PRODUITS SCALAIRES

Index des démonstrations rédigées

Chapitre 7 — Espaces préhilbertiens et euclidiens (sans réduction)

Exercice 1 05-01

1. Soit $X = \langle X_1, \dots, X_n \rangle$, la matrice colonne qui représente un vecteur u dans une base orthonormée.

Alors $\|u\|^2 = X^\top.X$ et $\|u\| \geqslant |X_k|$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$.

2.

$$\big|\operatorname{Det}(u_1, \dots, u_n)\big| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \|u_k\|$$

Exercice 2 05-02

Soit u, un endomorphisme d'un espace euclidien E tel que

$$\forall\, x \in E, \quad \big\|u(x)\big\| \leqslant \|x\|.$$

Démontrer que

$$E = \operatorname{Ker}(u - I) \oplus \operatorname{Im}(u - I).$$

On pourra s'intéresser à l'application définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad q(t) = \|x + t \cdot y\|^2 - \big\|u(x + t \cdot y)\big\|^2$$

en prenant $x \in \operatorname{Ker}(u - I)$.

Exercice 3 05-03

On suppose que $\ell^2(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire canonique. L'orthogonal du sous-espace des suites nulles à partir d'un certain rang est réduit à $\{0\}$.

Exercice 4 05-04

$$\min_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} \big[t^3 - (a + bt + ct^2)\big]^2 e^{-t}\, dt = 36$$

Le minimum est atteint en $(a, b, c) = (6, -18, 9)$.

Exercice 5 05-05

L'espace $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

1. La distance de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

au sous-espace $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est égale à $\sqrt{11}$.

2. L'ensemble $H = [\operatorname{tr}(M) = 0]$ est un hyperplan de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ et la distance de I_3 à cet hyperplan est égale à $\sqrt{3}$.

Exercice 6 05-06

L'espace $E = \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

Étant donné $y_0 \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on considère l'équation matricielle

$$Ax = y_0$$

d'inconnue $x \in E$, avec $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On suppose que les colonnes de A sont linéairement indépendantes : $\operatorname{rg} A = p$.

1. Si $n = p$, alors A est inversible et l'équation admet une seule solution, égale à $A^{-1}y_0$.

La matrice colonne $x_0 \in E$ est dite **solution approchée au sens des moindres carrés** lorsque

$$\|y_0 - Ax_0\| = \inf_{x\in E} \|y_0 - Ax\|.$$

2. On suppose que $n > p$.

2. a. L'équation $Ax = y_0$ admet au plus une solution $x_0 \in E$.

2. b. Elle admet une, et une seule, solution approchée au sens des moindres carrés : l'unique vecteur $x_0 \in E$ tel que Ax_0 soit le projeté orthogonal de y_0 sur le sous-espace $\operatorname{Im} A$.

2. c. Ce vecteur x_0 est l'unique solution de l'équation

$$A^\top.Ax = A^\top.y_0.$$

2. d. Si $A^\top.Ax = 0$, alors $\|Ax\| = 0$, donc la matrice $A^\top.A$ est inversible. La matrice $(A^\top.A)^{-1}A^\top$ est parfois appelée **pseudo-inverse** de A.

Exercice 7 05-07

Soient $a_0, \dots, a_n$, des réels.

1. À quelle condition sur les réels $a_0, \dots, a_n$ l'expression

$$\langle P \,|\, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$$

définit-elle un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}_n[X]$?

(On supposera dans la suite que cette condition est remplie.)

2. L'orthogonal du sous-espace

$$F = \Big\{ P \in E \ :\ \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0 \Big\}$$

est la droite vectorielle dirigée par le monôme 1.

3. La distance du monôme X^n au sous-espace F est égale à

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \Big| \sum_{k=0}^{n} a_k^n \Big|.$$

Exercice 8 05-08

Soit $D = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont tous strictement positifs. L'application définie par

$$\forall\, (X, Y) \in E \times E, \quad \varphi(X, Y) = X^\top.D.Y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k y_k$$

est un produit scalaire sur $E = \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 9 05-09

Soit E, un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire. On considère une famille $\mathscr{F} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de vecteurs non nuls tels que

$$\forall\, x \in E, \quad \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \,|\, x \rangle^2 = \langle x \,|\, x \rangle. \tag{$\star$}$$

1. On note F, le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\mathscr{F} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Déterminer l'orthogonal de F. Que peut-on en déduire sur la famille $\mathscr{F}$?

2. Soit $v \in L(E)$. Démontrer que

$$\forall\, x \in E, \quad \langle\, v(x) \,|\, x \,\rangle = 0 \iff v^* = -v.$$

3. On définit $u \in L(E)$ en posant

$$\forall\, x \in E, \quad u(x) = x - \sum_{i=1}^{n} \langle\, x \,|\, e_i \,\rangle\, e_i.$$

Démontrer que $u = u^*$, puis que

$$\forall\, x \in E, \quad \langle\, u(x) \,|\, x \,\rangle = 0.$$

Que peut-on en déduire sur u ? sur la famille $\mathscr{F}$?

4. Démontrer que $\mathscr{F}$ est une base orthonormée de E dans les cas suivants :

4. a. Les vecteurs de $\mathscr{F}$ sont tous des vecteurs unitaires.

4. b. La famille $\mathscr{F}$ est libre.

5. L'espace $E = \mathbb{R}^2$ est muni du produit scalaire canonique. Pour quelle valeur de r la famille $\mathscr{F}$ constituée des vecteurs

$$e_1 = r \cdot (1, 0), \quad e_2 = r \cdot \Big(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\Big), \quad e_3 = r \cdot \Big(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\Big)$$

vérifie-t-elle la relation étudiée ?

Exercice 10 — 05-10

L'espace $E = \mathbb{R}[X]$ est muni du produit scalaire défini par

$$(\, P \,|\, Q \,) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt.$$

On considère la forme linéaire $\varphi = [P \mapsto P(0)]$.

1. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un, et un seul, $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X], \quad P(0) = \int_0^1 P(t)Q_n(t)\,dt.$$

1. b. Si la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $Q_\omega \in E$ (pour la norme $\|\cdot\|$), alors $\varphi(P) = (\, P \,|\, Q_\omega \,)$ pour tout $P \in E$.

2. S'il existe $Q_\omega \in E$ tel que $\varphi(P) = (\, P \,|\, Q_\omega \,)$ pour tout $P \in E$, il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall\, P \in E, \quad \big|P(0)\big| \leqslant K\|P\|.$$

3. a. Il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad P_n(0) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \|P_n\| = 0.$$

3. b. Quelle que soit cette suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(\deg P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

4. La suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle dans E pour $\|\cdot\|$? Et pour $\|\cdot\|_\infty$?

Exercice 11 — 05-11

$$\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 \big(\sqrt{t} - a - bt\big)^2 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = \frac{4}{3} - \frac{69\pi^2}{512}$$

Le minimum est atteint en $(a, b) = ({}^{3\pi}/_{32},\ {}^{15\pi}/_{64})$.

Exercice 12 — 05-12

Soient a, un vecteur non nul de E et k, un réel non nul.

1. Démontrer que l'endomorphisme défini par

$$\forall\, x \in E, \quad f_k(x) = x + k\,\langle\, a \,|\, x \,\rangle\, a$$

est auto-adjoint. Exprimer cet endomorphisme à l'aide de I_E et de la projection orthogonale π sur la droite $\mathbb{R} \cdot a$.

2. À quelle condition sur $k \in \mathbb{R}$ l'endomorphisme f_k est-il une isométrie ?

Exercice 13 — 05-13

Soient E, un espace euclidien et $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_n)$, une famille de vecteurs de E et

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot u_k.$$

Démontrer que

$$\|x\|^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} \|u_k\|^2\Big).$$

Exercice 14 — pg23S4-a

Avec $E = \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$, on pose

$$\forall\, (f, g) \in E \times E, \quad \varphi(f, g) = \int_0^1 f'(t)g'(t)dt + f(0)g(1) + f(1)g(0).$$

Démontrer que φ est un produit scalaire sur E.

Exercice 15 — pg23S4-b

L'espace $E = \mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique. On considère le sous-espace F caractérisé par le système suivant.

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

1. Calculer la matrice relative à la base canonique de p, projection orthogonale sur F.

2. Calculer la distance du point $c = (1, 1, 1, 3)$ au sous-espace F.

Exercice 16 — pg23S4-c

Soient E, un espace euclidien et $f : E \to E$, une application telle que

$$\forall\, (x, y) \in E, \quad \langle\, f(x) \,|\, f(y) \,\rangle = \langle\, x \,|\, y \,\rangle.$$

Démontrer que f est linéaire.

