'(t) \,|\, X(t)\rangle.$$

► Si X est une solution de l'équation différentielle, alors $X'(t) = A.X(t)$ et comme A est antisymétrique,

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = 2\langle AX(t) \,|\, X(t)\rangle = 0.$$

La dérivée de la fonction f étant identiquement nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$, on en déduit que f est constante et par conséquent que $\|X(t)\|$ ne dépend pas de t.

► Réciproquement, si f est constante pour chaque solution de l'équation différentielle, alors en particulier, quelle que soit la condition initiale $(t = 0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$,

$$0 = f'(0) = 2\langle AX(0) \,|\, X(0)\rangle = 2\langle Ax_0 \,|\, x_0\rangle.$$

D'après le lemme initial, on en déduit que la matrice A est antisymétrique.

✍ *On peut aussi remarquer que la solution générale de l'équation différentielle peut s'écrire*

$$X(t) = \exp(tA).x_0$$

et donc, dans une base orthonormée,

$$\begin{aligned}\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \|X(t)\|^2 &= x_0^\top.[\exp(tA)]^\top.\exp(tA).x_0\\ &= x_0^\top.\exp(tA^\top).\exp(tA).x_0\\ &= x_0^\top.\exp(-tA).\exp(tA).x_0 = x_0^\top.x_0 = \|X(0)\|^2\end{aligned}$$

puisque $\exp(-M) = [\exp(M)]^{-1}$ *pour toute matrice* M.

Solution 73 rms132-750

1. Par définition, l'hyperplan H est le noyau d'une forme linéaire φ non identiquement nulle sur E. Cette forme linéaire φ n'est pas unique : quel que soit le scalaire $\lambda \neq 0$, le noyau de $\lambda \cdot \varphi$ est égal au noyau de φ et donc à H.

Les coefficients $m_{i,j}$ d'une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ sont aussi les coordonnées de cette matrice relatives à la base duale de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Par conséquent, il existe une, et une seule, famille $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de scalaires tels que

$$\forall\, M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(M) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}m_{i,j}.$$

✍ *Il s'agit ici de la décomposition de* φ *dans la base duale de la base canonique de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *(qui est la base canonique de l'espace dual de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$*).*

En notant $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on obtient

$$\varphi(M) = \operatorname{tr}(A^\top.M)$$

et par conséquent

$$M \in H \iff \operatorname{tr}(A^\top.M) = 0.$$

2. Comme la matrice $A^\top$ n'est pas la matrice nulle, son rang r est supérieur à 1 et elle est équivalente à la matrice

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

et par conséquent équivalente à la matrice

$$K_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & 1 & & \\ 1 & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(obtenue par permutation circulaire des r premières colonnes de J_r). Il existe donc deux matrices inversibles P_1 et Q_1 telles que la trace de la matrice

$$K_r = Q_1^{-1}.A^\top.P_1$$

soit nulle (tous les coefficients diagonaux sont nuls).

On en déduit que

$$\varphi(P_1Q_1^{-1}) = \operatorname{tr}(A^\top.P_1Q_1^{-1}) = \operatorname{tr}(Q_1^{-1}.A^\top.P_1) = \operatorname{tr}(K_r) = 0$$

et donc que l'hyperplan H contient la matrice inversible $P_1Q_1^{-1}$.

✍ *On rappelle que $GL_n(\mathbb{R})$ est un groupe multiplicatif : le produit de deux matrices inversibles de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est encore une matrice inversible de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.*

Solution 74 rms132-1114

1. Avec $y = x$ et la symétrie du produit scalaire,

$$\langle f(x)\,|\,x\rangle = -\langle x\,|\,f(x)\rangle = -\langle f(x)\,|\,x\rangle$$

donc $\langle f(x)\,|\,x\rangle = 0$ pour tout $x \in E$.

Par antisymétrie de f,

$$\langle f^2(x)\,|\,x\rangle = \langle f\big(f(x)\big)\,|\,x\rangle = -\langle f(x)\,|\,f(x)\rangle = -\big\|f(x)\big\|^2$$

donc $\langle f^2(x)\,|\,x\rangle \leqslant 0$ pour tout $x \in E$.

2. Dans une base orthonormée de E, la propriété d'antisymétrie de f se traduit matriciellement par

$$\forall\, X, Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad (AX)^\top.Y = -X^\top.(AY)$$

c'est-à-dire

$$X^\top.A^\top.Y = -X^\top.A.Y$$

ou encore

$$X^\top.(A^\top + A).Y = 0.$$

Cette propriété étant vérifiée pour *toutes* les matrices colonnes X et Y de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on en déduit que $A^\top + A = 0_n$, c'est-à-dire

$$A^\top = -A.$$

✍ *La réciproque est vraie : si $\mathscr{B}$ est une base orthonormée et si la matrice $A = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est antisymétrique, alors l'endomorphisme f est antisymétrique.*

3. Le déterminant d'une matrice carrée quelconque est toujours égal au déterminant de sa transposée. Par conséquent,

$$\det A = \det A^\top = \det(-A) = (-1)^n \det A.$$

Si f est inversible, alors $\det A \neq 0$ et par conséquent $(-1)^n = 1$. La dimension de E est donc paire.

4. La matrice de f^2 relative à la base $\mathscr{B}$ est égale à $A^2 = -A^\top.A$. Elle est donc symétrique réelle et comme la base $\mathscr{B}$ est orthonormée, on en déduit que f^2 est un endomorphisme symétrique. En particulier (Théorème spectral), l'endomorphisme f^2 est diagonalisable.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de f^2 et si $x_0 \neq 0_E$ est un vecteur propre de f^2 associé à λ, alors

$$\lambda \|x_0\|^2 = \langle f^2(x_0) \,|\, x_0 \rangle \leqslant 0.$$

Or $\|x_0\|^2 > 0$ (puisque $x_0 \neq 0_E$), donc $\lambda \leqslant 0$.

Solution 75 rms132-1122

1. La matrice A est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable : ses valeurs propres sont réelles et ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

✍ *Je n'ai pas envie de calculer le polynôme caractéristique de A, même si ça ne pose aucune difficulté particulière, je vais me débrouiller autrement.)*

✍ *Pour gagner un peu de place, je vais systématiquement assimiler les matrices colonnes et les vecteurs de $\mathbb{R}^3$.*

▶ La deuxième colonne de la matrice A nous indique que 1 est une valeur propre de A. De plus, le rang de

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est égal à 2, donc $\operatorname{Ker}(A - I_3) = \mathbb{R} \cdot (0, 1, 0)$.

▶ La trace de A est égale à 3 et comme A est diagonalisable, il existe deux réels $1 \pm \alpha$ tels que $\operatorname{Sp}(A) = \{1 - \alpha;\ 1;\ 1 + \alpha\}$.
Le déterminant de A est égal à -3 (calcul rapide) et aussi à $1 - \alpha^2$, donc $\alpha = 2$ et

$$\operatorname{Sp}(A) = \{-1;\ 1\ 3\}.$$

▶ Comme

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

on a $\operatorname{Ker}(A + I_3) = \mathbb{R} \cdot (1, 0, -1)$ et $\operatorname{Ker}(A - 3I_3) = \mathbb{R} \cdot (1, 0, 1)$.

▶ En posant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on a donc

$$P^{-1}AP = \Delta \overset{\text{déf.}}{=} \operatorname{Diag}(-1,\ 1,\ 3)$$

d'après la formule de changement de base (les colonnes de P forment une base de vecteurs propres de A, respectivement associés aux valeurs propres -1, 1 et 3).

✍ *On constate que les trois droites propres sont, comme annoncé, deux à deux orthogonales.*
On aurait pu choisir une base orthonormée de vecteurs propres (ce qui nous aurait donné une matrice de passage P orthogonale), mais ici, ce n'est pas franchement utile et j'ai privilégié la simplicité de la matrice.

2. En posant

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},$$

il s'agit ici de résoudre l'équation différentielle linéaire et homogène du premier ordre (sous forme résoluble)

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad X'(t) = A.X(t).$$

Nous allons résoudre ce système en utilisant les éléments propres de A.

✍ *Ce système différentiel est mal choisi : il s'agit en fait de résoudre d'une part l'équation différentielle $y' = y$ et d'autre part le système*

$$\begin{cases} x' = 2x + z \\ z' = x + 2z \end{cases}$$

qui est associé à une matrice de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$: on n'est donc pas vraiment en dimension 3...

❧ **Première méthode.**
En posant

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad Y(t) = P^{-1}.X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix},$$

on constate que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} X'(t) = A.X(t) &\iff P^{-1}.X'(t) = P^{-1}.A.X(t) \\ &\iff (P^{-1}X)'(t) = (P^{-1}AP).(P^{-1}.X)(t) \\ &\iff Y'(t) = \Delta.Y(t). \end{aligned}$$

Il s'agit donc en fait de résoudre le système différentiel (découplé) suivant.

$$\begin{cases} u'(t) = -u(t) \\ v'(t) = v(t) \\ w'(t) = 3w(t) \end{cases}$$

La solution générale est de la forme

$$u(t) = K_1 e^{-t}, \qquad v(t) = K_2 e^{t}, \qquad w(t) = K_3 e^{3t}$$

donc $X = (x, y, z)$ est une solution du système étudié si, et seulement si, il existe trois constantes d'intégration K_1, K_2 et K_3 telles que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = P.Y(t) = \begin{pmatrix} K_1 e^{-t} + K_3 e^{3t} \\ K_2 e^{t} \\ -K_1 e^{-t} + K_3 e^{3t} \end{pmatrix}.$$

✍ *Le système différentiel étant maintenant résolu, on doit considérer que l'exercice est terminé.*
Cela dit, le cours nous dit que la solution X peut s'exprimer en fonction de la position initiale $X(0)$ à l'aide de l'exponentielle de matrice :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \exp(tA).X(0)$$

avec

$$\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = Y(0) = P^{-1}X(0) = \begin{pmatrix} \dfrac{x(0) - z(0)}{2} \\ y(0) \\ \dfrac{x(0) + y(0)}{2} \end{pmatrix}.$$

On en déduit (après avoir calculé P^{-1}) que

$$X(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{e^{3t} + e^{-t}}{2} & 0 & \dfrac{e^{3t} - e^{-t}}{2} \\ 0 & e^{t} & 0 \\ \dfrac{e^{3t} - e^{-t}}{2} & 0 & \dfrac{e^{3t} + e^{-t}}{2} \end{pmatrix}}_{\exp(tA)} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix}$$

et comme la colonne $X(0)$ est quelconque, on peut en déduire $\exp(tA)$ par identification.
Mais ce calcul est plutôt fastidieux.

❧ **Deuxième méthode**
On a trouvé une base orthogonale de vecteurs propres pour A :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'après le cours, la projection orthogonale P_k sur la droite $\mathbb{R}\cdot U_k$ est donnée par

$$P_k = \frac{U_k.U_k^\top}{U_k^\top.U_k}.$$

On en déduit très facilement que

$$P_1 = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix},\quad P_2 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad P_3 = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres associées aux vecteurs propres U_1, U_2 et U_3 étant -1, 1 et 3 respectivement, on en déduit que

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad A^n = (-1)^n\cdot P_1 + 1^n\cdot P_2 + 3^n\cdot P_3$$

et donc que

$$\forall\, t\in\mathbb{R},\quad \exp(tA) = e^{-t}\cdot P_1 + e^t\cdot P_2 + e^{3t}\cdot P_3.$$

On en déduit enfin que la solution générale du système étudié est

$$X(t) = \exp(tA).X(0) = e^{-t}\cdot P_1X(0) + e^t\cdot P_2X(0) + e^{3t}\cdot P_3X(0).$$

✍ *Cette méthode pour calculer $\exp(tA)$ est préférable à la précédente (cet avis n'engage que moi).*

Solution 76 rms132-1139

1. Les deux premières colonnes de A ne sont pas proportionnelles, donc $\operatorname{rg} A \geqslant 2$. Les colonnes C_2, …, C_n sont proportionnelles, donc $\operatorname{rg} A = 2$.

D'après le Théorème du rang, la somme du rang et de la dimension du noyau est égale au nombre de colonnes, donc $\dim\operatorname{Ker} A = n-2$.

2. La matrice A est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable (Théorème spectral).

3. Pour une matrice diagonalisable, la multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre qui lui est associé. Par conséquent, la multiplicité de la valeur propre 0 est égale à $(n-2)$.

✍ *En général, la multiplicité d'une valeur propre est supérieure ou égale à la dimension du sous-espace propre qui lui est associé.*

4. Comme le polynôme caractéristique de A est un polynôme de degré n dont les racines sont les valeurs propres de A, que ce polynôme admet 0 pour racine de multiplicité $(n-2)$ et que ce polynôme est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ (puisque A est diagonalisable), on a

$$\chi_A = X^{n-2}(X-\alpha)(X-\beta).$$

Or la trace de A est la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité, donc

$$1 = \operatorname{tr} A = (n-1)\times 0 + 1\cdot\alpha + 0\cdot\beta$$

donc $\alpha+\beta = 1$: on peut donc noter λ et $(1-\lambda)$, les deux valeurs propres non nulles de A.