Exercice 17 — pg23S4-d

Soient $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$, des vecteurs de E, espace euclidien de dimension n. Démontrer qu'il est impossible d'avoir

$$\forall\, i \neq j, \quad \langle\, x_i \,|\, x_j \,\rangle < 0.$$

Exercice 18 pg23S5-c

Soient E, un espace euclidien ; $f \in O(E)$, une isométrie vectorielle et F, un sous-espace de E. Démontrer que

$$f_*(F^\perp) = \big(f_*(F)\big)^\perp.$$

Exercice 19 pg23S5-d

Soient E, un espace euclidien et f, un endomorphisme de E qui conserve l'orthogonalité :

$$\forall\, x, y \in E, \qquad \langle\, x \,|\, y \,\rangle = 0 \implies \langle\, f(x) \,|\, f(y) \,\rangle = 0.$$

✍ *Les automorphismes qui conservent l'orthogonalité sont appelées des* ***similitudes****.*

Cet exercice démontre que toute similitude est la composée d'une isométrie vectorielle (g) et d'une homothétie (de rapport $\alpha > 0$).

1. Soient u et v, deux vecteurs unitaires. Calculer $\langle\, u + v \,|\, u - v \,\rangle$.
2. Démontrer qu'il existe un réel positif α tel que

$$\forall\, x \in E, \qquad \big\|f(x)\big\| = \alpha\, \|x\|.$$

3. En déduire qu'il existe une isométrie vectorielle g telle que $f = \alpha \cdot g$.

Exercice 20 pg23S5-e

Soit f, un endomorphisme de l'espace euclidien E. Démontrer que

$$\operatorname{Ker} u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp \quad \text{et que} \quad \operatorname{Im} u^* = (\operatorname{Ker} u)^\perp.$$

Exercice 21 rl25S4-a

L'espace $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille n à coefficients réels est muni de son produit scalaire canonique, défini par

$$\forall\, A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \langle\, A \,|\, B \,\rangle = \operatorname{tr}(A^\top.B).$$

1. Démontrer que le sous-espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques et le sous-espace $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques sont supplémentaires orthogonaux.
2. Déterminer l'orthogonal du sous-espace $D_n(\mathbb{R})$ des matrices diagonales.
3. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Pour toute matrice $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\Phi(M) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{i,j} - m_{i,j})^2.$$

Démontrer que $\Phi(M)$ atteint un minimum lorsque M parcourt le sous-espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que ce minimum est égal à

$$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{i,j} - a_{j,i})^2.$$

Exercice 22 rl25S4-b

L'espace $\mathbb{R}^4$ est muni du produit scalaire canonique. On considère d'une part le vecteur

$$y = (1, 1, 1, 1)$$

et d'autre part le sous-espace

$$F = [x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0] \cap [2x_2 + x_3 + x_4 = 0].$$

1. Calculer la distance du vecteur y au sous-espace F.
2. Donner une base orthonormée de F.

Exercice 23 Off2017-94b

Soient E, un espace euclidien de dimension n et v, un vecteur non nul de E.
1. Si les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ne sont pas tous nuls, alors il existe une base $\mathscr{C} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que

$$v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k.$$

2. La base $\mathscr{C}$ peut-elle être choisie orthogonale ? orthonormée ?

Exercice 24 Off2017-100b

1. Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un, et un seul, polynôme T_n tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos x) = \cos nx.$$

Préciser le degré de T_n.
2. Démontrer que l'application $\langle\, \cdot \,|\, \cdot \,\rangle$ définie par

$$\forall\, P, Q \in \mathbb{R}[X], \quad \langle\, P \,|\, Q \,\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

est un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}[X]$.
3. Démontrer que la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de E pour ce produit scalaire. S'agit-il d'une base orthonormée ?

Exercice 25 Off2017-191

On considère un espace vectoriel réel E muni d'un produit scalaire $\langle\, \cdot \,|\, \cdot \,\rangle$. Sur cet espace, on définit deux types de convergence :

— on dit que la suite de vecteurs $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge fortement** vers le vecteur $\ell \in E$ lorsque

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - \ell\| = 0$$

(il s'agit de la convergence au sens habituel) ;

— on dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge faiblement** vers le vecteur $\ell \in E$ lorsque

$$\forall\, y \in E, \quad \lim_{n\to+\infty} \langle\, x_n - \ell \,|\, y \,\rangle = 0.$$

1. Démontrer l'unicité de la limite pour la convergence faible.
2. Démontrer que la convergence forte implique la convergence faible.

3. Démontrer que la suite de vecteurs $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers $\ell \in E$ si, et seulement si, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers ℓ et si

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = \|x\|.$$

4. En déduire que : si E est un espace euclidien, alors les deux notions de convergence sont équivalentes.

Exercice 26 Off2017-201a

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par

$$\forall\, P, Q \in E, \quad \langle P \,|\, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt.$$

Pour tout $P \in E$, on pose également

$$\varphi(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\, dt.$$

1. Démontrer que φ est une forme linéaire sur E. Déterminer son rang et démontrer que

$$(\operatorname{Ker} \varphi)^{\perp} = \mathbb{R}_0[X].$$

2. Pour $a \in \mathbb{R}$, démontrer que l'application g_a définie par

$$\forall\, P \in E, \quad g_a(P) = P + 2a\varphi(P)$$

est un endomorphisme auto-adjoint de E.

3. Calculer la matrice de g_a relative à la base canonique de E dans le cas $n = 3$. Cet endomorphisme est-il inversible ?

4. On se restreint au cas $n = 3$. Démontrer que l'application f_a définie par

$$\forall\, P \in E, \quad f_a(P) = P + 2a\varphi(P).X$$

est un endomorphisme de E. Calculer la matrice de f_a relative à la base canonique de E. Cet endomorphisme est-il inversible ? Est-il auto-adjoint ?

Exercice 27 Off2017-207b

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quels que soient P et Q dans $E = \mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$\langle P \,|\, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1).$$

1. Démontrer que $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

2. Démontrer que

$$F = \{P \in E \;:\; P(1) = 0\}$$

est un sous-espace de E et préciser sa dimension.

3. Calculer la distance $d(1, F)$.

Exercice 28 Off2017-220a

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Écrire la matrice relative à la base canonique de la projection orthogonale sur le plan

$$H = [x - 2y + z = 0].$$

Exercice 29 Off2017-228a

1. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'intégrale généralisée

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t}\, dt$$

est-elle convergente ?

2. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}, puis démontrer que $I_n = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Démontrer que l'application $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ définie par

$$\forall\, P, Q \in E, \quad \langle P \,|\, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\, dt$$

est un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}[X]$.

4. Vérifier que l'application φ définie par

$$\forall\, P \in E, \quad \varphi(P) = XP'' + (1 - X)P'$$

est un endomorphisme de E.

5. Vérifier que

$$\forall\, P, Q \in E, \quad \big\langle \varphi(P) \,\big|\, Q \big\rangle = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\, dt.$$

En déduire que l'endomorphisme φ est auto-adjoint.

Exercice 30 Off2019-175

L'espace $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire canonique.

1. Démontrer que les sous-espaces vectoriels $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et orthogonaux.

2. Pour $n = 3$, calculer la distance de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

au sous-espace $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque, démontrer que l'ensemble H des matrices de trace nulle est un sous-espace de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On donnera la dimension de ce sous-espace. Calculer la distance de I_n à H.

Exercice 31 Off2020-198b

1. Calculer

$$\int_0^1 t^n \ln t\, dt \quad \text{puis} \quad \int_0^1 t^n \ln^2 t\, dt$$

pour tout $n \geqslant 2$.

2. Calculer le projeté orthogonal de w sur F.

3. Calculer

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (at + b - t\ln t)^2 t^2\, dt.$$

Exercice 32 rms130-525

Démontrer que le rang d'une matrice antisymétrique est pair.

Exercice 33 rms130-922

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique et on considère une application

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le vecteur $f(t)$ n'est pas nul et que la famille

$$\big(f(t), f'(t)\big)$$

est liée. On pose alors

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \frac{f(t)}{\|f(t)\|}.$$

1. Démontrer que l'application g est de classe $\mathscr{C}^1$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le vecteur $g'(t)$ est à la fois colinéaire et orthogonal au vecteur $f(t)$.
2. En déduire l'existence d'un vecteur $e \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) \in \mathbb{R} \cdot e.$$

3. Cette propriété est-elle encore vraie lorsque la fonction f s'annule ?

Exercice 34 rms130-981

Soient U, un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et f, une application de classe $\mathscr{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$.