✍ *Pour l'instant, on ne sait pas si $\lambda \neq 1/2$, donc rien ne prouve que ces deux valeurs propres soient distinctes.*

5. Comme A est diagonalisable, son polynôme minimal est scindé à racines simples et ses racines sont les valeurs propres de A. Donc

$$\mu_A = X(X-\lambda)(X-1+\lambda)\quad\text{ou}\quad \mu_A = X(X-1/2)$$

(selon que $\lambda\neq 1/2$ ou $\lambda = 1/2$). Par définition, le polynôme minimal est un polynôme annulateur.

Dans les deux cas, le polynôme

$$X(X-\lambda)(X-1+\lambda)$$

est un multiple du polynôme minimal et donc un polynôme annulateur.

✍ *En calculant les coefficients diagonaux de A^2, on trouve que*

$$\operatorname{tr}(A^2) = \Big(\sum_{k=1}^{n} k^2\Big) + \sum_{k=2}^{n} k^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)-3}{3}.$$

Comme A est diagonalisable, on sait aussi que

$$\operatorname{tr}(A^2) = (n-2)\cdot 0^2 + \lambda^2 + (1-\lambda)^2 = 2\lambda^2 - 2\lambda + 1.$$

Donc les valeurs propres λ et $(1-\lambda)$ sont les deux racines de l'équation

$$2X^2 - 2X + 1 = \frac{n(2n+1)(n+1) - 3}{3}.$$

On en déduit d'une part que

$$X(X-\lambda)(X-1+\lambda) = X\cdot\left(X^2 - X + 1 - \frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}\right)$$

et d'autre part que $\lambda \neq 1/2$ (puisque le terme constant, égal au produit des racines, est toujours négatif).

Pour ceux que ce genre de précisions vaines amusent, les valeurs propres λ et $1-\lambda$ sont

$$\frac{1}{2}\cdot\left(1 \pm \sqrt{\frac{2n(2n+1)(n+1)}{3} - 3}\right).$$

Solution 77 rms132-1147

1. Par inégalité triangulaire et homogénéité,

$$0 \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|\lambda_k \cdot x_k\| = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|\,\|x_k\|$$

et d'après l'inégalité de Schwarz,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|\,\|x_k\|\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2\right).$$

2. On dispose d'une famille de n vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n, il suffit donc de démontrer qu'elle est libre pour en déduire qu'il s'agit d'une base de E.

❧ Considérons donc une famille de scalaires $(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ telle que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot (e_k + x_k) = 0_E$$

et donc telles que

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot e_k \right\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k \right\|^2.$$

Comme la famille $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est orthonormée,

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot e_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2.$$

Si les λ_k ne sont pas tous nuls, alors la somme $\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2$ est strictement positive et, d'après la première question,

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k \right\|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2\right) < \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2\right).$$

On en déduit alors que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 < \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2,$$

ce qui est absurde.

La famille $(e_k + x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est donc une base de E.

✍ *En écrivant la matrice de la famille $(e_k + x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ relative à la base orthonormée $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$, on voit que cet exercice est une variante du lemme d'Hadamard sur les matrices à diagonale dominante (qui sont des matrices inversibles).*

Solution 78 rms132-1149

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n = \left[t \mapsto t^n e^{-t^2}\right]$ est continue sur $\mathbb{R}$; elle est négligeable devant e^{-t} (= fonction intégrable de référence) au voisinage de $+\infty$, puisque

$$t^n e^{-t^2} = e^{-t} \cdot \left[t^n e^t e^{-t^2}\right] = e^{-t} \cdot \left[\exp \underbrace{(-t^2 + t + n \ln t)}_{\hookrightarrow 0}\right]$$

Donc la fonction f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$.

❧ Pour tout n impair, la fonction f_n est impaire et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}$ et, par imparité, $I_n = 0$.

❧ Pour n pair, la fonction f_n est paire et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}$.
En intégrant par parties, pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$,

$$I_{2p} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-t^{2p-1}}{2} \cdot (-2te^{-t^2})\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2p-1}{2} \cdot t^{2p-2} e^{-t^2}\, dt = \frac{2p-1}{2} \cdot I_{2(p-1)}.$$

✍ ***Variante avec la fonction*** Γ
Par parité,

$$I_{2p} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} (t^2)^p e^{-t^2}\, dt$$

et le changement de variable $u = t^2$ *nous donne*

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad I_{2p} = \frac{\Gamma(p + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \left(p - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\Gamma(p - \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \left(p - \frac{1}{2}\right) \cdot I_{2(p-1)}$$

grâce à la propriété "bien connue" : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

On en déduit par récurrence que

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^*, \quad I_{2p} = \prod_{k=1}^{p} \frac{2k-1}{2} = \frac{(2p)!}{4^p p!}.$$

2. a. On a démontré que $t^n e^{-t^2}$ était intégrable sur $\mathbb{R}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Par combinaison linéaire, $P(t)Q(t)e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ quels que soient les polynômes P et Q, donc φ est bien une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.
D'après les propriétés de l'intégrale, φ est donc bilinéaire, symétrique et aussi positive puisque

$$\forall\, P \in E,\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad P(t)^2 e^{-t^2} \geqslant 0.$$

Si $\varphi(P,P) = 0$, alors $P(t)^2 e^{-t^2} = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (fonction continue et positive dont l'intégrale est nulle) et par conséquent $P = 0_E$.
Donc φ est bien un produit scalaire sur E.

2. b. Comme $\mathbb{R}_2[X]$ est un sous-espace DE DIMENSION FINIE, la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_2[X]$ est bien définie. Notons p_2, cette projection orthogonale.

► Le projeté $p_2(X^3)$ est l'unique polynôme $aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que

$$\forall\, k \in [\![0,2]\!], \quad \varphi\left(X^3 - (aX^2 + bX + c),\, X^k\right) = 0.$$

On obtient ainsi le système de Gram suivant :

$$\begin{cases} a\varphi(X^2,1) + b\varphi(X,1) + c\varphi(1,1) = \varphi(X^3,1) \\ a\varphi(X^2,X) + b\varphi(X,X) + c\varphi(1,X) = \varphi(X^3,X) \\ a\varphi(X^2,X^2) + b\varphi(X,X^2) + c\varphi(1,X^2) = \varphi(X^3,X^2) \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} aI_2 + bI_1 + cI_0 = I_3 \\ aI_3 + bI_2 + cI_1 = I_4 \\ aI_4 + bI_3 + cI_2 = I_5 \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} aI_2 + cI_0 = 0 \\ bI_2 = I_4 \\ aI_4 + cI_2 = 0 \end{cases}.$$

On déduit de la relation de récurrence entre les I_{2p} que

$$(a,b,c) = \left(0, \frac{I_4}{I_2}, 0\right) = (0, 3/2, 0).$$

✍ *En observant que $\varphi(X,1)=\varphi(X,X^2)=0$, on pouvait se simplifier la tâche.*

$$\begin{cases} \mathbb{R}_2[X] &= \mathrm{Vect}(1,X^2) \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{R}\cdot X \\ p_2(X^3) &= (aX^2+c) + (bX) \end{cases}$$

Il restait à observer que $\varphi(X^3,1)=\varphi(X^3,X^2)=0$: comme X^3 est orthogonal à 1 et à X^2, projeter X^3 sur le sous-espace $\mathbb{R}_2[X]$ ou sur la droite $\mathbb{R}\cdot X$, c'est pareil... et rien n'est plus simple que de projeter sur une droite !

$$p_2(X^3)=\frac{\varphi(X^3,X)}{\varphi(X,X)}\cdot X=\frac{I_4}{I_2}\cdot X$$

▶ D'après le cours, la distance cherchée est égale à $\sqrt{\varphi\big(X^3,X^3-p_2(X^3)\big)}$. Or

$$\varphi\big(X^3,X^3-p_2(X^3)\big)=\varphi(X^3,X^3)-b\varphi(X^3,X)=I_6-\frac{3}{2}\cdot I_4=\frac{3}{4}$$

donc $d(X^3,\mathbb{R}_2[X])=\sqrt{3}/2$.

Solution 79 rms132-1150

Comme les matrices A et $A^\top$ commutent,

$$B^p=(A^\top)^p.A^p=0_n.$$

Or la matrice B est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable (Théorème spectral). Étant diagonalisable et n'admettant que 0 pour valeur propre, la matrice B est donc nulle.

Pour toute matrice colonne $X\in\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a donc

$$0=X^\top.B.X=(AX)^\top.(AX)=\|AX\|^2.$$

Par conséquent, $AX=0$ pour *toute* matrice colonne X et donc $A=0_n$.

Solution 80 rms132-1151

✍ ***Variante classique***

❧ *On considère deux isométries u et v et on suppose que la combinaison convexe*

$$w=\frac{u+2v}{3}$$

est également une isométrie.

Pour tout vecteur x, on a donc

$$\begin{aligned} \|x\|=\|w(x)\| &= \frac{\|u(x)+2v(x)\|}{3} && \text{(homogénéité de la norme)}\\ &\leqslant \frac{\|u(x)\|+2\|v(x)\|}{3} && \text{(inégalité triangulaire)}\\ &\leqslant \frac{\|x\|+2\|x\|}{3}=\|x\|. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\|u(x)+2v(x)\|=\|u(x)\|+\|2v(x)\|$$

et donc (cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire) que les vecteurs $u(x)$ et $2\cdot v(x)$ sont colinéaires et de même sens : il existe donc un réel $\lambda>0$ tel que

$$v(x)=\lambda\cdot u(x).$$

Or u et v sont des isométries, donc

$$\|u(x)\|=\|x\|=\|v(x)\|=\lambda\,\|u(x)\|,$$

donc $\lambda=1$ (en supposant que $x\neq 0_E$).

On a ainsi démontré que

$$\forall\, x\in E,\qquad v(x)=u(x)$$

(propriété qui est évidente pour $x=0_E$).

1. En développant les produits $M.M^\top = M^\top.M$, on obtient après simplifications

$$A.B^\top + B.A^\top = B^\top.A + A^\top.B = 2I_n.$$

2. En multipliant la seconde relation à gauche par B et à droite par $A^\top$, on en déduit que

$$2B.A^\top = I_n + B.A^\top.B.A^\top$$

c'est-à-dire

$$(B.A^\top - I_n)^2 = 0_n.$$

La matrice orthogonale $B.A^\top$ admet donc $(X-1)^2$ pour polynôme annulateur.

❧ **Première fin (très savante)**

D'après le Théorème de réduction des isométries, une matrice dont la seule valeur propre complexe est égale à 1 est la matrice identité, donc $B.A^\top = I_n$, c'est-à-dire $B = A$.

❧ **Deuxième fin (moins savante)**

Notons u, l'endomorphisme de E représenté par la matrice $M = B.A^\top$ dans une BON $\mathscr{B}_0$. Comme u admet un polynôme annulateur scindé, il est trigonalisable : il existe donc une base $\mathscr{B}$ telle que $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ soit une matrice triangulaire supérieure.

D'après l'algorithme de Gram-Schmidt, il existe une BON $\mathscr{B}_1$ telle que la matrice de passage $Q = \mathfrak{Mat}(\mathscr{B} \to \mathscr{B}_1)$ soit triangulaire supérieure. Par conséquent,

$$T = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_1}(u) = Q^{-1} \times \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \times Q$$

est une matrice triangulaire (en tant que produit de trois matrices triangulaires supérieures) et orthogonale (puisqu'elle représente l'isométrie u dans la BON $\mathscr{B}_1$).

De plus, comme u admet $(X-1)^2$ comme polynôme annulateur, tous les coefficients diagonaux de la matrice triangulaire T sont égaux à 1 (ce sont les valeurs propres de u). La seule matrice orthogonale dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1 est l'identité, donc

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_1}(u) = I_n$$

et par conséquent $u = I_E$, ce qui prouve que $A = B$.

Solution 81 rms132-1152

1. D'après les règles du produit matriciel par blocs,

$$M^\top.M = \begin{pmatrix} 1 + C^\top.C & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & I_n + C.C^\top \end{pmatrix}.$$

De plus, $C^\top.C = \|C\|^2 \geqslant 0$ (pour le produit scalaire canonique sur les matrices colonnes), donc $1 + C^\top.C > 0$.

Par ailleurs, si la colonne X appartient au noyau de $(I_n + C.C^\top)$, alors

$$0 = X^\top.(I_n + C.C^\top)X = X^\top.X + (C^\top.X)^2 \geqslant \|X\|^2 \geqslant 0$$

donc $X = 0$. La matrice carré $(I_n + C.C^\top)$ est donc injective et par conséquent inversible.

Comme $M^\top.M$ est diagonale par blocs et que les blocs diagonaux sont inversibles, la matrice $M^\top.M$ est inversible.