Démontrer que f est convexe sur U si, et seulement si,

$$\forall\, a, b \in U, \quad f(b) \geqslant f(a) + \langle \nabla f(a) \,|\, b - a \rangle.$$

Exercice 35 rms130-1142

Soit E, l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On pose

$$\forall\, f, g \in E, \quad \langle f \,|\, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt.$$

1. Démontrer que $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. On pose $f_0 = [t \mapsto 1]$ et $f_1 = [t \mapsto t]$ et on note F, le sous-espace de E engendré par f_0 et f_1.
2. a. Démontrer que $\dim F = 2$.
2. b. Calculer $\langle f_0 \,|\, f_1 \rangle$.
3. L'application $g = [t \mapsto e^t]$ appartient-elle à F ?
4. Calculer le projeté orthogonal de g sur F.
5. En déduire

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} (e^t - at - b)^2\,dt.$$

Exercice 36 rms130-1144

On considère un espace euclidien E de dimension $n \geqslant 2$. Étant donnés un vecteur unitaire a et un réel k, on définit l'application f en posant

$$\forall\, x \in E, \quad f(x) = x + k\langle x \,|\, a \rangle \cdot a.$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme de E.
2. Démontrer que

$$\forall\, x, y \in E, \quad \langle f(x) \,|\, y \rangle = \langle x \,|\, f(y) \rangle.$$

3. Pour quels $k \in \mathbb{R}$ l'application f est-elle inversible ?
4. Exprimer $(f \circ f)(x)$ en fonction de $f(x)$ et de x.
5. Déterminer les éléments propres de f.

Exercice 37 rms130-1145

Soit $(E, \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle)$, un espace euclidien et f, un endomorphisme auto-adjoint défini positif de E.
1. Démontrer que l'application φ définie par

$$\forall\, x, y \in E, \quad \varphi(x, y) = \big\langle f(x) \,\big|\, y \big\rangle$$

est un produit scalaire.
2. Démontrer qu'il existe un endomorphisme auto-adjoint défini positif $g \in L(E)$ tel que $f = g^2$.

Exercice 38 rms130-1320

Soit $(e_1, \dots, e_n)$, une famille de vecteurs unitaires d'un espace euclidien E. On suppose que

$$\forall\, x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x \,|\, e_i \rangle^2.$$

1. Démontrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille orthogonale de E.
2. Soit $x \in \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_n)^\perp$. Démontrer que $x = 0_E$.
3. Démontrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Exercice 39 rms132-455

1. Soit E, un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On rappelle que, par définition, un sous-espace H de E est un **hyperplan** si, et seulement si, il existe une droite vectorielle D telle que H et D soient supplémentaires dans E.

Démontrer qu'un sous-espace H de E est un hyperplan si, et seulement si, il existe une forme linéaire ℓ sur E, non identiquement nulle, telle que

$$H = \operatorname{Ker} \ell.$$

2. Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on pose

$$\Phi(A) = [M \mapsto \operatorname{tr}(AM)].$$

Démontrer que l'application Φ est un isomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sur son dual $E^* = L\big(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}\big)$.
3. Démontrer que la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$$

est inversible et calculer $\operatorname{tr}(J_r C)$ pour $1 \leqslant r \leqslant n$.
4. En déduire que tout hyperplan de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

Exercice 40 rms132-636

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

1. Démontrer que la matrice A est antisymétrique si, et seulement si,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad \langle Ax \,|\, x \rangle = 0.$$

2. Démontrer que la matrice A est antisymétrique si, et seulement si, pour *toute* solution de l'équation différentielle $X' = AX$, l'application $[t \mapsto \|X(t)\|]$ est constante.

Exercice 41 rms135-1431

1. Soient E, un espace euclidien et F, un sous-espace de E. On suppose connue une base orthonormée de F. Rappeler l'expression du projeté orthogonal sur F d'un vecteur $u \in E$.

2. On munit l'espace $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. Calculer la matrice relative à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur la droite D représentée par

$$6x = 4y = z.$$

Exercice 42 rms135-1432

Soit E, l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour f et g dans E, on pose

$$\langle f \,|\, g \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt.$$

1. Démontrer que $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

2. On considère les vecteurs

$$f = \left[x \mapsto \sin^2 x\right], \quad g_1 = [x \mapsto \cos x] \quad \text{et} \quad g_2 = [x \mapsto \cos 2x]\,.$$

Déterminer le projeté orthogonal de f sur le sous-espace $G = \operatorname{Vect}(g_1, g_2)$.

Exercice 43 rms135-1434

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique et la base canonique est notée (e_1, e_2, e_3).

Déterminer la matrice de la rotation r dont l'axe est la droite D représentée par

$$x - y + z = x + y + z = 0$$

et telle que

$$r(e_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (e_1 + e_3).$$

Exercice 44 rms135-1438

1. Démontrer que l'application

$$\left[(M, N) \mapsto \operatorname{tr}(M^\top.N)\right]$$

est un produit scalaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Démontrer que

$$\forall\, M, N \in O_n(\mathbb{R}), \quad \operatorname{tr}(M^\top.N) \leqslant n.$$

3. Soient A et B, deux matrices symétriques réelles.

3. a. Démontrer que

$$\operatorname{tr}[(AB)^2] \leqslant \operatorname{tr}(A^2B^2).$$

3. b. En déduire que

$$\operatorname{tr}\left[(AB + BA)^2\right] \leqslant 4\sqrt{\operatorname{tr}(A^4)}\sqrt{\operatorname{tr}(B^4)}.$$

Solution 1 **05-01**

1. Si les coordonnées du vecteur u relatives à la BON $\mathscr{B}_0$ sont $(X_1, \dots, X_n)$, alors

$$u = \sum_{k=1}^{n} X_k \cdot \varepsilon_k$$

et d'après le Théorème de Pythagore,

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{n} X_k^2 = X^\top X.$$

En particulier, puisqu'il s'agit d'une somme de termes positifs,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \qquad X_k^2 \leqslant \|u\|^2$$

et donc

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \qquad |X_k| \leqslant \|u\|.$$

2.

✍ ***Rappel sur la notation utilisée***
On rappelle que le déterminant d'une famille de vecteurs dépend de la base dans laquelle on le calcule : on note donc en général

$$\det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n).$$

❧ *Si on considère deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$ est une matrice inversible :*

$$P = \mathfrak{Mat}(\mathscr{B} \to \mathscr{C})$$

et les matrices

$$A = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n) \quad \textit{et} \quad A' = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}(u_1, \dots, u_n)$$

sont liées par la relation

$$A' = P^{-1}A$$

de telle sorte que

$$\det_{\mathscr{C}}(u_1, \dots, u_n) = \det A' = \frac{\det A}{\det P} = \frac{1}{\det P} \cdot \det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n).$$

❧ *Lorsque $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont deux bases orthonormées directes, la matrice de passage P est une matrice de rotation et son déterminant est égal à 1, si bien que dans ce cas particulier*

$$\det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n) = \det_{\mathscr{C}}(u_1, \dots, u_n).$$

On convient de noter Det*, le déterminant relatif à une base orthonormée directe quelconque.*

Si la famille $(u_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est liée, alors le déterminant est nul et l'inégalité est évidente.

❧ Si la famille $(u_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est une base orthonormée, alors le déterminant est égal à ± 1 (selon l'orientation de cette base) et comme chaque norme est égale à 1, l'inégalité est évidente : c'est même une égalité.

❧ Il reste donc le cas où la famille

$$\mathscr{B} = (u_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$$

est une base non orthonormée de E.

L'algorithme de Gram - Schmidt permet de construire de proche en proche une base orthonormée

$$\mathscr{B}_0 = (\varepsilon_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}.$$

Selon l'orientation de la BON $\mathscr{B}_0$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Det}(u_1, \dots, u_n) &= \pm \det_{\mathscr{B}_0}(u_1, \dots, u_n) \\ &= \pm \det\big(\mathfrak{Mat}(\mathscr{B}_0 \to \mathscr{B})\big). \end{aligned}$$

Or, d'après l'algorithme de Gram-Schmidt, la matrice de passage

$$\mathfrak{Mat}(\mathscr{B}_0 \to \mathscr{B}) = (p_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

est triangulaire (supérieure), donc son déterminant est égal au produit de ses coefficients diagonaux :

$$\operatorname{Det}(u_1, \dots, u_n) = \pm \prod_{k=1}^{n} p_{k,k}.$$

D'après la question précédente,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad |p_{k,k}| \leqslant \|u_k\|$$

et par conséquent

$$\big|\operatorname{Det}(u_1, \dots, u_n)\big| \leqslant \prod_{k=1}^{n} |p_{k,k}|.$$

Solution 2 **05-02**

Comme $(u - I)$ est un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension *finie*, on sait que

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker}(u - I) + \dim \operatorname{Im}(u - I)$$

(théorème du rang) et pour en déduire que

$$E = \operatorname{Ker}(u - I) \oplus \operatorname{Im}(u - I)$$

il suffit de vérifier que les deux sous-espaces sont en somme directe.

❧ Soient x et y, deux vecteurs de E. Pour tout réel t, on pose

$$q(t) = \|x + t \cdot y\|^2 - \big\|u(x + t \cdot y)\big\|^2.$$

Par hypothèse, l'application linéaire u diminue les longueurs :

$$\forall\, z \in E, \quad \|u(z)\| \leqslant \|z\|$$

donc

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad q(t) \geqslant 0.$$

Comme u est linéaire, on peut développer l'expression $q(t)$:

$$\begin{aligned} q(t) &= \|x + t \cdot y\|^2 - \|u(x) + t \cdot u(y)\|^2 \\ &= \|x\|^2 - \|u(x)\|^2 + 2\big[\langle x \,|\, y \rangle - \langle u(x) \,|\, u(y) \rangle\big] t + \big[\|y\|^2 - \|u(y)\|^2\big] t^2. \end{aligned}$$

Nous constatons (quelle surprise !) que q est une fonction polynomiale de degré inférieur à 2.

Revenons à notre objectif initial et choisissons maintenant un vecteur y appartenant à $\operatorname{Ker}(u - I)$. En particulier,

$$u(y) = y, \quad \text{donc} \quad \|y\|^2 = \|u(y)\|^2$$

et par conséquent, pour tout $x \in E$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$q(t) = \|x\|^2 - \|u(x)\|^2 + 2\,\langle x - u(x) \,|\, y \rangle\ t.$$

La fonction q est en fait *affine* et comme elle est de signe constant sur $\mathbb{R}$, elle est donc *constante* ! Par conséquent,

$$\forall\, y \in \operatorname{Ker}(u - I),\ \forall\, x \in E, \quad \langle x - u(x) \,|\, y \rangle = 0$$

ou, autrement dit :

$$\operatorname{Im}(u - I) \quad \perp \quad \operatorname{Ker}(u - I).$$

Ces deux sous-espaces sont donc en somme directe et nous avons bien démontré que

$$E = \operatorname{Ker}(u - I) \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im}(u - I).$$

Solution 3 **05-03**

Notons F, le sous-espace des suites nulles à partir d'un certain rang : la suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à F si, et seulement si, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ (dépendant de v) tel que

$$\forall\, n \geqslant N, \qquad v_n = 0.$$

❧ Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{R})$, une suite orthogonale à F. Pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_N = (u_0, \dots, u_N, 0, \dots) \in F.$$

Par hypothèse, $\langle\, u \,|\, v_N \,\rangle = 0$. Or

$$\langle\, u \,|\, v_N \,\rangle = \sum_{k=0}^{N} u_k^2$$

et comme les u_k sont des nombres réels, on en déduit que

$$\forall\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, 0 \leqslant k \leqslant N, \quad u_k = 0,$$

c'est-à-dire $u = 0$.

L'orthogonal de F est donc réduit au vecteur nul, alors que F est un sous-espace vectoriel *strict* de $\ell^2(\mathbb{R})$.

✍ *Cela signifie que F est un sous-espace dense dans $\ell^2(\mathbb{R})$ pour la norme associée au produit scalaire.*

Solution 4 **05-04**

On considère l'espace vectoriel

$$E = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, e_2, e_3) \subset \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$$

engendré par les fonctions

$$e_k = \big[t \mapsto t^k\big]$$

pour $0 \leqslant k \leqslant 3$.

L'application

$$\varphi = \left[(f, g) \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}\,dt\right]$$

est un produit scalaire sur E (essentiellement parce que le produit $f(t)g(t)e^{-t}$ est $\mathcal{O}(t^6 e^{-t})$ au voisinage de $+\infty$).

❧ L'expression

$$\int_0^{+\infty} \big[t^3 - (a + bt + ct^2)\big]^2 e^{-t}\,dt$$

est en fait

$$\big\| e_3 - (ae_0 + be_1 + ce_2) \big\|^2$$

et chercher le minimum de cette expression revient en fait à calculer

$$\big[\,d(e_3, F)\big]^2$$

où $F = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, e_2)$.

D'après le cours,

$$\big[\,d(e_3, F)\big]^2 = \langle\, e_3 \,|\, e_3 - p_F(e_3) \,\rangle$$

où $p_F(e_3)$ est le projeté orthogonal de e_3 sur F.

✍ *Lorsque l'expression de $e_3 - p_F(e_3)$ est un peu compliquée (comme ça va être le cas ici), cette formule pour le calcul de la distance est préférable à la formule évidente $\|e_3 - p_F(e_3)\|^2$. Il suffit de poser les deux calculs en parallèle pour s'en rendre compte !*

✍ *Si on connaissait un vecteur $n \in E$ orthogonal à F, on pourrait conclure rapidement en projetant orthogonalement sur la droite $F^\perp = \mathbb{R}\cdot n$. Mais un tel vecteur n'est pas donné et son calcul n'est ici pas particulièrement simple...*

❧ Pour calculer $p_F(e_3)$, nous allons passer par la caractérisation classique du projeté orthogonal.

Le vecteur $p_F(e_3)$ est l'unique vecteur

$$y = ae_0 + be_1 + ce_2 \in F$$

tel que $(y - e_3) \in F^\perp$, c'est-à-dire
$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant 2, \quad \langle\, y - e_3 \,|\, e_k \,\rangle = 0$$
ou encore
$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant 2, \quad \langle\, y \,|\, e_k \,\rangle = \langle\, e_3 \,|\, e_k \,\rangle\,.$$
En tenant compte de $y = ae_0 + be_1 + ce_2$, on aboutit au système suivant.
$$\begin{cases} a\,\langle\, e_0 \,|\, e_0 \,\rangle + b\,\langle\, e_1 \,|\, e_0 \,\rangle + c\,\langle\, e_2 \,|\, e_0 \,\rangle = \langle\, e_3 \,|\, e_0 \,\rangle \\ a\,\langle\, e_0 \,|\, e_1 \,\rangle + b\,\langle\, e_1 \,|\, e_1 \,\rangle + c\,\langle\, e_2 \,|\, e_1 \,\rangle = \langle\, e_3 \,|\, e_1 \,\rangle \\ a\,\langle\, e_0 \,|\, e_2 \,\rangle + b\,\langle\, e_1 \,|\, e_2 \,\rangle + c\,\langle\, e_2 \,|\, e_2 \,\rangle = \langle\, e_3 \,|\, e_2 \,\rangle \end{cases}$$

✍ *Si on connaissait une base orthogonale de F, on pourrait appliquer la formule bien connue*
$$p_F(e_3) = \sum_{k=0}^{2} \frac{\langle\, \varepsilon_k \,|\, e_3 \,\rangle}{\|\varepsilon_k\|^2} \cdot \varepsilon_k.$$
Mais l'énoncé ne nous donne pas une telle base et il faudrait recourir à l'algorithme de Gram-Schmidt pour en calculer une. Pourquoi pas ? Parce que ce serait sensiblement plus long !

❧ Pour une fois, le calcul de la matrice de Gram est sans douleur...
$$\forall\, i, j \in \mathbb{N}, \quad \langle\, e_i \,|\, e_j \,\rangle = \Gamma(i + j + 1) = (i + j)!$$
En résolvant le système, on trouve $(a, b, c) = (6, -18, 9)$.

Il reste à calculer
$$\begin{aligned} \langle\, e_3 \,|\, e_3 - p_F(e_3) \,\rangle &= \langle\, e_3 \,|\, e_3 \,\rangle - a\,\langle\, e_3 \,|\, e_0 \,\rangle - b\,\langle\, e_3 \,|\, e_1 \,\rangle - c\,\langle\, e_3 \,|\, e_2 \,\rangle \\ &= 36. \end{aligned}$$

✍ *En développant $\|e_3 - p_F(e_3)\|^2$, on aurait une somme de $4^2 = 16$ termes (au lieu des 4 termes de l'expression qu'on vient de calculer)...*

Solution 5 **05-05**

1. On *sait bien* que
$$\mathfrak{M}_3(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$$
et que le projeté orthogonal d'une matrice $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est la matrice
$$p(M) = \frac{M + M^T}{2}$$
si bien que
$$M - p(M) = \frac{M - M^T}{2}.$$
❧ Avec
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$
on a donc
$$A - p(A) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \langle\, A \,|\, A - p(A) \,\rangle = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \begin{pmatrix} 9 & * & * \\ * & 5 & * \\ * & * & 8 \end{pmatrix}.$$
D'après la formule bien connue,
$$d\big(A, \mathcal{S}_3(\mathbb{R})\big) = \sqrt{11}.$$

✍ *Ne calculer que le strict nécessaire pour obtenir le produit scalaire, éviter les calculs superflus !*

2. On considère ici d'une part la droite $D = \mathbb{R} \cdot I_3$ et d'autre part le plan H d'équation $\operatorname{tr}(M) = 0$ (c'est le noyau d'une forme linéaire non identiquement nulle, donc un hyperplan de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$).