2. On vérifie que $M.M^\top = M^\top.M$ (ça n'a rien d'évident *a priori*, il est nécessaire de poser le calcul). Par conséquent, en posant $Q = M^{-1}.M^\top$,

$$Q.Q^\top = (M^{-1}.M^\top).\left[M.(M^{-1})^\top\right] = M^{-1}.M.M^\top.(M^{-1})^\top = I_n$$

puisque $(M^{-1})^\top = (M^\top)^{-1}$ (pour toute matrice inversible).

Ce calcul prouve que la matrice Q est orthogonale.

Solution 82 rms132-1201

1. Le rang de (1) (pour $n = 1$) et de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (pour $n = 2$) est égal à 1.

À partir de $n = 3$, les deux premières colonnes de M ne sont pas proportionnelles, donc son rang est au moins égal à 2. Les autres colonnes de M sont égales à C_1 ou à C_2, donc le rang de M est en fait égal à 2.

❧ L'image de M est engendrée par les colonnes de M. On en déduit que

$$\operatorname{Im} M = \operatorname{Vect}(C_1, C_2).$$

2. L'image d'un endomorphisme f est (toujours !) un sous-espace stable par f, donc l'endomorphisme g est bien défini. D'après le cours, si f est diagonalisable, alors l'endomorphisme induit par restriction de f à un sous-espace stable quelconque est également diagonalisable.

✍ *Une histoire de polynôme annulateur — mais si, mais si, mais si, vous vous en souvenez...*

❧ Si on ne se contente pas d'une telle réponse, on peut calculer

$$MC_2 = 2\cdot C_1 = 0\cdot C_2 + 2\cdot C_1 \quad \text{et} \quad MC_1 = (n-2)\cdot C_2 + 2\cdot C_1,$$

donc la matrice de g relative à la base (C_2, C_1) est

$$B = \begin{pmatrix} 0 & n-2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de B est égal à

$$X^2 - 2X + 2(2-n),$$

donc B admet deux valeurs propres distinctes :

$$1 \pm \sqrt{2n-3}.$$

Pour chaque valeur propre λ de g, le sous-espace propre est une droite vectorielle (DEUX valeurs propres distinctes pour un endomorphisme du PLAN $\operatorname{Im} f$) et cette droite vectorielle est dirigée par le vecteur

$$(n-2)\cdot C_2 + \lambda\cdot C_1.$$

✍ *Pour trouver le noyau de $B - \lambda I_2 \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, il suffit de trouver une proportion entre les deux colonnes de cette matrice.*

Solution 83 rms132-1209

1. Les applications $[x \mapsto x]$ et $[x \mapsto \langle a \,|\, x\rangle]$ sont linéaires, donc f est linéaire et comme il est clair que $f(x) \in E$ pour tout $x \in E$, l'application f est bien un endomorphisme.
2. Comme f est un ENDOMORPHISME de E, espace vectoriel DE DIMENSION FINIE, alors f est bijectif si, et seulement si, il est injectif, c'est-à-dire si son noyau est réduit au vecteur nul (Théorème du rang).

Si $x \in \operatorname{Ker} f$, alors $x = \langle a \,|\, x\rangle\, b$, donc le noyau de f est contenu dans le sous-espace $\mathbb{R}\cdot b$.

▶ Si $b \neq 0_E$, alors $\mathbb{R}\cdot b$ est une droite et

$$f(b) = \big(1 - \langle a \,|\, b\rangle\big)\cdot b$$

donc le vecteur $b \neq 0_E$ appartient au noyau de f si, et seulement si, $\langle a \,|\, b\rangle = 1$.

▶ Si $b = 0_E$, alors $f = I_E$ et $\langle a \,|\, b\rangle = 0 \neq 1$.

Bref : le noyau de f est réduit au vecteur nul (et f est bijectif) si, et seulement si, $\langle a \,|\, b\rangle \neq 1$.

Solution 84 rms132-1212

1. Par hypothèse, $A.(A^\top.A) = I_n$. Comme A et $(A^\top.A)$ sont des matrices carrées de même taille, on en déduit (Théorème du rang) que A est inversible et que son inverse est la matrice $A^\top.A$.

✍ *La relation $(A.A^\top).A = I_n$ nous dit aussi que $A^{-1} = A.A^\top$ et donc que les matrices A et $A^\top$ commutent.*

2. Puisque A est inversible et que $A^{-1} = A^\top.A$, la matrice A^{-1} est symétrique. Par conséquent, la matrice A est elle aussi symétrique.
3. D'après l'hypothèse de l'énoncé et la symétrie de A, $A^3 = I_n$, donc A admet

$$X^3 - 1 = (X-1)(X^2 + X + 1)$$

comme polynôme annulateur. On sait que les valeurs propres de A figurent nécessairement parmi les racines de ce polynôme.

Comme A est symétrique réelle, elle est diagonalisable et ses valeurs propres sont *réelles*. Donc le spectre de A est réduit à $\{1\}$ (la seule racine réelle du polynôme annulateur) et comme A est diagonalisable, on en déduit que A est semblable à I_n et donc $A = I_n$.

Solution 85 rms133-1285

1. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & 1 \\ & 0 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 1 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable en tant que matrice symétrique réelle (Théorème spectral).

✍ *La seconde question est la seule intéressante ! Nous allons en présenter deux solutions. Un court rappel pour comprendre la première : si un endomorphisme u est diagonalisable, alors*

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{I}_E).$$

Si u n'est pas inversible, alors $\lambda = 0 \in \mathrm{Sp}(u)$ et si u n'est pas identiquement nul, alors il admet au moins une valeur propre non nulle.

Si λ_0 est une valeur propre non nulle de u et x_0, un vecteur propre de u associé à λ_0, alors

$$x_0 = \frac{1}{\lambda_0} \cdot u(x_0) = u\Big(\frac{1}{\lambda_0} \cdot x_0\Big) \in \mathrm{Im}\, u.$$

Par conséquent,

$$E = \mathrm{Ker}\, u \oplus \Bigg(\underbrace{\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)\setminus\{0\}} \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{I}_E)}_{\subset \mathrm{Im}\, u} \Bigg).$$

Comme u est un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie, le Théorème du rang nous assure que

$$\mathrm{Im}\, u = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)\setminus\{0\}} \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{I}_E)$$

et donc que $E = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u$.

Une dernière précision : cette dernière propriété n'est pas réservée aux endomorphismes diagonalisables ! On peut démontrer qu'elle équivaut au fait que $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, u^2$ ou, si on préfère, au fait que le sous-espace propre associé à 0 soit égal au sous-espace caractéristique associé à 0 ou encore au fait que la multiplicité de 0 comme racine du polynôme caractéristique soit inférieure à 1.

Et maintenant, reprenons !

2. **Première version** : on considère l'endomorphisme $u \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à la matrice A. Il est clair que le rang de u est égal à 2 :

$$\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}(u(e_1), u(e_2)) = \mathrm{Vect}(e_1 + \cdots + e_n,\ e_1)$$

et que, si $n \geqslant 3$,

$$\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}(u - 0 \cdot \mathrm{I}_E) = \mathrm{Vect}(e_3 - e_2, \ldots, e_n - e_2).$$

(Pour $n = 2$, le noyau de u est réduit au vecteur nul. On y reviendra à la question suivante !)

Comme u est diagonalisable, alors

$$E = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u$$

et comme le plan $P = \mathrm{Im}\, u$ est stable par u, on peut définir l'endomorphisme $v \in \mathrm{L}(P)$ induit par restriction de u au plan P. Les valeurs propres non nulles de u sont alors les valeurs propres de v et les vecteurs propres de u associés à des valeurs propres non nulles sont les vecteurs propres de v.

Le plan P admet une base naturelle : $\mathscr{B}_P = \big(u(e_1), u(e_2)\big)$ et comme

$$\begin{aligned} u\big(u(e_1)\big) &= u(e_1) + \sum_{k=2}^{n} u(e_k) = u(e_1) + (n-1)u(e_2) \\ u\big(u(e_2)\big) &= u(e_1), \end{aligned}$$

la matrice de v relative à cette base $\mathscr{B}_P$ est

$$A_P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que les valeurs propres non nulles de A (c'est-à-dire les valeurs propres de A_P) sont les racines du polynôme

$$X^2 - X - (n-1)$$

c'est-à-dire

$$\frac{1 \pm \sqrt{4n-3}}{2}.$$

Cette expression moche n'est pas un problème ! En effet, les vecteurs propres associés à ces valeurs propres (qui sont des vecteurs propres aussi bien pour u que pour v, tout est là !) sont représentés dans la base $\mathscr{B}_P$ par les vecteurs non nuls du noyau de

$$A_P - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ n-1 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Il suffit de regarder la première ligne de cette matrice (dont le rang est égal à 1 puisque λ est une valeur propre de A_P...) pour en déduire que les vecteurs propres de A_P associés à la valeur propre λ sont proportionnels à

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

et on en déduit que

$$\operatorname{Ker}(u - \lambda I_E) = \mathbb{R} \cdot \big[u(e_1) + (\lambda - 1) \cdot u(e_2)\big] = \mathbb{R}\Big[\lambda \cdot e_1 + \sum_{k=2}^{n} e_k\Big].$$

Deuxième version : Comme la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0 (alias le noyau) est égale à $(n-2)$, la somme des dimensions des autres sous-espaces propres est égale à 2 et il y a donc au plus deux valeurs propres non nulles (peut-être une valeur propre double ?). Comme A est diagonalisable, son polynôme minimal est scindé à racines simples et par conséquent son degré est au plus égal à 3. (De plus, comme $0 \in \operatorname{Sp}(A)$, le terme constant du polynôme minimal est nul.)

On prend le temps de poser le calcul :

$$A^2 = \begin{pmatrix} n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 2n-1 & n & \cdots & n \\ n & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

si bien que la famille (I_n, A, A^2) est libre et que

$$A^3 = A^2 + (n-1)A,$$

ce qui prouve que le polynôme minimal de A est égal à

$$X^3 - X^2 - (n-1)X.$$

On en déduit sans difficulté les trois valeurs propres de A et les sous-espaces propres comme plus haut.

✍ *La dimension des sous-espaces propres nous permet d'en déduire que le polynôme caractéristique de A est égal à*

$$X^{n-2}\big(X - X - (n-1)\big).$$

3. Comme le rang de A est égal à 2, il n'y a que deux cas possibles :
— si $n \geqslant 3$, alors la matrice A n'est pas inversible et $\det A = 0$;
— si $n = 2$, alors

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Solution 86 rms134-1436-1566

✍ *L'hypothèse sur les normes signifie que l'application linéaire f est continue et que $|f| \leqslant 1$. On en déduit par récurrence que*

$$\forall\, u \in E,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \left\|f^n(u)\right\| \leqslant \|u\|$$

et donc que $|f^n| \leqslant 1$.

1. Comme $x \in \operatorname{Im}(f-I)$, il existe bien $y \in E$ tel que $x = f(y) - y$.
Comme de plus $x \in \operatorname{Ker}(f-I)$, alors $f(x) = x$, donc

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad x = f^k(x) = f^k\big(f(y) - y\big) = f^{k+1}(y) - f^k(y).$$

On en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad n \cdot x = \sum_{k=0}^{n-1} f^{k+1}(y) - f^k(y) = f^n(y) - y$$

et donc que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad x = \frac{1}{n} \cdot \big(f^n(y) - y\big).$$

2. On en déduit en particulier que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \|x\| \leqslant \frac{\left\|f^n(y)\right\| + \|y\|}{n} \leqslant \frac{2\|y\|}{n}.$$

Cette propriété étant vraie pour tout entier $n \geqslant 1$, on en déduit par passage à la limite que $x = 0_E$.
❧ Nous venons de montrer que les deux sous-espaces vectoriels

$$\operatorname{Ker}(f-I) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(f-I)$$

sont en somme directe. Comme E est un espace vectoriel de dimension finie et que f est un endomorphisme de E, on déduit du théorème du rang que

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker}(f-I) + \dim \operatorname{Im}(f-I)$$

et donc que

$$E = \operatorname{Ker}(f-I) \oplus \operatorname{Im}(f-I).$$

3. Soit $x \in E$. D'après la première question, il existe deux vecteurs

$$x_1 \in \operatorname{Ker}(f-I) \qquad \text{et} \qquad x_2 \in \operatorname{Im}(f-I)$$

tels que $x = x_1 + x_2$. On a donc $f(x_1) = x_1$ et il existe un vecteur $y_2 \in E$ tel que $x_2 = f(y_2) - y_2$. On vérifie par récurrence que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad f^k(x) = x_1 + f^k(x_2) = x_1 + f^{k+1}(y_2) - f^k(y_2).$$

Par conséquent,

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^*, \quad v_p(x) = x_1 + \frac{1}{p+1} \cdot \big(f^{p+1}(y_2) - y_2\big).$$

On en déduit que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\left\|v_p(x) - x_1\right\| &= \frac{1}{p+1}\left\|f^{p+1}(y_2) - y_2\right\| \\ &\leqslant \frac{1}{p+1}\left(\left\|f^{p+1}(y_2)\right\| + \|y_2\|\right) \\ &\leqslant \frac{2}{p+1}\|y\|_2.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{p \to +\infty} v_p(x) = x_1$$

où x_1 est le projeté de x sur $\operatorname{Ker}(f-I)$ parallèlement à $\operatorname{Im}(f-I)$.