Comme $\mathrm{tr}(I_3) = 3 \neq 0$, on en déduit que la droite D et le plan H sont supplémentaires dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.
Par ailleurs, quelles que soient les matrices $A = \lambda I_3 \in D$ et $M \in H$, on a $\mathrm{tr}(M) = 0$ et par conséquent

$$\langle A \mid M \rangle = \mathrm{tr}[(\lambda I_3)^T M] = \lambda\, \mathrm{tr}(M) = 0.$$

Les deux sous-espaces H et D sont donc orthogonaux et

$$\mathfrak{M}_3(\mathbb{R}) = H \overset{\perp}{\oplus} D.$$

❧ Puisque H et D sont orthogonaux, le projeté orthogonal de $I_3 \in D$ sur H est la matrice nulle :

$$I_3 = \underbrace{O_3}_{\in H} + \underbrace{I_3}_{\in D}.$$

Par conséquent,

$$d(I_3, H) = \|I_3 - p(I_3)\| = \|I_3\| = \sqrt{\mathrm{tr}(I_3^T . I_3)} = \sqrt{3}.$$

Solution 6 **05-06**

1. Si $A \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$ et $\mathrm{rg}\, A = p$, alors la matrice A est inversible. Donc

$$\begin{aligned} Ax = y_0 &\iff A^{-1}(Ax) = A^{-1} y_0 \\ &\iff x = A^{-1} y_0. \end{aligned}$$

Cela prouve que l'équation $Ax = y_0$ admet une seule solution et que cette solution est $A^{-1}y_0$.
2. a. Le rang d'une matrice $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est toujours majoré par $\min\{n, p\}$.
Si $n > p$, alors le rang de A est *strictement* inférieur au nombre de lignes (c'est-à-dire à la dimension de l'espace d'arrivée), ce qui montre que A n'est pas surjective.
En notant $C_1, \ldots, C_p$, les colonnes de la matrice A et en considérant la colonne

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \qquad \text{on a} \qquad AX = \sum_{k=1}^{p} x_k C_k$$

et par conséquent

$$X \in \mathrm{Ker}\, A \iff \sum_{k=1}^{p} x_k C_k = 0.$$

Autrement dit : les vecteurs du noyau de A correspondent aux relations de liaison entre les colonnes de A.
Comme on suppose ici que les colonnes de A sont linéairement indépendantes, la matrice A est injective et l'équation $Ax = y_0$ admet donc *au plus une* solution.
Plus précisément,
— si $y_0 \in \mathrm{Im}\, A$, alors l'équation $Ax = y_0$ admet exactement une solution;
— si $y_0 \notin \mathrm{Im}\, A$, alors l'équation $Ax = y_0$ n'a pas de solution.

✍ *Nous nous donnons pour objectif de définir une "solution alternative" avec le cahier des charges suivant :*
— *quel que soit $y_0 \in F$, l'équation $Ax = y_0$ admet une, et une seule, solution alternative;*
— *si l'équation $Ax = y_0$ admet une solution, la solution alternative doit coïncider avec la solution "normale";*
— *si l'équation $Ax = y_0$ n'admet pas de solution, la solution alternative doit être une alternative "raisonnable" (il ne serait pas raisonnable de convenir que la solution alternative serait le vecteur nul indépendamment du vecteur y_0 considéré).*

2. b. Comme $\mathrm{Im}\, A$ est un espace de dimension finie, la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\, A$ est bien définie. On peut donc considérer le projeté orthogonal z_0 du vecteur y_0 sur $\mathrm{Im}\, A$.
❧ Par définition, on a

$$z_0 \in \mathrm{Im}\, A \quad \text{et} \quad y_0 - z_0 \in (\mathrm{Im}\, A)^\perp.$$

On déduit alors du Théorème de Pythagore que

$$\begin{aligned} \forall\, z \in \mathrm{Im}\, A, \quad \|y_0 - z\|^2 = \Big\| \underbrace{(y_0 - z_0)}_{\in (\mathrm{Im}\, A)^\perp} + \underbrace{(z_0 - z)}_{\in \mathrm{Im}\, A} \Big\|^2 &= \|y_0 - z_0\|^2 + \|z_0 - z\|^2 \qquad (\star) \\ &\geqslant \|y_0 - z_0\|^2 \end{aligned}$$

et comme $z_0 \in \operatorname{Im} A$, ce minorant est en fait le minimum :

$$\|y_0 - z_0\| = \min_{z \in \operatorname{Im} A} \|y_0 - z\|.$$

❧ Comme $z_0 \in \operatorname{Im} A$ et que A est injective, il existe un *unique* vecteur $x_0 \in E$ tel que $z_0 = Ax_0$.
On déduit en outre de $(\star)$ que le minimum est atteint *seulement* pour $z = z_0$.
Par conséquent, il existe un, et un seul, vecteur $x_0 \in E$ tel que

$$\|y_0 - Ax_0\| = \min_{x \in E} \|y_0 - Ax\|.$$

✍ *Si* $y_0 \in \operatorname{Im} A$, *alors il existe un, et un seul, vecteur* $u_0 \in E$ *tel que* $Au_0 = y_0$. *Mais, dans ce cas, on a* $z_0 = y_0 = Au_0$ *et donc* $x_0 = u_0$ *: si l'équation admet une solution* u_0 *"au sens classique", la solution* x_0 *"au sens des moindres carrés" est égale à* u_0.

2. c. Par définition du projeté orthogonal, le vecteur $y_0 - z_0 = y_0 - Ax_0$ est orthogonal au sous-espace $\operatorname{Im} A$. Par conséquent,

$$\forall\, u \in E, \quad \langle\, Au \,|\, y_0 - Ax_0 \,\rangle = 0.$$

Par définition du produit scalaire canonique sur $\mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

$$\langle\, Au \,|\, y_0 - Ax_0 \,\rangle = (Au)^\top.(y_0 - Ax_0) = u^\top.A^\top(y_0 - Ax_0) = \langle\, u \,|\, A^\top.(y_0 - Ax_0) \,\rangle .$$

Cela prouve que le vecteur $A^\top.(y_0 - Ax_0)$ est orthogonal à tout vecteur $u \in E$ et donc qu'il est nul :

$$A^\top.(y_0 - Ax_0) = 0$$

et donc

$$A^\top.y_0 = A^\top.Ax_0.$$

❧ Réciproquement, supposons que $A^\top.Ax = A^\top y$. Il est alors clair que

$$Ax \in \operatorname{Im} A \tag{†}$$

et que $A^\top.(Ax - y_0) = 0$. Par conséquent, pour tout $u \in E$,

$$0 = u^\top.A^\top.(Ax - y_0) = (Au)^\top.(Ax - y_0) = \langle\, Au \,|\, Ax - y_0 \,\rangle$$

c'est-à-dire

$$\forall\, z \in \operatorname{Im} A, \quad \langle\, z \,|\, Ax - y_0 \,\rangle = 0$$

ou encore

$$Ax - y_0 \in (\operatorname{Im} A)^\top. \tag{‡}$$

Les propriétés (†) et (‡) prouvent que Ax est le projeté orthogonal du vecteur y_0 sur le sous-espace $\operatorname{Im} A$ et donc, comme on l'a prouvé plus haut, que $x = x_0$.
❧ Ainsi, l'équation $A^\top.Ax = A^\top y_0$ admet le vecteur x_0 pour unique solution.
2. d. Comme $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors $A^\top \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, donc

$$A^\top.A \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$$

est une matrice carrée.
❧ Si $A^\top.Ax = 0$, alors

$$\|Ax\|^2 = (Ax)^\top.(Ax) = (x^\top.A^\top)Ax = x^\top.(A^\top.Ax) = 0.$$

Par conséquent, $Ax = 0$ et comme A est injective, on en déduit que $x = 0$.
Ainsi, la matrice carrée $A^\top.A$ est injective et donc (Théorème du rang) inversible.
❧ Dans ces conditions,

$$A^\top.Ax = A^\top.y_0 \iff x = (A^\top.A)^{-1}A^\top.y_0.$$

La solution "au sens des moindres carrés" de l'équation $Ax = y_0$ peut donc être calculée directement par la résolution d'un système de Cramer.

Solution 7 **05-07**

1. L'application $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est bien définie (nombre fini de termes dans la somme), à valeurs réelles. Il est clair qu'il s'agit d'une forme bilinéaire et symétrique sur E.

Quel que soit $P \in E$,

$$\langle P \mid P \rangle = \sum_{k=0}^{n} [P(a_k)]^2 \geqslant 0$$

puisque les scalaires $P(a_k)$ sont réels. De plus, si $\langle P \mid P \rangle = 0$, alors chaque terme est nul.

✍ *Une somme de* réels positifs *est nulle si, et seulement si, chaque terme est nul.*

❧ Supposons que les scalaires a_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, soient deux à deux distincts. Un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ qui admet $(n+1)$ racines distinctes est nécessairement le polynôme nul. Dans ce cas, l'application $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est bien une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire un produit scalaire.

❧ Si les scalaires a_k ne sont pas deux à deux distincts, alors on peut supposer par exemple que $a_n = a_0$. Dans ce cas, le polynôme

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} (X - a_k) \in \mathbb{R}_n[X] = E$$

et $\langle P_n \mid P_n \rangle = 0$ alors que $P_n \neq 0$. L'application $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est alors une forme bilinéaire symétrique positive, mais ce n'est pas un produit scalaire.