✍ *Ce qui précède est vraie pour n'importe quel espace vectoriel normé de dimension finie, que la norme soit associée à un produit scalaire ou pas...*

Complément

❧ On a utilisé (deux fois !) plus haut que, pour tout vecteur $x_2 \in \mathrm{Im}(f-I)$, il existait un vecteur $y_2 \in E$ tel que $x_2 = f(y_2) - y_2$. Bien entendu, un tel vecteur y_2 n'est pas unique !

$$f(y_2) - y_2 = f(y_2') - y_2' \iff y_2' - y_2 \in \mathrm{Ker}(f-I)$$

Comme E est un espace euclidien,

$$E = \mathrm{Ker}(f-I) \overset{\perp}{\oplus} [\mathrm{Ker}(f-I)]^\perp$$

et la projection orthogonale π_2 sur $[\mathrm{Ker}(f-I)]^\perp$ est bien définie.

Si $y_2 \in E$ vérifie $f(y_2) - y_2 = x_2$, alors on pose $y_2' = \pi_2(y_2)$ et on a donc

$$y_2 = y_2' + \underbrace{[y_2 - y_2']}_{\in \mathrm{Ker}(f-I)}$$

ce qui prouve que $f(y_2') - y_2' = x_2$. Il existe donc un vecteur $y_2' \in [\mathrm{Ker}(f-I)]^\perp$ tel que $x_2 = f(y_2') - y_2'$.

✍ *Après avoir analysé la situation, nous passons à la synthèse.*

❧ Considérons l'application linéaire

$$\varphi \ : \ [\mathrm{Ker}(f-I)]^\perp \to \mathrm{Im}(f-I)$$

définie par

$$\forall\, y \in [\mathrm{Ker}(f-I)]^\perp, \quad \varphi(y) = f(y) - y.$$

D'après l'analyse qui précède, cette application linéaire est surjective. De plus, cette application est injective :

$$y \in \mathrm{Ker}\,\varphi \iff y \in [\mathrm{Ker}(f-I)]^\perp \cap \mathrm{Ker}(f-I) = \{0_E\}.$$

L'application φ est donc un isomorphisme de $[\mathrm{Ker}(f-I)]^\perp$ sur $\mathrm{Im}(f-I)$.

❧ Comme $[\mathrm{Ker}(f-I)]^\perp$ est un espace vectoriel de dimension finie, sa sphère unité S est compacte (elle est fermée et bornée) et l'application linéaire φ est continue. L'application numérique $\|\varphi\|$ est donc bornée et atteint ses bornes sur S.

Comme l'application linéaire φ est injective et que le vecteur nul n'appartient pas à S, l'application φ ne s'annule pas sur S et l'application $\|\varphi\|$ ne prend que des valeurs <u>strictement</u> positives sur S.

Il existe donc deux réels <u>strictement</u> positifs α et β et deux vecteurs unitaires y_m et y_M de $[\mathrm{Ker}(f-I)]^\perp$ tels que

$$\forall\, y \in S, \quad 0 < \alpha = \big\|\varphi(y_m)\big\| \leqslant \big\|\varphi(y)\big\| \leqslant \big\|\varphi(y_M)\big\| = \beta.$$

✍ *Les valeurs α et β sont respectivement le minimum et le maximum atteint par l'application*

$$\|\varphi\| \ : \ [\mathrm{Ker}(f-I)]^\perp \to \mathbb{R}$$

sur la sphère unité de $[\mathrm{Ker}(f-I)^\perp$.

On en déduit (par linéarité de φ et homogénéité de la norme) que

$$\forall\, y \in [\mathrm{Ker}(f-I)]^\perp, \quad \alpha\|y\| \leqslant \big\|\varphi(y)\big\| \leqslant \beta\|y\|$$

et donc (puisque φ est un isomorphisme) que

$$\forall\, x \in \mathrm{Im}(f-I), \quad \frac{1}{\beta}\|x\| \leqslant \big\|\varphi^{-1}(x)\big\| \leqslant \frac{1}{\alpha}\|x\|.$$

❧ Notons π, la projection sur $\mathrm{Ker}(f-I)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(f-I)$. On sait que $I-\pi$ est la projection sur $\mathrm{Im}(f-I)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f-I)$ et, comme E est un espace vectoriel de dimension finie, on sait que ces deux endomorphismes de E sont des applications linéaires continues.

On a démontré dans l'exercice que la suite d'applications linéaires $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait <u>simplement sur E</u> vers la projection π.

❧ On a démontré plus haut que

$$v_p(x) = \pi(x) + \frac{1}{p+1} \cdot (f^{p+1} - I)\big(\varphi^{-1} \circ (I-\pi)(x)\big)$$

pour tout $x \in E$. On a donc

$$v_p = \pi + \frac{1}{p+1} \cdot (f^{p+1} - I) \circ \varphi^{-1} \circ (I-\pi)$$

et par conséquent, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\left|\nu_p - \pi\right| &\leqslant \frac{1}{p+1} \cdot \left|f^{p+1} - I\right| \left|\varphi^{-1}\right| \left|I - \pi\right| \\ &\leqslant \frac{1}{p+1} \cdot \left(\left|f^{p+1}\right| + \left|I\right|\right) \left|\varphi^{-1}\right| \left|I - \pi\right| \\ &\leqslant \frac{2}{p+1} \cdot \frac{1}{\alpha} \left|I - \pi\right|.\end{aligned}$$

Cela prouve que

$$\lim_{p \to +\infty} \left|\nu_p - \pi\right| = 0$$

ou, autrement dit, que la suite d'applications linéaires $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur la sphère unité de E vers la projection π.

Solution 87 rms134-1437

1. Comme P et Q sont des polynômes, la fonction $[t \mapsto P(t)Q(t)]$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc l'intégrale $\langle P \,|\, Q \rangle$ est bien définie (premier théorème : condition suffisante d'existence d'une intégrale).

Il est alors clair que $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ est une application bilinéaire et symétrique à valeurs réelles.

Comme la fonction $\left[t \mapsto P(t)^2\right]$ est positive et que les bornes de l'intégrale sont dans l'ordre croissant, l'intégrale $\langle P \,|\, P \rangle$ est positive (deuxième théorème : positivité de l'intégrale).

Comme la fonction $\left[t \mapsto P(t)^2\right]$ est **continue** et positive et que la longueur de l'intervalle d'intégration est **strictement positive**, si l'intégrale $\langle P \,|\, P \rangle$ est nulle, alors la fonction $\left[t \mapsto P(t)^2\right]$ est nulle sur l'intervalle d'intégration $[0,1]$ (troisième théorème : nullité de l'intégrale).

Comme P est un polynôme et qu'il possède une infinité de racines (= tous les réels entre 0 et 1 au moins), c'est le polynôme nul (quatrième théorème : caractérisation du polynôme nul).

Par conséquent, $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ est bien une forme bilinéaire, symétrique, définie positive, c'est-à-dire un produit scalaire.

2. L'expression $\varphi(a,b)$ est égale à $\left\|X^2 - (aX+b)\right\|^2$. D'après le cours, cette expression est minimale si, et seulement si, $(aX+b)$ est le projeté orthogonal du vecteur X^2 sur le sous-espace $\mathrm{Vect}(1,X) = \mathbb{R}_1[X]$.

✍ *La suite de l'exercice consiste donc à mettre en pratique deux caractérisations du projeté orthogonal.*

Première caractérisation

Si $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant d}$ est une base orthonormée du sous-espace F, alors le projeté orthogonal du vecteur x sur F est le vecteur

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^{d} \langle e_k \,|\, x \rangle \cdot e_k.$$

NB : si $(\varepsilon_k)_{1\leqslant k\leqslant d}$ est une base orthogonale de F, alors

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^{d} \frac{\langle \varepsilon_k \,|\, x \rangle}{\left\|\varepsilon_k\right\|^2} \cdot \varepsilon_k.$$

Deuxième caractérisation

Si $(u_k)_{1\leqslant k\leqslant d}$ est une base de F, orthogonale ou non, le projeté orthogonal de x sur F est l'unique vecteur y tel que

$$y \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_d) = F$$

et que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant d, \quad \langle y - x \,|\, u_k \rangle = 0.$$

❧ On connaît une base de F : le couple $(1,X)$. On peut donc choisir $\varepsilon_1 = 1$ et chercher ε_2 orthogonal à ε_1 de la forme

$$\varepsilon_2 = X + \lambda.$$

✍ *On aura reconnu une version élémentaire de l'algorithme de Gram-Schmidt.*

On a donc

$$0 = \langle \varepsilon_1 \,|\, \varepsilon_2 \rangle = \int_0^1 1 \cdot (t+\lambda)\, dt = \frac{1}{2} + \lambda,$$

ce qui donne

$$\varepsilon_2 = X - \frac{1}{2}.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\|\varepsilon_1\|^2 &= \int_0^1 1 \,dt = 1,\\
\|\varepsilon_2\|^2 &= \int_0^1 t^2 - t + \frac{1}{4}\,dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12},\\
\langle X^2 \,|\, \varepsilon_1 \rangle &= \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3},\\
\langle X^2 \,|\, \varepsilon_2 \rangle &= \int_0^1 t^3 - \frac{1}{2}t^2\,dt = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

Le projeté orthogonal de $x = X^2$ sur $F = \mathbb{R}_1[X]$ est donc

$$\frac{1/3}{1}\cdot 1 + \frac{1/12}{1/12}\cdot\left(X - \frac{1}{2}\right) = X - \frac{1}{6}.$$

✍ *Une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$ est*

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|}, \frac{\varepsilon_2}{\|\varepsilon_2\|}\right) = \left(1, \sqrt{12}\cdot\left(X - \frac{1}{2}\right)\right).$$

Il faut penser à la racine carrée !

❧ Le projeté orthogonal du vecteur $x = X^2$ sur $F = \mathbb{R}_1[X]$ est de la forme $y = aX + b$. Il doit vérifier de plus

$$\langle X^2 - (aX+b) \,|\, 1 \rangle = \langle X^2 - (aX+b) \,|\, X \rangle = 0$$

c'est-à-dire

$$\int_0^1 t^2 - at - b\,dt = \int_0^1 t^3 - at^2 - bt\,dt = 0.$$

On obtient ainsi le système

$$\begin{cases} a/2 + b = 1/3 \\ a/3 + b/2 = 1/4 \end{cases}$$

dont la solution est bien entendu $(a, b) = (1, -1/6)$.

Solution 88 rms134-1455

1. Pour tout vecteur $x \in E$,

$$\begin{aligned}
\left\|u^*(x)\right\|^2 &= \left\langle u^*(x) \,\middle|\, u^*(x) \right\rangle = \left\langle x \,\middle|\, (u\circ u^*)(x) \right\rangle \\
&= \left\langle x \,\middle|\, (u^*\circ u)(x) \right\rangle && \text{(u et u^* commutent)}\\
&= \left\langle u(x) \,\middle|\, u(x) \right\rangle = \left\|u(x)\right\|^2.
\end{aligned}$$

2. Comme l'endomorphisme I est auto-adjoint,

$$(u - \lambda I)^* = (u^* - \lambda I).$$

Par conséquent, si l'endomorphisme u est normal, alors

$$(u-\lambda I)^* \circ (u - \lambda I) = (u - \lambda I)\circ(u^* - \lambda I).$$

D'après la question précédente,

$$\forall\, x \in E, \quad \left\|(u^* - \lambda I)(x)\right\|^2 = \left\|(u - \lambda I)(x)\right\|^2$$

et en particulier

$$\forall\, x \in E, \quad u^*(x) - \lambda x = 0_E \iff u(x) - \lambda x = 0_E.$$

Autrement dit : u et u^* ont mêmes valeurs propres et mêmes sous-espaces propres.

✍ *Si $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de E et si la matrice d'un endomorphisme u quelconque relative à cette base $\mathscr{B}$ est la matrice A, alors la matrice de l'adjoint u^* relative à $\mathscr{B}$ est la matrice $A^\top$.*

On en déduit que, d'une manière générale, les endomorphismes u et u^* ont mêmes valeurs propres (les polynômes caractéristiques sont égaux), mais aussi que les sous-espaces propres associés à une même valeur propre ont même dimension puisque

$$\operatorname{rg}(u-\lambda I)=\operatorname{rg}(u^*-\lambda I).$$

L'hypothèse de normalité sur u nous donne un résultat beaucoup plus fort : les sous-espaces propres sont égaux !

❧ **Variante.**
Soit $\lambda\in\mathbb{R}$, une valeur propre de u. Le sous-espace propre

$$F=\operatorname{Ker}(u-\lambda I)$$

est stable par u^* (puisque u et u^* commutent) et donc par $(u^*-\lambda I)$.

Quels que soient les vecteurs x et y dans F,

$$\langle\, u(x)-\lambda x \,|\, y\,\rangle = \langle\, 0_E \,|\, y\,\rangle = 0$$

mais, par définition de l'adjoint,

$$0=\langle\, u(x)-\lambda x \,|\, y\,\rangle = \langle\, x \,|\, u^*(y)-\lambda y\,\rangle.$$

On a remarqué que le vecteur $u^*(y)-\lambda y$ appartenait au sous-espace F et on voit qu'il est orthogonal à tous les vecteurs x de F. Il s'agit donc du vecteur nul et on a ainsi démontré que

$$\forall\, y\in\operatorname{Ker}(u-\lambda I),\qquad u^*(y)=\lambda y.$$

Autrement dit, $\operatorname{Ker}(u-\lambda I)\subset\operatorname{Ker}(u^*-\lambda I)$. Par symétrie, l'inclusion réciproque est vraie et les sous-espaces propres sont donc égaux.

3. Soient λ et μ, deux valeurs propres distinctes de u. On considère un vecteur propre x associé à λ et un vecteur propre y associé à μ. On déduit de la question précédente que $u^*(y)=\mu y$.

Par conséquent,

$$\lambda\langle\, x\,|\,y\,\rangle = \langle\, u(x)\,|\,y\,\rangle = \langle\, x\,|\,u^*(y)\,\rangle = \mu\langle\, x\,|\,y\,\rangle.$$

Comme $\lambda\neq\mu$, on en déduit que $\langle\, x\,|\,y\,\rangle = 0$ et donc que les sous-espaces propres $\operatorname{Ker}(u-\lambda I)$ et $\operatorname{Ker}(u-\mu I)$ sont orthogonaux.

4. Si l'endomorphisme normal u est diagonalisable, alors

$$E=\bigoplus_{\lambda\in\operatorname{Sp}(u)}^{\perp}\operatorname{Ker}(u-\lambda I).$$

En choisissant une base orthonormée de chaque sous-espace propre de u, on obtient alors une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de u.

Dans cette base, la matrice de u est diagonale (base de vecteurs propres) et donc symétrique. Comme la matrice de u relative à une base orthonormée bien choisie est symétrique réelle, on en déduit que $u=u^*$.

Solution 89 rms134-1464

1. (Question de cours)

❧ Si p est une projection orthogonale, alors pour tout $x\in E$, les vecteurs $p(x)$ et $x-p(x)$ sont orthogonaux, donc

$$\|x\|^2=\|p(x)\|^2+\|x-p(x)\|^2\geqslant\|p(x)\|^2$$

(Théorème de Pythagore).

✍ *Cette propriété signifie qu'un projecteur orthogonal est toujours une application linéaire continue et que $|p|\leqslant 1$.*
Comme $p(x)=x$ pour tout vecteur $x\in\operatorname{Im}p$, on en déduit que, en général, $|p|=1$.

❧ Réciproquement, si p n'est pas une projection orthogonale, alors il existe deux vecteurs $u\in\operatorname{Im}p$ et $v\in\operatorname{Ker}p$ tels que $\langle\, u\,|\,v\,\rangle\neq 0$. (En particulier, ces deux vecteurs sont distincts de 0_E.)

Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on pose

$$x(t)=u+t\cdot v\quad\text{si bien que}\quad p[x(t)]=u.$$

En calculant $\|x(t)\|^2$, on vérifie qu'il existe des réels t tels que

$$\|x(t)\|>\|u\|=\|p[x(t)]\|.$$

2. L'ensemble K est une partie de $L(E)$, espace vectoriel de dimension finie. Cet espace peut être muni de la norme $|||\cdot|||$ subordonnée à la norme euclidienne.

❧ D'après la question précédente,

$$\forall\, p \in K, \qquad |||p||| \leqslant 1,$$

donc K est une partie bornée de $L(E)$.

❧ Considérons une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de projecteurs orthogonaux qui converge vers une endomorphisme $f \in L(E)$. Pour tout vecteur $x \in E$,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant \big\|f(x) - p_n(x)\big\| \leqslant |||f - p_n||| \, \|x\|$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} p_n(x) = f(x).$$

De manière analogue, pour tout $x \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&\big\|(f\circ f)(x) - (p_n \circ p_n)(x)\big\| \\
&\qquad \leqslant \big\|(f\circ f)(x) - (p_n\circ f)(x) + (p_n\circ f)(x) - (p_n\circ p_n)(x)\big\| \\
&\qquad \leqslant \big\|(f-p_n)\circ f(x)\big\| + \big\|[p_n\circ(f-p_n)](x)\big\| \qquad \text{(inégalité triangulaire et linéarité de } p_n\text{)} \\
&\qquad \leqslant |||f-p_n||| \, \big\|f(x)\big\| + |||p_n||| \, |||f-p_n||| \, \|x\| \\
&\qquad \leqslant |||f-p_n||| \, \big[\big\|f(x)\big\| + \|x\|\big].
\end{aligned}$$

Comme $|||f - p_n|||$ tend vers 0 (par hypothèse), on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} (p_n\circ p_n)(x) = (f\circ f)(x).$$

Comme tous les p_n sont des projecteurs,

$$\forall\, x \in E,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad p_n(x) = (p_n\circ p_n)(x)$$

donc

$$\forall\, x \in E, \quad f(x) = (f\circ f)(x)$$

par unicité de la limite.

L'endomorphisme f est donc un projecteur. De plus,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |||p_n||| \leqslant 1$$

donc $|||f||| \leqslant 1$.

✍ *La boule unité fermée de $L(E)$ est fermée : comme tous les p_n appartiennent à ce fermé, la limite f appartient encore à ce fermé.*

D'après la question précédente, l'endomorphisme f est donc un projecteur orthogonal. Nous avons donc démontré que K était une partie fermée de $L(E)$.

❧ Comme $L(E)$ est un espace vectoriel de dimension finie, toute partie fermée et bornée de $L(E)$ est compacte. Donc K est compacte.

✍ ***Variante rapide*** *— D'après la première question, la partie K est l'intersection de la boule unité fermée de $L(E)$ et de l'ensemble*

$$[f\circ f - f = \omega_E]$$

des projecteurs de E.

L'application $[f \mapsto f\circ f - f]$ est continue de $L(E)$ dans $L(E)$ (comme $|||\cdot|||$ est une norme d'algèbre, les applications polynomiales sont continues), donc l'ensemble des projecteurs de E est un fermé (image réciproque d'un singleton [=fermé] par une application continue).

L'ensemble K est donc une partie fermée (intersection de deux fermés) contenue dans une partie compacte (la boule unité d'un espace vectoriel de dimension finie), donc K est bien un compact.

Solution 90 rms135-1057

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, une valeur propre de A (en supposant qu'il en existe une). Il existe donc une colonne X *non nulle* telle que $AX = \lambda X$ et par conséquent

$$0 = X^\top.A.X = X^\top.(\lambda X) = \lambda \|X\|^2$$

(où $\|\cdot\|$ est la norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

Comme X est un vecteur propre, le facteur $\|X\|^2$ est non nul et par conséquent, 0 est la seule valeur propre réelle possible pour A.

❧ Si la dimension n est impaire, alors le polynôme caractéristique de A (= un polynôme à coefficients réels de degré impair) admet au moins une racine réelle (Théorème des valeurs intermédiaires) et comme cette racine est une valeur propre de A, cette racine est égale à 0.

Dans ce cas, le déterminant de A est nul.

✍ *Une matrice carrée est inversible si, et seulement si, 0 n'est pas une valeur propre.*

❧ Considéré comme un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, le polynôme caractéristique de A est scindé et comme ses coefficients sont réels, ses racines complexes sont deux à deux conjuguées avec la même multiplicité.

✍ *S'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $Q_\lambda \in \mathbb{C}[X]$ tels que*

$$\chi_A = (X-\lambda)^m Q_\lambda,$$

alors (comme χ_A est un polynôme à coefficients réels)

$$\chi_A = \overline{\chi_A} = (X-\overline{\lambda})^m \overline{Q_\lambda}.$$

Autrement dit, si λ est une racine de multiplicité au moins m de χ_A, alors $\overline{\lambda}$ est aussi une racine de multiplicité au moins m de χ_A.

Le déterminant de A, qui est aussi le produit des racines de χ_A (comptées avec multiplicité), s'écrit alors

$$0^{m_0} \cdot \prod_{k=1}^{r} \lambda_k^{m_k} \prod_{k=1}^{r} \overline{\lambda}^{m_r} = 0^{m_0} \prod_{k=1}^{r} |\lambda_k|^{2m_k} \geqslant 0.$$

✍ *La "multiplicité" m_0 de 0 est ici un entier naturel éventuellement nul (pour ne pas avoir à discuter de l'inversibilité de la matrice A).*

Les autres valeurs propres sont toutes distinctes de 0.

❧ On peut être plus précis, même si ce n'est pas nécessaire pour traiter cet exercice.

❧ Considérons deux colonnes X et Y. Par hypothèse sur A,

$$0 = (X+Y)^\top.A.(X+Y) = X^\top.A.X + X^\top.A.Y + Y^\top.A.X + Y^\top.A.Y = X^\top.(A+A^\top).Y.$$

✍ *On utilise ici l'astuce habituelle lorsqu'on manipule une forme quadratique :*

$$X^\top.A.Y \overset{\star}{=} (X^\top.A.Y)^\top = Y^\top.A^\top.X,$$

l'égalité $\star$ étant justifiée par le fait que le produit $X^\top.A.Y$ est une matrice de $\mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$ et de ce fait une matrice symétrique !

Comme X et Y sont quelconques, on en déduit que $A + A^\top = 0_n$, c'est-à-dire que la matrice A est antisymétrique.

✍ *En prenant $X = E_i$ et $Y = E_j$ (= deux vecteurs de la base canonique de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$), le double produit $E_i^\top.A.E_j$ est égal au coefficient $a_{i,j}$.*

Considérons maintenant une valeur propre complexe λ de A, associée à une colonne propre $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Comme plus haut,

$$\lambda \overline{X}^\top.X = \overline{X}^\top.A.X = X^\top.A^\top.\overline{X} = -X^\top.A.\overline{X}$$

(par antisymétrie de A) et donc, comme les coefficients de la matrice A sont réels,

$$\lambda \overline{X}^\top.X = -\overline{X^\top.A.\overline{X}} = -\overline{\lambda}.\overline{X}^\top.X.$$

Comme X n'est pas la colonne nulle, le produit $\overline{X}^\top.X$ est strictement positif.

✍ *En notant $x_1, \dots, x_n$, les coefficients (complexes) de X, on a*

$$\overline{X}^\top . X = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 > 0.$$

On en déduit que $\lambda = -\overline{\lambda}$ et donc que les valeurs propres imaginaires de la matrice A sont purement imaginaires.

✍ *On a donc démontré que le spectre d'une matrice antisymétrique réelle était contenu dans la droite $[\mathfrak{Re}(z) = 0]$.*

Solution 91 rms135-1404

Considérons les colonnes $X, Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définies par

$$X^\top = \begin{pmatrix} \cos 1 & \cos 2 & \cdots & \cos n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y^\top = \begin{pmatrix} \sin 1 & \sin 2 & \cdots & \sin n \end{pmatrix}.$$

Comme $a_{i,j} = \sin i \cos j + \cos i \sin j$, la j-colonne de A est égale à $\sin j \cdot X + \cos j \cdot Y$ et toutes les colonnes de A sont donc des combinaisons linéaires de X et Y. Par conséquent, le rang de A est inférieur à 2.

❧ Le déterminant de la matrice

$$A_2 = \begin{pmatrix} \sin 2 & \sin 3 \\ \sin 3 & \sin 4 \end{pmatrix}$$

est égal à $\sin 2 \sin 4 - \sin 3 \sin 3 = \frac{(\cos 2 - \cos 6) - (1 - \cos 6)}{2} = \frac{\cos 2 - 1}{2} \neq 0$, donc le rang de A_2 est égal à 2 et le rang de A est supérieur à 2.

✍ *Le rang d'une matrice est supérieur ou égal à r si, et seulement si, il existe au moins un mineur d'ordre r non nul.*
Le déterminant de la matrice A_2 est un mineur principal d'ordre 2, non nul, de A.

❧ On a ainsi démontré que $\operatorname{rg} A = 2$ pour tout entier $n \geqslant 2$; que $\det A = \frac{\cos 2 - 1}{2}$ pour $n = 2$ et $\det A = 0$ pour tout $n \geqslant 3$.

Solution 92 rms135-1408

Si X est la colonne, l'égalité est évidente. Nous supposerons donc que $X \neq 0$ dans la suite.

❧ Munissons l'espace $E = \mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

✍ *Autrement dit : la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est supposé être une base orthonormée.*

On note $x \in E$, le vecteur (non nul) représenté par la colonne X dans la base canonique.

La matrice carrée $X.X^\top$ est la matrice relative à la base canonique de l'application $\|x\| \cdot p$ (où p est la projection orthogonale sur la droite $\mathbb{R} \cdot x$).