2. Par définition, le polynôme $P \in E$ appartient à F si, et seulement si,

$$\langle P \mid 1 \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0.$$

Par conséquent, $F = 1^{\perp} = (\mathbb{R} \cdot 1)^{\perp}$.

✍ *On sait que, pour toute partie $A \in E$, l'orthogonal de A est aussi l'orthogonal du sous-espace* $\mathrm{Vect}(A)$.
On sait que l'orthogonal de toute partie A est un sous-espace vectoriel de E, donc il n'est pas nécessaire de prouver au préalable que F est bien un sous-espace vectoriel de E.

Comme E est un espace euclidien (= dimension finie), on sait que

$$F^{\perp} = \left[(\mathbb{R} \cdot 1)^{\perp}\right]^{\perp} = \mathbb{R} \cdot 1.$$

3. Comme F est un sous-espace de dimension finie, la projection orthogonale p_F sur F est bien définie. Sachant que le vecteur 1 est orthogonal à F, on en déduit que

$$\forall\, x \in E, \quad p_F(x) = x - \frac{\langle x \mid 1 \rangle}{\|1\|^2} \cdot 1$$

et par conséquent,

$$d(X^n, F) = \|X^n - p_F(X^n)\| = \frac{|\langle X^n \mid 1 \rangle|}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left| \sum_{k=0}^{n} a_k^n \right|.$$

Solution 8 **05-08**

Tout d'abord, φ est bien une application de

$$\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

dans $\mathbb{R}$:

— Quelles que soient les matrices colonnes X et Y, le produit de la ligne $X^{\top}$, de la matrice carrée D et de la colonne Y est une matrice de $\mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$.

— La règle du produit matriciel assure que l'unique coefficient de cette matrice est bien égal à

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i y_i.$$

— Comme d'habitude, on identifie une matrice de $\mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$ à son unique coefficient.

❧ La transposition est une application linéaire de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathfrak{M}_{1,n}(\mathbb{R})$; la multiplication des matrices est une application bilinéaire de

$$\mathfrak{M}_{\ell,p}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_{\ell,q}(\mathbb{R}),$$

quels que soient les entiers ℓ, p et q. Par conséquent, φ est bilinéaire de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

❧ La symétrie de φ est évidente sur la formule

$$\varphi(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i y_i.$$

Sur l'expression matricielle de φ, la symétrie est moins évidente : il faut en effet remarquer que *toute* matrice de $\mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$ est *symétrique* pour en déduire que

$$\varphi(X, Y) = X^\top.D.Y = (X^\top.D.Y)^\top = Y^\top.D^\top.(X^\top)^\top = Y^\top.D.X = \varphi(Y, X)$$

(puisque la matrice D est symétrique).

❧ Comme les λ_i sont tous positifs, le réel

$$\varphi(X, X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

est positif en tant que somme de réels positifs (quelle que soit la matrice colonne X).

Enfin, si $\varphi(X, X) = 0$, alors $\lambda_i x_i^2 = 0$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ (une somme de réels positifs est nulle si, et seulement si, tous les termes sont nuls) et comme les λ_i sont tous *strictement* positifs, on en déduit que tous les x_i sont nuls et donc que $X = 0$.

❧ On a démontré que φ était une forme bilinéaire symétrique et définie positive de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, c'est donc un produit scalaire sur E.

✍ *On peut faire bien en faisant beaucoup plus court : il n'est pas nécessaire de donner autant de détails (mais il faut pouvoir le faire).*

Solution 9 05-09

1. D'après ($\star$), si $x \in E$ est orthogonal à F, alors

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\langle\, e_i \,|\, x \,\rangle^2}_{=0} = 0$$

donc $x = 0_E$.

❧ Comme E est un espace euclidien (dimension finie !), pour toute partie $F \subset E$, on sait que

$$\text{Vect}(F) = \left(F^\perp\right)^\perp = \{0_E\}^\perp = E.$$

Donc la famille F est une famille génératrice de E.

2. Soit $v \in L(E)$.

❧ Si $v^* = -v$, alors

$$\begin{aligned} \forall\, x \in E, \quad \langle\, v(x) \,|\, x \,\rangle &= \langle\, x \,|\, v^*(x) \,\rangle && \text{(définition de l'adjoint)} \\ &= \langle\, x \,|\, -v(x) \,\rangle \\ &= -\langle\, x \,|\, v(x) \,\rangle && \text{(linéarité à droite)} \\ &= -\langle\, v(x) \,|\, x \,\rangle && \text{(symétrie)} \end{aligned}$$

et par conséquent $\langle\, v(x) \,|\, x \,\rangle = 0$.

❧ Réciproquement, si

$$\forall\, x \in E, \qquad \langle\, v(x) \,|\, x \,\rangle = 0,$$

alors

$$\forall\, x, y \in E, \qquad \langle\, v(x+y) \,|\, x+y \,\rangle = 0.$$

En développant, on en déduit que

$$0 = \underbrace{\langle\, v(x) \,|\, x \,\rangle}_{=0} + \langle\, v(x) \,|\, y \,\rangle + \langle\, v(y) \,|\, x \,\rangle + \underbrace{\langle\, v(y) \,|\, y \,\rangle}_{=0}$$

et donc que
$$\forall\, x, y \in E, \qquad \langle\, v(x) \,|\, y \,\rangle = \langle\, x \,|\, -v(y) \,\rangle$$
par symétrie et bilinéarité du produit scalaire. Par définition de l'adjoint, cela signifie bien que $v^* = -v$.

3. Soient x et y dans E. Par construction de u d'une part, par symétrie et bilinéarité du produit scalaire d'autre part,
$$\begin{aligned}\langle\, u(x) \,|\, y \,\rangle &= \langle\, x \,|\, y \,\rangle - \left\langle\, \sum_{i=1}^{n} \langle\, x \,|\, e_i \,\rangle\, e_i \,\middle|\, e_i \,\right\rangle \\ &= \langle\, x \,|\, y \,\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle\, x \,|\, e_i \,\rangle \langle\, e_i \,|\, y \,\rangle = \langle\, x \,|\, y \,\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle\, x \,|\, e_i \,\rangle \langle\, y \,|\, e_i \,\rangle.\end{aligned}$$
La dernière expression est symétrique en x et y, cela suffit pour prouver que l'endomorphisme u est auto-adjoint.

❧ En prenant $y = x$, on obtient
$$\langle\, u(x) \,|\, x \,\rangle = \langle\, x \,|\, x \,\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle\, x \,|\, e_i \,\rangle^2 = 0$$
par hypothèse.

❧ D'après la question précédente, on a donc $u^* = -u$ alors qu'on vient de prouver que $u^* = u$. Par conséquent, u est l'endomorphisme nul et
$$\forall\, x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^{n} \langle\, x \,|\, e_i \,\rangle\, e_i \in \mathrm{Vect}(F).$$
❧ On savait déjà que F était une famille génératrice, c'est confirmé et on connaît en outre une décomposition de chaque vecteur $x \in E$ comme combinaison linéaire de vecteurs de F.

4. a. Lorsque les vecteurs de $\mathscr{F}$ sont unitaires, les relations
$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \|e_k\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle\, e_i \,|\, e_k \,\rangle^2 = \|e_k\|^4 + \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq n}} \langle\, e_i \,|\, e_k \,\rangle^2$$
montrent que les vecteurs de $\mathscr{F}$ sont deux à deux orthogonaux et donc que $\mathscr{F}$ est une famille orthonormée.

❧ On sait depuis le début que $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E, c'est donc une base orthonormée de E.

4. b. Lorsque $\mathscr{F}$ est une famille libre,
$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad e_k = \sum_{i=1}^{n} \delta_{k,i} e_i = \sum_{i=1}^{n} \langle\, e_k \,|\, e_i \,\rangle\, e_i$$
et l'unicité de la décomposition permet d'identifier terme à terme les scalaires. Cela montre que la famille $\mathscr{F}$ est orthonormée et on conclut comme précédemment.

5. La famille $\mathscr{F}$ vérifie
$$\forall\, x \in \mathbb{R}^2, \quad \langle\, x \,|\, x \,\rangle = \sum_{i=1}^{3} \langle\, e_i \,|\, x \,\rangle^2$$
pour $r = \sqrt{2/3}$.