✍ *La projection orthogonale p sur la droite $D = \mathbb{R} \cdot x$ engendrée par ce vecteur x est donc définie par*

$$\forall\, y \in E, \quad p(y) = \frac{\langle x \,|\, y \rangle}{\|x\|^2} \cdot x$$

d'où

$$\forall\, y \in E, \quad \|x\|^2 \cdot p(y) = \langle x \,|\, y \rangle \cdot x.$$

Notons A, la matrice canoniquement associée à la projection p. Comme la base canonique est orthonormée, l'égalité vectorielle précédente se traduit matriciellement par

$$\forall\, Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \qquad X^\top.X \cdot A.Y = X^\top.Y \cdot X = X \cdot X^\top.Y$$

et comme cette égalité est vraie pour toutes les colonnes Y, on en déduit que

$$X^\top.X \cdot A = X.X^\top.$$

Comme x est un vecteur non nul, le vecteur $\varepsilon_1 = \frac{x}{\|x\|}$ est bien défini, c'est un vecteur unitaire. D'après le Théorème de la base orthonormée incomplète, il existe une base orthonormée de E de la forme $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$.

Dans cette base, la projection orthogonale p est représentée par la matrice $E_{1,1}$. Par conséquent, les matrices $X^\top.X$ et $\|x\|^2 \cdot E_{1,1} = (X^\top.X) \cdot E_{1,1}$ sont semblables.

✍ *Deux matrices qui représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes (qu'elles soient, ou non, orthonormées), sont semblables.*

Les matrices $I_n + X^\top.X$ et
$$I_n + X^\top.X \cdot E_{1,1} = \mathrm{Diag}(1+\|x\|^2, 1, \dots, 1)$$
sont donc semblables et, en particulier, elles ont même déterminant.

Donc $\det(I_n + X^\top.X) = 1 + \|x\|^2 = 1 + X^\top.X$.

Solution 93 rms135-1409

1. On reconnaît une matrice bien connue et on en déduit que les matrices
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
vérifient $P^{-1}AP = D$.

2. a. Sans surprise,
$$\Delta^2 + \Delta = P^{-1}(X^2 + X)P = P^{-1}AP = D.$$

2. b. D'après la question précédente, D est un polynôme en Δ, donc D et Δ commutent.

❧ Restons élémentaires et posons
$$\Delta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{ce qui donne} \quad D\Delta = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta D = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 2c & 0 \end{pmatrix}.$$
On en déduit que D et Δ commutent si, et seulement si, $b = c = 0$ (les réels a et d étant quelconques), c'est-à-dire si, et seulement si, Δ est diagonale.

✍ *On a travaillé matriciellement pour que le raisonnement soit aussi bref que possible. Mais il faut être conscient qu'il s'agit ici d'un cas particulier simple d'un résultat plus général : si M est une matrice diagonale avec n coefficients diagonaux deux à deux distincts, alors les matrices qui commutent à M sont les matrices diagonales.*

Cette propriété peut se démontrer par un calcul matriciel direct (assez fastidieux) ou vectoriellement en introduisant un endomorphisme diagonalisable dont les sous-espaces propres sont des droites vectorielles (plus élégant).

3. Sachant que $\Delta = \mathrm{Diag}(a, d)$, l'équation $\Delta^2 + \Delta = D$ se traduit par $a^2 + a = 2$, c'est-à-dire $a = 1$ ou $a = -2$, et par $d^2 + d = 0$, c'est-à-dire $d = 0$ ou $d = -1$. Il y a donc quatre solutions pour Δ :
$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
qui donnent quatre solutions pour $X = P\Delta P^{-1}$. Sachant que
$$A = PDP^{-1} = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1},$$
on en déduit que les quatre solutions pour X sont :
$$P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{2}A, \quad P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = A - I_2, \quad P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = -A, \quad P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{-1}{2}A - I_2. \quad (\star)$$

✍ *L'énoncé nous poussait à diagonaliser la matrice A, mais on peut s'en passer, il suffit de connaître un polynôme annulateur de A pour expliciter les solutions de l'équation.*

❧ **Variante avec le polynôme minimal**

Comme $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ n'est pas une homothétie, son polynôme minimal est de degré 2, donc la dimension de la sous-algèbre $\mathbb{R}[A]$ des polynômes en A est égale à 2 et par conséquent $\mathbb{R}[A] = \mathbb{R}_1[A]$. Comme $A^2 = 2A$, le polynôme minimal de A est donc égal à $X^2 - 2X = X(X-2)$.

De même, quelle que soit la matrice $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, la sous-algèbre $\mathbb{R}[M]$ est égale à $\mathbb{R}_1[M]$ (puisque le degré du polynôme minimal de M est inférieur à 2) et si $M^2 + M = A$, alors $A \in \mathbb{R}_1[M]$. Comme $\mathbb{R}_1[M]$ est une sous-algèbre, elle contient donc la sous-algèbre $\mathbb{R}_1[A]$ engendrée par A et, par égalité des dimensions, on a donc : $\mathbb{R}_1[M] = \mathbb{R}_1[A]$. En particulier, $M \in \mathbb{R}_1[A]$ et il existe deux réels α et β tels que $M = \alpha I + \beta A$.

On en déduit que
$$M^2 = \alpha^2 A^2 + 2\alpha\beta A + \beta^2 I = 2\alpha(\alpha+\beta)A + \beta^2 I$$

puisque $A^2 = 2A$. L'équation $X^2 + X = A$ devient alors

$$\alpha(2\alpha + 2\beta + 1)A + \beta(\beta + 1)I = A = 1 \cdot A + 0 \cdot I.$$

Comme A n'est pas une homothétie, le couple (A, I) est une famille libre et l'équation $X^2 + X = A$ est alors équivalente au système

$$\begin{cases} \alpha(2\alpha + 2\beta + 1) &= 1 \\ \beta(\beta + 1) &= 0 \end{cases}$$

ce qui nous donne $\beta = 0$ et $\alpha(2\alpha + 1) = 1$ d'une part et $\beta = -1$ et $\alpha(2\alpha - 1) = 1$ d'autre part. On a ainsi retrouvé les quatre solutions présentées plus haut ($\star$).

Solution 94 rms135-1418

On va simplifier les calculs en remarquant que

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ -B^\top & A^\top \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}.$$

L'hypothèse $\det A = a^2 + b^2 \neq 0$ signifie que le bloc A est inversible. Les quatre matrices A, B, $A^\top$ et $B^\top$ commutent deux à deux car elles appartiennent toutes à la sous-algèbre $\mathbb{K}[U]$ engendrée par la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En effet,

$$A = aI_2 + bU, \quad A^\top = aI_2 - bU, \quad B = cI_2 + dU, \quad B^\top = cI_2 - dU.$$

En remarquant que $U^2 = -I_2$, on peut considérer que $A^\top$ et $B^\top$ sont en quelque sorte les conjuguées de A et B. On ne sera donc pas surpris de constater que

$$A^\top.A = A.A^\top = (a^2 + b^2)I_2 \qquad \text{et que} \qquad B^\top.B = B.B^\top = (c^2 + d^2)I_2.$$

On en déduit immédiatement que

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \cdot A^\top \qquad \text{et que} \qquad (A^\top)^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \cdot A.$$

1. D'après les règles du produit par blocs,

$$M.M^\top = \begin{pmatrix} A.A^\top + B.B^\top & -AB + BA \\ -B^\top.A^\top + A^\top.B^\top & A^\top.A + B^\top.B \end{pmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)I_4.$$

❧ On en déduit que

$$(\det M)^2 = \det M. \det M^\top = \det(M.M^\top) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4$$

et donc que $\det M = \pm(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$.

Il est clair que $\det M$ est une fonction polynomiale de a, b, c et d, donc le signe en facteur est indépendant de a, b, c et d. Il est tout aussi clair que, si $b = c = d = 0$, alors $\det M = +a^4$ pour tout $a \in \mathbb{C}$, donc

$$\forall\, (a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4, \qquad \det M = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2.$$

2. a. D'après la question précédente, si $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$, alors $M \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{C})$ est inversible et donc $\operatorname{rg} M = 4$.

✍ *Comme a, b, c et d sont complexes, la condition $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$ ne signifie pas que les quatre scalaires sont nuls !*

2. b. Cette fois, $\det M = 0$ et nous allons caractériser les vecteurs du noyau de M pour calculer le rang de la matrice.

La colonne $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ appartient au noyau de M si, et seulement si,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = MX = \begin{pmatrix} A & B \\ -B^\top & A^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX_1 + BX_2 \\ -B^\top X_1 + A^\top X_2 \end{pmatrix}.$$

Comme le bloc A est inversible, le bloc $A^\top$ est aussi inversible et

$$\begin{cases} AX_1 + BX_2 = 0 \\ -B^\top X_1 + A^\top X_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} X_1 = -A^{-1}BX_2 \\ X_2 = (A^\top)^{-1}B^\top X_1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} X_1 = -A^{-1}B(A^\top)^{-1}B^\top X_1 \\ X_2 = (A^\top)^{-1}B^\top X_1 \end{cases}.$$

D'après les calculs menés en préambule,

$$A^{-1}B(A^\top)^{-1}B^\top = \frac{1}{(a^2+b^2)^2}A^\top.A.B.B^\top = \frac{c^2+d^2}{a^2+b^2}I_2 = -I_2$$

puisque $c^2+d^2 = -(a^2+b^2)$! La colonne X appartient donc au noyau de M si, et seulement si, $X_2 = (A^\top)^{-1}B^\top X_1$, la colonne $X_1 \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ étant quelconque.

Par conséquent, $\dim \operatorname{Ker} M = \dim \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{C}) = 2$ et, d'après le Théorème du rang, $\operatorname{rg} M = 4 - \dim \operatorname{Ker} M = 2$.

3. D'après la première question, quel que soit $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\det(M - \lambda I_4) = \left((a-\lambda)^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)^2.$$

✍ *On passe en effet de M à $(M - \lambda I_4)$ en remplaçant a par $(a-\lambda)$!*

❧ Si $b^2+c^2+d^2 = 0$, alors le polynôme caractéristique de M admet a comme seule racine (de multiplicité 4). Dans ces conditions,

— ou bien $b = c = d = 0$ et $M = aI_4$ est diagonale ;

— ou bien $(b,c,d) \neq (0,0,0)$ et $M \neq aI_4$, donc M n'est pas diagonalisable.

✍ *On doit savoir que la seule matrice semblable à aI_4 est la matrice aI_4 elle-même !*
Et on doit se souvenir que les coefficients b, c et d sont complexes : de ce fait, la condition $b^2+c^2+d^2 = 0$ n'implique aucunement que $b = c = d = 0$.

❧ Si $b^2+c^2+d^2 \neq 0$, alors l'équation $z^2 = b^2+c^2+d^2$ admet deux solutions complexes distinctes $\pm\omega$ et $\operatorname{Sp}(M) = \{a \pm \omega\}$.

Comme on l'a démontré plus haut, pour chacune des deux valeurs propres, la dimension du sous-espace propre $\operatorname{Ker}(M - \lambda I_4)$ est égale à 2.

✍ *À nouveau, on doit prendre conscience que la matrice $(M - \lambda I_4)$ se déduit de la matrice M en remplaçant a par $(a-\lambda)$.*
Lorsque λ est une valeur propre de M, alors $(M - \lambda I_4)$ n'est pas inversible et on est ainsi ramené au ***2.b.***

La somme des dimensions des sous-espaces propres $(2+2)$ est égale à la dimension de l'espace vectoriel sur lequel la matrice M opère ($\dim \mathbb{C}^4 = 4$), donc la matrice M est diagonalisable.

Solution 95 rms135-1431

1. Si $(\varepsilon_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$ est une base **orthonormée** du sous-espace F, alors le projeté orthogonal $\pi(u)$ sur F du vecteur $u \in E$ est

$$\sum_{k=1}^{r} \langle \varepsilon_k \,|\, u \rangle \cdot \varepsilon_k.$$

✍ *Si $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$ est une base* ***orthogonale*** *de F, alors $(e_k/\|e_k\|)_{1\leqslant k\leqslant r}$ est une base orthonormée et par linéarité à droite du produit scalaire,*

$$\pi(x) = \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle e_k \,|\, u \rangle}{\|e_k\|^2} \cdot e_k.$$

2. Le sous-espace F représenté par le système $6x = 4y = z$ est la droite vectorielle dirigée par le vecteur $e_1 = (2,3,12)$.

✍ *La représentation $6x = 4y = z$ est une manière abrégée d'écrire le système*

$$\begin{cases} 6x & - z = 0 \\ 4y & - z = 0 \end{cases}.$$

En résolvant ce système, on exprime x, y et z en fonction d'un seul paramètre t et on constate que les solutions sont les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui sont proportionnels au vecteur $(2,3,12)$.

D'après la formule du cours (avec $r = 1$), avec $u = (x,y,z)$,

$$\pi(u) = \frac{\langle e_1 \,|\, u \rangle}{\|e_1\|^2} \cdot e_1 = \frac{2x+3y+12z}{4+9+144} \cdot (2,3,12)$$

et on en déduit que

$$\mathfrak{Mat}_{can}(\pi) = \frac{1}{157}\begin{pmatrix} 4 & 6 & 24 \\ 6 & 9 & 36 \\ 24 & 36 & 144 \end{pmatrix}.$$

✍ *La trace est égale à 1 et le rang est égal à 1, ce qui est normal puisqu'on projette sur un sous-espace de dimension 1.*
Pour la structure euclidienne canonique, la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est une base orthonormée. Il est donc normal que la matrice de la projection orthogonale soit une matrice symétrique.

Solution 96 rms135-1432

1. L'intégrale est bien définie quelles que soient les fonctions f et g dans E (fonction continue sur un segment) ; de ce fait, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est clairement une forme bilinéaire et symétrique sur $E \times E$. Cette forme est positive (pour $f = g$, on intègre bornes croissantes une fonction positive).

En fait, cette forme est définie positive : si $\langle f | f \rangle = 0$, alors l'intégrale sur $[0, 2\pi]$ de la fonction continue et positive f^2 est nulle et comme $0 < 2\pi$, on peut en déduire que $f^2(t) = 0$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$ (Théorème de nullité de l'intégrale). Or $f \in E$ est, par hypothèse, 2π-périodique, donc en fait f est nulle sur $\mathbb{R}$ et $f = 0_E$.

Donc $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur E.

2. Nous allons calculer le projeté orthogonal de f de deux manières.

❧ **Version naïve**

Comme $\pi(f) \in G$, il existe deux réels a et b tels que $\pi(f) = ag_1 + bg_2$ et la contrainte $f - \pi(f) \in G^\perp$ se traduit par

$$\langle f - ag_1 - bg_2 | g_1 \rangle = \langle f - ag_1 - bg_2 | g_2 \rangle = 0$$

c'est-à-dire par

$$\begin{cases} a\langle g_1 | g_1 \rangle + b\langle g_1 | g_2 \rangle = \langle f | g_1 \rangle \\ a\langle g_1 | g_2 \rangle + b\langle g_2 | g_2 \rangle = \langle f | g_2 \rangle. \end{cases}$$

✍ *La matrice de ce système est la **matrice de Gram** de la base (g_1, g_2) de G.*

On calcule une nouvelle fois ces cinq intégrales très célèbres.

$$\langle f | g_1 \rangle = \int_0^{2\pi} \sin^2 x \cos x \, dx = \left[\frac{\sin^3 x}{3}\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 px \, dx = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2px}{2} \, dx = \pi$$

$$\langle g_1 | g_1 \rangle = \langle g_2 | g_2 \rangle = \pi$$

$$\langle f | g_2 \rangle = \int_0^{2\pi} \cos 2x \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{-1}{2}\langle g_2 | g_2 \rangle = \frac{-\pi}{2}$$

$$\langle g_1 | g_2 \rangle = \int_0^{2\pi} \cos x \cos 2x \, dx = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3x + \cos x}{2} \, dx = 0.$$

Le système posé devient donc $\{\pi a = 0,\ \pi b = -\pi/2\}$, donc $\pi(f) = -g_2/2$.

❧ **Version sioux (pour ceux qui connaissent vraiment la trigonométrie)**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on sait que

$$f(x) = \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}g_2(x)$$

et on sait (théorie des séries de Fourier) que la famille $(g_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale pour le produit scalaire considéré ici, donc

$$f = \underbrace{\frac{1}{2}g_0}_{\in G^\perp} + \underbrace{\frac{-1}{2}g_2}_{\in G}$$

ce qui nous donne $\pi(f) = -g_2/2$.

✍ *La théorie des séries de Fourier n'est pas au programme, mais elle est une composante essentielle de la culture mathématique.*

Solution 97 rms135-1433

1. On sait que

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),\ \exists\, S = \frac{M + M^\top}{2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ \exists\, A = \frac{M - M^\top}{2} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}), \quad M = S + A \qquad (\star)$$

et donc que $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

✍ *Cette décomposition doit être connue (c'est la même pour toutes les symétries, elle n'est pas spécifique à la transposition).*
En cas de malheur, on peut retrouver cette décomposition en raisonnant par analyse et synthèse : s'il existe une matrice symétrique S et une matrice antisymétrique A telles que $M = S + A$, alors $M^\top = S - A$ (par linéarité de la transposition). En résolvant le système ainsi obtenu (d'inconnues S et A), on retrouve cette décomposition et on prouve par la même occasion que cette décomposition est unique *— et donc que les deux sous-espaces vectoriels sont en fait* ***supplémentaires*** *dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ (sans qu'il soit nécessaire de discuter sur les dimensions des trois espaces).*

✍ *Le produit scalaire canonique sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est défini par*

$$\langle M \,|\, N \rangle = \operatorname{tr}(M^\top.N).$$

Par symétrie du produit scalaire,

$$\forall\, M, N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \langle M \,|\, N \rangle = \langle N \,|\, M \rangle \qquad \text{soit} \qquad \operatorname{tr}(M^\top.N) = \operatorname{tr}(N^\top.M).$$

Par conséquent, si $M^\top = M$ et $N^\top = -N$, on a

$$\langle M \,|\, N \rangle = \operatorname{tr}(M.N) = \operatorname{tr}(-N.M) \overset{(\dagger)}{=} -\operatorname{tr}(M.N) = -\langle M \,|\, N \rangle$$

et donc $\langle M \,|\, N \rangle = 0$.

✍ *On a utilisé (†) la propriété célèbre $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ et la linéarité de la trace.*

On a ainsi démontré que les sous-espaces vectoriels $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ étaient orthogonaux pour le produit scalaire canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
Comme $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on en déduit que les deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires orthogonaux :

$$\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$

2.

✍ *Dans un espace euclidien, la distance d'un vecteur M à un sous-espace F est égale à $\|M - \pi(M)\|$ où $\pi(M)$ est le projeté orthogonal du vecteur M sur le sous-espace F.*
Elle est aussi égale à $\|\pi'(M)\|$ où $\pi'(M)$ est le projeté orthogonal du vecteur M sur le sous-espace $F^\perp$.

D'après la décomposition $(\star)$, le projeté orthogonal de la matrice M sur le sous-espace $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = [\mathcal{S}_n(\mathbb{R})]^\perp$ est

$$\pi'(M) = \frac{M - M^\top}{2}$$

donc

$$d\big(M, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\big) = \frac{1}{2}\|M - M^\top\| = \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{i,j} - a_{j,i})^2}.$$

✍ *On peut aussi écrire cette expression sous la forme suivante :*

$$\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n}(a_{i,j} - a_{j,i})^2}$$

mais ce n'est pas spécialement plus simple.

Solution 98 rms135-1434

En deux opérations de pivot (lesquelles ?),

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \quad + z = 0 \\ \quad y \quad = 0 \end{cases}$$

donc la droite D est dirigée par le vecteur $(1, 0, -1)$.

Pour la suite, il est commode de considérer le vecteur unitaire

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1, 0, -1) = \frac{e_1 - e_3}{\sqrt{2}}.$$

❧ Le vecteur

$$w = \frac{e_1 + e_3}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1, 0, 1)$$

est unitaire lui aussi et il est clairement orthogonal au vecteur u. Ce vecteur w est donc orthogonal à l'axe de la rotation. Par conséquent, le vecteur v défini par $r(v) = w$ est un vecteur unitaire et orthogonal à l'axe de la rotation.

✍ *Une rotation est un automorphisme, donc l'égalité $r(v) = w$ équivaut à $v = r^{-1}(w)$, c'est pourquoi le vecteur v est bien caractérisé par l'égalité $r(v) = w$.*

Une rotation est aussi une isométrie, donc l'égalité $r(v) = w$ implique en particulier $\|v\| = \|w\|$. Et comme une isométrie conserve les produits scalaires et que $r(u) = u$ (puisque u est sur l'axe de la rotation),

$$0 = \langle u | w \rangle = \langle r(u) | r(v) \rangle = \langle u | v \rangle,$$

donc v est bien orthogonal à u.

Le choix $v = e_2$ est donc cohérent avec les propriétés des rotations.

❧ Il est facile de vérifier que la famille (u, v, w) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. La matrice de la rotation r dans cette base est donc une matrice orthogonale de déterminant $+1$. Comme $r(u) = u$ et que $r(v) = w$, cette matrice est donc de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \end{pmatrix}.$$

La troisième est orthogonale aux deux premières, c'est aussi un vecteur unitaire et le déterminant de la matrice est égal à $+1$, donc il n'y a qu'une seule possibilité :

$$\mathfrak{Mat}_{(u,v,w)}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

✍ *L'énoncé n'a pas précisé dans quelle base il fallait donner la matrice de r... Pourquoi ne pas choisir la base la plus simple ?*

❧ Les calculs précédents montrent que $r(w) = -v$. Comme (u, v, w) est une base orthonormée, on sait que

$$\forall X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad X = \langle u | X \rangle \cdot u + \langle v | X \rangle \cdot v + \langle w | X \rangle \cdot w$$

et donc, par linéarité de r,

$$\begin{aligned} \forall X \in \mathbb{R}^3, \quad r(X) &= \langle u | X \rangle \cdot r(u) + \langle v | X \rangle \cdot r(v) + \langle w | X \rangle \cdot r(w) \\ &= \langle u | X \rangle \cdot u + \langle v | X \rangle \cdot w - \langle w | X \rangle \cdot v. \end{aligned}$$

Comme la base canonique est aussi une base orthonormée,

$$\langle u | X \rangle = \frac{x - z}{\sqrt{2}}, \qquad \langle v | X \rangle = y, \qquad \langle w | X \rangle = \frac{x + z}{\sqrt{2}}$$

et par conséquent

$$\forall X \in \mathbb{R}^3, \quad r(X) = \frac{x - z}{2} \cdot (1, 0, -1) + \frac{y}{\sqrt{2}} \cdot (1, 0, 1) - \frac{x + z}{\sqrt{2}} \cdot (0, 1, 0).$$

La matrice de la rotation r relative à la base canonique est donc

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & -1 \\ -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

✍ *Si on refuse de faire un peu de géométrie, il faut être prêt à faire du calcul matriciel. On a obtenu facilement la matrice de r relative à la base $\mathscr{B} = (u, v, w)$ et on cherche à en déduire la matrice relative à la base canonique $\mathscr{B}_0$.*

On connaît la matrice de passage :

$$P = \mathfrak{Mat}(\mathscr{B}_0 \to \mathscr{B}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme on passe d'une base orthonormée à une autre base orthonormée, cette matrice de passage est orthogonale et par conséquent $P^{-1} = P^\top$.

La formule du changement de base nous donne la matrice R relative à la base $\mathscr{B}_0$ de r en fonction de la matrice R' relative à la base $\mathscr{B}$:

$$R' = P^{-1}RP = P^\top.R.P \qquad d'où \qquad R = P.R'.P^\top.$$

Solution 99 rms135-1435

Remarquons pour commencer que

$$\begin{aligned} (p\circ u)^* = (p\circ u) &\iff u^*\circ p^* = p\circ u && \text{(adjoint d'une composée)}\\ &\iff u\circ p = p\circ u \end{aligned}$$

car l'endomorphisme u est auto-adjoint ($u^* = u$) par hypothèse et on sait que toute projection orthogonale est en particulier un endomorphisme auto-adjoint, donc $p^* = p$.

❧ Supposons que $(p\circ u)$ soit auto-adjoint.
Comme p est une projection sur F, on sait que l'égalité $p(y) = y$ équivaut à $y \in F$.

✍ *Pour toute projection (orthogonale ou non),*

$$\forall\, y \in E, \qquad p(y) = y \iff y \in \operatorname{Im} p. \tag{$\star$}$$

Pour tout $x \in F$, on a donc

$$\begin{aligned} (u\circ p)(x) = u\big(p(x)\big) &= u(x) && \text{(car } x\in F\text{)}\\ &= p\big(u(x)\big) && \text{(puisque } p\circ u = u\circ p\text{)} \end{aligned}$$

et puisque $u(x) = p(u(x))$, on a démontré que $u(x) \in \operatorname{Im} p = F$. Le sous-espace F est donc stable par u.

❧ Réciproquement, supposons que le sous-espace F soit stable par u.
D'une part,

$$\begin{aligned} &\forall\, x\in F, \quad p(x) = x \qquad \text{donc} \qquad (u\circ p)(x) = u\big(p(x)\big) = u(x),\\ &\forall\, x\in F, \quad u(x)\in F \qquad \text{donc} \qquad (p\circ u)(x) = p\big(u(x)\big) \overset{(\star)}{=} u(x). \end{aligned}$$

D'autre part, comme F est stable par u et que l'endomorphisme u est auto-adjoint, le sous-espace $F^\perp$ est aussi stable par u. De ce fait,

$$\begin{aligned} &\forall\, x\in F^\perp, \quad p(x) = 0_E \qquad \text{donc} \qquad (u\circ p)(x) = u(0_E) = 0_E,\\ &\forall\, x\in F^\perp, \quad u(x)\in F^\perp \qquad \text{donc} \qquad (p\circ u)(x) = p\big(u(x)\big) = 0_E. \end{aligned}$$

On a ainsi démontré que $p\circ u = u\circ p$ sur F et sur $F^\perp$. Comme E est un espace euclidien, on sait que $E = F\oplus F^\perp$ et on en déduit que

$$\forall\, x\in E, \qquad (p\circ u)(x) = (u\circ p)(x)$$

et donc (cf préambule) que $p\circ u$ est auto-adjoint.