Solution 10 — 05-10

1. a. L'espace $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace de dimension finie. Le théorème de Riesz donne une représentation de la forme linéaire φ restreinte à $\mathbb{R}_n[X]$: il existe un, et un seul, $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que
$$\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi(P) = \langle\, Q_n \,|\, P \,\rangle.$$
1. b. Soit $P \in E$: il existe un entier $n_0 \geqslant \deg P$ et $P \in \mathbb{R}_{n_0}[X]$. D'après la question précédente,
$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad \varphi(P) = \langle\, Q_n \,|\, P \,\rangle.$$
Or, d'après l'inégalité de Schwarz,
$$\big|\, \langle\, Q_n \,|\, P \,\rangle - \langle\, Q_\omega \,|\, P \,\rangle \,\big| = \big|\, \langle\, Q_n - Q_\omega \,|\, P \,\rangle \,\big| \leqslant \|Q_n - Q_\omega\|\, \|P\|$$
et comme $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers Q_ω (par hypothèse), on en déduit que
$$\langle\, Q_n \,|\, P \,\rangle \xrightarrow[n \to +\infty]{} \langle\, Q_\omega \,|\, P \,\rangle.$$

Or, par définition des Q_n,

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad \langle\, Q_n \,|\, P \,\rangle = \varphi(P).$$

Donc

$$\langle\, Q_\omega \,|\, P \,\rangle = \lim_{n\to+\infty} \varphi(P) = \varphi(P).$$

2. Encore l'inégalité de Schwarz !

$$\forall\, P \in E, \quad \big|P(0)\big| = \big|\,\langle\, Q_\omega \,|\, P \,\rangle\,\big| \leqslant \|Q_\omega\|\,\|P\|$$

et $K = \|Q_\omega\|$ convient.
3. a. Posons $P_n = (1-X)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a bien

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad P_n(0) = 1$$

et

$$\|P_n\|^2 = \int_0^1 (1-t)^{2n}\,dt = \int_0^1 u^{2n}\,du = \frac{1}{2n+1}$$

donc $\|P_n\|$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
3. b. Si la suite $(\deg P_n)$ était bornée, alors il existerait un entier d tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad P_n \in \mathbb{R}_d[X].$$

Dans ce cas, on étudie en fait la restriction de la forme linéaire $[P \mapsto P(0)]$ au sous-espace $\mathbb{R}_d[X]$. Comme ce sous-espace est un espace de dimension finie, la restriction de cette forme linéaire est continue et comme la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 (pour la norme associée au produit scalaire), alors $\varphi(P_n) = P_n(0)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui contredit le résultat de la question précédente.
4. Si la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait dans E (pour la norme associée au produit scalaire), alors il existerait une constante $K \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall\, P \in E, \quad \big|P(0)\big| \leqslant K\|P\|.$$

Mais on a démontré précédemment qu'il existait une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad P_n(0) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \|P_n\| = 0.$$

On aurait donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant K\|P_n\|$$

ce qui est absurde puisque le majorant tend vers 0.
La suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge donc pas dans E pour la norme associée au produit scalaire.
❧ Si la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait vers Q_ω pour la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$, alors

$$0 \leqslant \|Q_n - Q_\omega\|^2 = \int_0^1 \big[Q_\omega(t) - Q_n(t)\big]^2\,dt \leqslant (1-0)\cdot\|Q_\omega - Q_n\|_\infty^2$$

et par conséquent, la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergerait aussi vers Q_ω pour la norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire. On vient de voir que cela n'est pas possible.
La suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge donc pas non plus pour la norme uniforme.

✍ *Il est temps de jeter un regard théorique sur les calculs qui précèdent.*
❧ *D'après l'inégalité de Schwarz, seules les formes linéaires continues peuvent être représentées à l'aide du produit scalaire.*
❧ *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la restriction φ_n de φ au sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ est continue :*

$$\exists\, Q_n \in \mathbb{R}_n[X], \quad \forall\, P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi_n(P) = \varphi(P) = \langle\, Q_n \,|\, P \,\rangle.$$

❧ *L'hypothèse de convergence de la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se traduit par le fait que les restrictions φ_n sont uniformément lipschitziennes :*

$$\exists\, K > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \big|\varphi_n(P)\big| = \big|\,\langle\, Q_n \,|\, P \,\rangle\,\big| \leqslant K\|P\|.$$

❧ *On peut alors définir des prolongements naturels de ces formes linéaires en posant*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \varphi_n(P) = \langle\, Q_n \,|\, P \,\rangle.$$

Ces formes linéaires sont continues sur $\mathbb{R}[X]$ et φ_n coïncide avec φ sur le sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ (au moins).

❧ *La suite des prolongements $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur la sphère unité de $\mathbb{R}[X]$ vers la forme linéaire φ elle-même :*

$$\forall\, P \in \mathbb{R}[X], \quad \|P\| \leqslant 1 \implies \big|\varphi_n(P) - \varphi(P)\big| = \big|\langle\, Q_n \,|\, P\,\rangle - \varphi(P)\big| \leqslant \|Q_n - Q_\omega\|$$

(le majorant est indépendant de P et tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$).
❧ *La forme linéaire φ serait alors représentable à l'aide du produit scalaire*

$$\forall\, P \in \mathbb{R}[X], \quad \varphi(P) = \langle\, Q_\omega \,|\, P\,\rangle$$

et donc continue.
❧ *Un contre-exemple bien choisi montre qu'en fait φ n'est pas continue sur $\mathbb{R}[X]$ pour la norme euclidienne et ne peut donc être représentée à l'aide du produit scalaire.*
❧ *Le changement de norme ne change rien à l'affaire, car la norme euclidienne est ici dominée par la norme uniforme : si φ était continue pour la norme uniforme, elle serait aussi continue pour la norme euclidienne.*

Solution 11 — 05-11

✍ *Exercice classique, qui suit le même modèle que ses voisins :*
- *on définit un espace vectoriel de dimension finie (généralement 3 ou 4) ;*
- *on munit cet espace vectoriel d'un produit scalaire inspiré par l'énoncé ;*
- *on interprète la question posée comme la recherche du minimum de*

$$\left\|f_0 - g\right\|^2$$

  lorsque g parcourt un sous-espace G de E ;
- *grâce à la structure euclidienne de E, il suffit d'identifier le projeté orthogonal $\pi(f_0)$ de f_0 sur le sous-espace G pour conclure :*

$$\min_{g\in G} \left\|f_0 - g\right\|^2 = \big[\, d(f_0, G)\big]^2 = \langle\, f_0 \,|\, f_0 - \pi(f_0)\,\rangle.$$

En général, il faut s'abstenir de chercher une base orthonormée du sev G (même quand $\dim G = 2$!). Il est préférable de déterminer $\pi(f_0)$ en utilisant la caractérisation usuelle du projeté orthogonal :

$$\pi(f_0) \in G, \qquad f_0 - \pi(f_0) \in G^\perp$$

en explicitant une matrice de Gram.

❧ On considère le sous-espace vectoriel E de $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ engendré par les trois fonctions

$$f_0 = \left[t \mapsto \sqrt{t}\right], \quad g_0 = [t \mapsto 1] \quad \text{et} \quad g_1 = [t \mapsto t].$$

Quelles que soient les fonctions u et v dans E, on pose

$$\langle\, u \,|\, v\,\rangle = \int_0^1 u(t)v(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t}}.$$

L'application $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ est bien un produit scalaire.
► Si h est continue sur le segment $[0,1]$, alors la fonction

$$\Phi_h = \left[t \mapsto \frac{h(t)}{\sqrt{1-t}}\right]$$

est continue sur l'intervalle semi-ouvert $[0,1[$ et comme h est bornée (en tant que fonction continue sur un segment),

$$\frac{h(t)}{\sqrt{1-t}} \underset{t\to 1}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\Big).$$

La fonction de référence est intégrable au voisinage de 1, cela prouve que Φ_h est intégrable sur $[0,1[$ et donc que l'intégrale généralisée

$$\int_0^1 h(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t}}$$

est convergente.

Ainsi, $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ est bien une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

► Toutes les intégrales considérées étant convergentes, il est clair que $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire, symétrique et positive.

► On considère maintenant une fonction $h \in E$ telle que $\langle h\,|\,h\rangle = 0$, c'est-à-dire

$$\int_0^1 h^2(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t}} = 0.$$

On intègre ici une fonction continue et positive

$$\left[t \mapsto \frac{h^2(t)}{\sqrt{1-t}}\right]$$

sur un intervalle de longueur strictement positive ($0 < 1$) et l'intégrale est, par hypothèse, nulle. D'après le Théorème de nullité de l'intégrale,

$$\forall\, t \in [0,1[, \qquad \frac{h^2(t)}{\sqrt{1-t}} = 0.$$

On en déduit que

$$\forall\, t \in [0,1[, \qquad h(t) = 0.$$

Mais comme h est continue en $t = 1$, on en déduit aussi que

$$h(1) = \lim_{\substack{t \to 1 \\ <}} h(t) = 0$$

et donc que

$$\forall\, t \in [0,1], \qquad h(t) = 0.$$

On a ainsi démontré que $h = 0_E$ et donc que $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ est bien un produit scalaire sur E.

❧ Lorsque les paramètres a et b parcourent $\mathbb{R}^2$, la fonction

$$[t \mapsto a + bt]$$

parcourt l'hyperplan $G = \text{Vect}(g_0, g_1)$ de E. Il s'agit donc ici de calculer

$$\min_{g \in G} \|f_0 - g\|^2$$

et pour cela, nous allons calculer le projeté orthogonal $\pi(f_0)$ de f_0 sur G.