✍ *Si on connaît une décomposition en somme directe*

$$E = \bigoplus_{k=1}^{r} F_k$$

(que les sous-espaces vectoriels F_k soient deux à deux orthogonaux ou non), une application linéaire $f : E \to V$ est caractérisée par ses valeurs sur chaque sous-espace F_k.

Par conséquent, pour démontrer que deux endomorphismes f et g sont égaux sur E, il suffit de vérifier qu'ils sont égaux sur chaque sous-espace F_k.

Solution 100 rms135-1438

1. D'après la formule du produit matriciel,

$$\operatorname{tr}(M^\top.N) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}n_{i,j}.$$

On vérifie que cette application est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive en menant les calculs tantôt sur l'expression "compacte" $\operatorname{tr}(M^\top.N)$, tantôt sur l'expression développée (notamment pour démontrer le caractère défini positif).

Cf cours pour les détails.

2. Par hypothèse, $M^\top.M = N^\top.N = I_n$. On déduit de l'inégalité de Schwarz que

$$\operatorname{tr}(M^\top.N) = \langle M \,|\, N\rangle \leqslant \|M\|\,\|N\| = \sqrt{\operatorname{tr}(M^\top.M)\operatorname{tr}(N^\top.N)} = \sqrt{n^2} = n.$$

3. a. Nous allons proposer plusieurs méthodes, plus ou moins astucieuses.

❧ **Première méthode**

On commence par remarquer que

$$\begin{aligned}\|AB\|^2 = \operatorname{tr}\big((AB)^\top.(AB)\big) &= \operatorname{tr}(BAAB) && (\text{car } A^\top = A,\ B^\top = B)\\ &= \operatorname{tr}(A^2B^2) && (\text{car } \operatorname{tr}(MN) = \operatorname{tr}(NM))\\ &\geqslant 0.\end{aligned}$$

Par symétrie,

$$\|BA\|^2 = \operatorname{tr}(B^2A^2) = \operatorname{tr}(A^2B^2) = \|AB\|^2. \qquad (\star)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\big((AB)^2\big) = \operatorname{tr}(ABAB) = \operatorname{tr}\big((BA)^\top.(AB)\big) = \langle BA \,|\, AB\rangle &\leqslant \|BA\|\,\|AB\| && (\text{inégalité de Schwarz})\\ &\leqslant \operatorname{tr}(A^2B^2). && (\text{avec } \star)\end{aligned}$$

✍ *Il y a égalité si, et seulement si, les deux matrices AB et BA sont colinéaires et de même sens (cas d'égalité dans l'inégalité de Schwarz).*

Si on est très savant, on peut en déduire que cela équivaut à AB = BA. (En effet, si on est très savant, on sait que les produits AB et BA ont même polynôme caractéristique, donc même spectre et dans ces conditions, la constante de proportionnalité est nécessairement égale à 1.)

❧ **Deuxième méthode**

Comme A et B sont symétriques,

$$\operatorname{tr}(A^2B^2) = \operatorname{tr}\big((BA)^\top.(BA)\big) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tr}[(AB)^2] = \operatorname{tr}\big((BA)^\top.(AB)\big).$$

Par conséquent, comme $AB = (BA)^\top$ (puisque A et B sont symétriques),

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(A^2B^2) - \operatorname{tr}[(AB)^2] &= \langle BA \,|\, BA - (BA)^\top\rangle\\ &= \langle M \,|\, M - M^\top\rangle && (\text{en posant } M = BA)\\ &= \left\langle \frac{M+M^\top}{2} + \frac{M-M^\top}{2} \,\middle|\, M - M^\top \right\rangle = \frac{1}{2}\|M - M^\top\|^2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

✍ *Pour le produit scalaire canonique sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, le sous-espace des matrices symétriques et le sous-espace des matrices antisymétriques sont orthogonaux.*

✍ *On retrouve le cas d'égalité sous une forme plus explicite : il y a égalité si, et seulement si, M = AB est symétrique, ce qui revient à dire que A et B commutent.*

❧ **Troisième version**

Cette fois, on applique le Théorème spectral : on choisit une matrice orthogonale P telle que $A' = P^\top.A.P$. Comme P est orthogonale, la matrice $B' = P^\top.B.P$ est encore une matrice symétrique réelle et on vérifie sans peine que

$$\operatorname{tr}\big((AB)^2\big) = \operatorname{tr}\big((A'B')^2\big) \qquad \text{et que} \qquad \operatorname{tr}(A^2B^2) = \operatorname{tr}[(A')^2(B')^2].$$

Dans la suite, nous supposerons donc que la matrice A est diagonale :

$$A = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \qquad B = (\beta_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

❧ Dans ces conditions,

$$AB = (\alpha_i \beta_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

✍ *Multiplier B **à gauche** par une matrice diagonale revient à multiplier les lignes de B par les coefficients diagonaux de A.*
*De même, multiplier B **à droite** par une matrice diagonale revient à multiplier les colonnes de B par les coefficients diagonaux de A.*

$$BA = (\beta_{i,j} \alpha_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

En conservant à l'esprit l'interprétation matricielle des opérations de pivot, on peut éviter de poser certains produits matriciels simples.

Et par conséquent

$$(AB)^2 = (c_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \quad \text{avec} \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_i \beta_{i,k} \alpha_k \beta_{k,i}$$

d'où

$$\mathrm{tr}\big((AB)^2\big) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_i \alpha_k \beta_{i,k} \beta_{k,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_i \alpha_k \beta_{i,k}^2$$

puisque la matrice B est symétrique.

❧ De même,

$$A^2 B^2 = (\alpha_i^2 d_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \quad \text{avec} \quad d_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \beta_{i,k} \beta_{k,j}$$

d'où

$$\mathrm{tr}(A^2 B^2) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 d_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_i^2 \beta_{i,k} \beta_{k,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_i^2 \beta_{i,k}^2$$

puisque B est symétrique (bis).

❧ On en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(A^2 B^2) - \mathrm{tr}\big((AB)^2\big) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_i (\alpha_i - \alpha_k) \beta_{i,k}^2 \\
&= 0 && \text{(on isole les termes pour lesquels } k = i) \\
&\quad + \sum_{1 \leqslant i < k \leqslant n} (\alpha_i^2 - \alpha_i \alpha_k + \alpha_k^2 - \alpha_k \alpha_i) \beta_{i,k}^2 && (\text{car } \beta_{i,k} = \beta_{k,i}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_k)^2 \beta_{i,k}^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

✍ *Cette fois, le cas d'égalité s'exprime par le fait que $\beta_{i,k} = 0$ si, et seulement si, $\alpha_i \neq \alpha_k$.*
En supposant que les valeurs propres de A sont rangées dans l'ordre croissant :

$$\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_n,$$

cela signifie que la matrice B est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux qui correspondent aux sous-espaces propres de A. En particulier, cela implique que A et B commutent !

3. b. On développe et on simplifie avec la propriété $\mathrm{tr}(MN) = \mathrm{tr}(NM)$:

$$\mathrm{tr}\big[(AB + BA)^2\big] = \mathrm{tr}(ABAB + ABBA + BAAB + BABA) = 2\big(\mathrm{tr}[(AB)^2] + \mathrm{tr}(A^2 B^2)\big)$$

et on déduit de la question précédente que

$$\mathrm{tr}\big[(AB + BA)^2\big] \leqslant 4\,\mathrm{tr}(A^2 B^2).$$

Comme les matrices A et B sont symétriques, on déduit de l'inégalité de Schwarz que

$$\mathrm{tr}(A^2 B^2) = \langle A^2 \,|\, B^2 \rangle \leqslant \|A^2\| \, \|B^2\| = \sqrt{\mathrm{tr}(A^4)} \sqrt{\mathrm{tr}(B^2)}$$

et le résultat est démontré.

Solution 101 rms135-1499

1. Par symétrie de la covariance, la matrice S est symétrique réelle, donc diagonalisable (Théorème spectral).

2. Par définition du double produit matriciel et par bilinéarité de la covariance,

$$U^\top.S.U = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} u_i\,\mathbf{Cov}(X_i,X_j)u_j = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\mathbf{Cov}(u_iX_i,u_jX_j)$$
$$= \mathbf{Cov}\Big(\sum_{i=1}^n u_iX_i,\ \sum_{j=1}^n u_jX_j\Big) = \mathbf{V}\Big(\sum_{i=1}^n u_iX_i\Big).$$

3. a. Le Théorème spectral nous dit que la matrice S est diagonalisable mais aussi qu'il existe une base orthonormée de vecteurs propres : il existe donc une base formée de colonnes $V_1,\dots,V_n$ telles que

$$\forall\,1\leqslant i\leqslant n,\quad V_i^\top.V_i=1,\qquad \forall\,1\leqslant i\neq j\leqslant n,\quad V_i^\top.V_j=0\qquad\text{et}\qquad \forall\,1\leqslant i\leqslant n,\quad SV_i=\lambda_i\cdot V_i.$$

✍ *Comme de coutume, nous allons identifier les matrices colonnes de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ aux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.*

Soit $U\in\mathbb{R}^n$. Il existe donc des réels $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ tels que

$$U=\sum_{i=1}^n \alpha_i\cdot V_i \qquad (\star)$$

et comme la base $(V_1,\dots,V_n)$ est une base **orthonormée**,

$$\|U\| = U^\top.U = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2.$$

✍ *Puisque la base est orthonormée, on sait que $\alpha_i = U^\top.V_i$ — mais c'est sans importance ici.*

Par linéarité, on déduit de $(\star)$ que

$$SU=\sum_{i=1}^n \alpha_i\cdot SV_i=\sum_{i=1}^n(\alpha_i\lambda_i)\cdot V_i$$

donc (puisque la famille $(V_1,\dots,V_n)$ est **orthonormée**)

$$U^\top.S.U=\sum_{i=1}^n(\alpha_i)\cdot(\alpha_i\lambda_i)=\sum_{i=1}^n\lambda_i\alpha_i^2.$$

3. b. Comme les valeurs propres sont rangées dans l'ordre décroissant : $\lambda_n\leqslant\cdots\leqslant\lambda_1$, on a donc

$$\forall\,1\leqslant i\leqslant n,\quad \lambda_i\alpha_i^2\leqslant\lambda_1\alpha_i^2\qquad\text{et donc}\qquad U^\top.S.U\leqslant\lambda_1\sum_{i=1}^n\alpha_i^2=\lambda_1\|U\|^2.$$

En divisant par $\|U\|^2>0$ (puisque $U\neq 0$), on en déduit que $f(U)\leqslant\lambda_1$ pour toute colonne $U\neq 0$.

❧ Si U est un vecteur propre de S associé à la valeur propre λ_1, alors

$$U^\top.S.U = U^\top.(\lambda_1\cdot U)=\lambda_1\,\|U\|^2$$

donc $f(U)=\lambda_1$.

Réciproquement, si $f(U)=\lambda_1$, alors $U^\top.S.U=\lambda_1\|U\|^2$, donc

$$\sum_{i=1}^n \underbrace{(\lambda_1-\lambda_i)}_{\geqslant 0}\underbrace{\alpha_i^2}_{\geqslant 0}=0,$$

ce qui prouve que tous les termes sont nuls et donc que $\alpha_i=0$ pour tout i tel que $\lambda_1>\lambda_i$. Par conséquent,

$$U=\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ \lambda_i=\lambda_1}}\alpha_i\cdot V_i\qquad\text{et donc}\qquad SU=\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ \lambda_i=\lambda_1}}\alpha_i\cdot SV_i=\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ \lambda_i=\lambda_1}}\alpha_i\lambda_1\cdot V_i=\lambda_1\cdot U$$

et comme $U\neq 0$ par hypothèse, c'est bien un vecteur propre de S associé à λ_1.

4. a. Il est clair que

$$S = (1-a)I_3 + aJ_3 \qquad \text{où} \qquad J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On sait bien que les valeurs propres de J_3 sont 0 (associée au plan d'équation $x+y+z=0$) et 3 (associée à la droite dirigée par $(1,1,1)$). Donc les valeurs propres de S sont $(1-a)\times 1 + a\times 0 = 1-a$ et $(1-a)\times 1 + a\times 3 = 1+2a$. Comme $0<a<1$, on a $1-a<1<1+2a$, donc $\lambda_1 = 1+2a$ est la plus grande valeur propre de S et le sous-espace propre associé est la droite dirigée par $(1,1,1)$.

✍ *On a exprimé la matrice S comme un polynôme en J_3, ce qui nous a permis d'exprimer les valeurs propres de S en fonction des valeurs propres de J_3 (et de ce polynôme P).*

Comme la restriction de l'application polynomiale P au spectre de J_3 est injective, les sous-espaces propres de S et de J_3 sont les mêmes.

4. b. On en déduit que le maximum étudié est égal à $1+2a$ et que ce maximum est atteint exactement pour les colonnes U de la forme (x,x,x) avec $x \neq 0$.