► Le vecteur $\pi(f_0)$ appartient à G si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que

$$\pi(f_0) = ag_0 + bg_1. \tag{1}$$

Le vecteur $f_0 - \pi(f_0)$ est orthogonal à $G = \text{Vect}(g_0, g_1)$ si, et seulement si,

$$\big\langle f_0 - \pi(f_0)\,\big|\,g_0\big\rangle = \big\langle f_0 - \pi(f_0)\,\big|\,g_1\big\rangle = 0,$$

c'est-à-dire [en tenant compte de (1) et en développant les produits scalaires]

$$\begin{cases} a\langle g_0\,|\,g_0\rangle + b\langle g_1\,|\,g_0\rangle = \langle f_0\,|\,g_0\rangle \\ a\langle g_0\,|\,g_1\rangle + b\langle g_1\,|\,g_1\rangle = \langle f_0\,|\,g_1\rangle. \end{cases} \tag{2}$$

✍ *Il s'agit donc de résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues (a et b), mais il faut auparavant calculer quelques produits scalaires :*

$$\langle g_0\,|\,g_0\rangle, \quad \langle g_0\,|\,g_1\rangle = \langle g_1\,|\,g_0\rangle, \quad \langle f_0\,|\,g_0\rangle, \quad \langle f_0\,|\,g_1\rangle.$$

C'est la partie fastidieuse de l'exercice !

► Tout d'abord,

$$\langle g_0\,|\,g_0\rangle = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = 2\big[-\sqrt{1-t}\big]_0^1 = 2.$$

► En posant $u = \sqrt{1-t}$,

$$\langle g_0 \mid g_1 \rangle = \int_0^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t}} = 2\int_0^1 (1-u^2)\,du = \frac{4}{3}$$

et

$$\langle g_1 \mid g_1 \rangle = \int_0^1 \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1-t}} = 2\int_0^1 (1-u^2)^2\,du = \frac{16}{15}.$$

Il est intéressant de remarquer (pour la fin de l'exercice) que

$$\langle f_0 \mid f_0 \rangle = \int_0^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t}} = \langle g_0 \mid g_1 \rangle = \frac{4}{3}.$$

► En posant $v = \sqrt{t/(1-t)}$,

$$\begin{aligned}\langle f_0 \mid g_0 \rangle &= \int_0^1 \sqrt{\frac{t}{1-t}}\,dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{v^2\,dv}{(1+v^2)^2}\\ &= 2\int_0^{+\infty} \frac{dv}{1+v^2} - 2\int_0^{+\infty} \frac{dv}{(1+v^2)^2}.\end{aligned}$$

En intégrant par parties,

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} 1\cdot\frac{dv}{1+v^2} = \int_0^{+\infty} v\cdot\frac{2v\,dv}{(1+v^2)^2}$$

et il reste alors

$$\langle f_0 \mid g_0 \rangle = \int_0^{+\infty} \frac{dv}{1+v^2} = \frac{\pi}{2}.$$

✍ *Il faut retenir cette méthode : pour calculer une telle intégrale, il faut intégrer par parties une intégrale dont on connaît la valeur — c'est contre-intuitif !*

► Avec le même changement de variable,

$$\langle f_0 \mid g_1 \rangle = \int_0^1 t\sqrt{\frac{t}{1-t}}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{2v^2\,dv}{(1+v^2)^2} - \int_0^{+\infty} \frac{2v^2\,dv}{(1+v^2)^3}.$$

L'avant-dernière intégrale a déjà été calculée et la dernière intégrale s'obtient elle aussi en intégrant par parties :

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^{+\infty} 1\cdot\frac{dv}{(1+v^2)^2} = \int_0^{+\infty} v\cdot\frac{2\cdot 2v\,dv}{(1+v^2)^3}.$$

On en déduit que

$$\langle f_0 \mid g_1 \rangle = \frac{3\pi}{8}.$$

► Il s'agit donc de résoudre le système suivant.

$$\begin{cases} 2a + \frac{4}{3}b = \frac{\pi}{2} \\ \frac{4}{3}a + \frac{16}{15}b = \frac{3\pi}{8} \end{cases}$$

L'unique solution de ce système est

$$(a, b) = \left(\frac{3\pi}{32}, \frac{15\pi}{64}\right).$$

❧ Le minimum cherché est, d'après le cours,

$$\begin{aligned}\langle f_0 \mid f_0 - \pi(f_0) \rangle &= \langle f_0 \mid f_0 - ag_0 - bg_1 \rangle\\ &= \langle f_0 \mid f_0 \rangle - a\langle f_0 \mid g_0 \rangle - b\langle f_0 \mid g_1 \rangle\end{aligned}$$

et on trouve, d'après ce qui précède :

$$\left[d(f_0, G)\right]^2 = \langle f_0 \mid f_0 - \pi(f_0) \rangle = \frac{4}{3} - \frac{69\pi^2}{512}.$$

✍ *Bonne nouvelle ! Il n'y a pas d'autre intégrale à calculer !*
Comparer aussi avec la formule naïve :

$$\begin{aligned}\big[\,d(f_0, G)\big]^2 &= \|f_0 - \pi(f_0)\|^2\\ &= \langle\, f_0 \,|\, f_0 \,\rangle + a^2 \langle\, g_0 \,|\, g_0 \,\rangle + b^2 \langle\, g_1 \,|\, g_1 \,\rangle\\ &\qquad - 2a \langle\, f_0 \,|\, g_0 \,\rangle - 2b \langle\, f_0 \,|\, g_1 \,\rangle + 2ab \langle\, g_0 \,|\, g_1 \,\rangle\end{aligned}$$

qui est bien plus pénible à traiter.

Solution 12 **05-12**

1. Par linéarité à droite du produit scalaire, il est clair que f_k est un endomorphisme de E.
Quels que soient les vecteurs x et y,

$$\begin{aligned}\big\langle\, f_k(x) \,\big|\, y \,\big\rangle &= \langle\, x \,|\, y \,\rangle + k \langle\, a \,|\, x \,\rangle \; \langle\, a \,|\, y \,\rangle\\ &= \langle\, x \,|\, y \,\rangle + k \langle\, a \,|\, y \,\rangle \; \langle\, x \,|\, a \,\rangle = \big\langle\, x \,\big|\, f_k(y) \,\big\rangle\end{aligned}$$

donc l'endomorphisme f_k est auto-adjoint.
❧ Comme le vecteur a n'est pas nul, la projection orthogonale sur la droite $\mathbb{R} \cdot a$ s'exprime par

$$\forall\, x \in E, \qquad \pi(x) = \frac{\langle\, a \,|\, x \,\rangle}{\langle\, a \,|\, a \,\rangle}\, a$$

donc

$$f_k = I_E + k\|a\|^2 \cdot \pi.$$

✍ *D'après le cours, toute projection orthogonale est un endomorphisme auto-adjoint (en particulier l'identité !) et l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints est un sous-espace de $L(E)$. La décomposition de f_k prouve donc à nouveau que f_k est auto-adjoint.*

2. L'endomorphisme f_k est une isométrie si, et seulement si,

$$\forall\, x \in E, \quad \|f_k(x)\|^2 = \|x\|^2.$$

Or, pour tout $x \in E$,

$$\big\|x + k \langle\, a \,|\, x \,\rangle\; a\big\|^2 = \|x\|^2 + 2k \langle\, a \,|\, x \,\rangle \cdot \langle\, a \,|\, x \,\rangle + k^2 \langle\, a \,|\, x \,\rangle^2 \cdot \|a\|^2.$$

Comme $k \neq 0$, on en déduit que f_k est une isométrie si, et seulement si,

$$\forall\, x \in E, \quad \langle\, a \,|\, x \,\rangle^2 \big[2 + k\|a\|^2\big] = 0.$$

Comme $a \neq 0_E$, cela équivaut à

$$2 + k\|a\|^2 = 0.$$

L'endomorphisme f_k est donc une isométrie si, et seulement si,

$$k = \frac{-2}{\|a\|^2}.$$

✍ *Dans ce cas, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$f_k(x) = x - 2\frac{\langle\, a \,|\, x \,\rangle}{\|a\|^2} \cdot a = x - 2\pi(x).$$

On reconnaît ici la réflexion d'hyperplan $H = (\mathbb{R} \cdot a)^\perp$, qui est effectivement une isométrie comme chacun sait.

✍ *L'énoncé exclut a priori le cas $k = 0$, pour lequel $f_k = I_E$ serait aussi une isométrie.*

Solution 13 05-13

Il s'agit bien sûr d'une n-ième variante de l'inégalité de Schwarz ! On développe $\|x\|^2$ avec la formule habituelle et on majore avec l'inégalité de Schwarz :

$$\begin{aligned}\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \langle u_i \,|\, u_j \rangle &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |x_i|\,|x_j|\,|\langle u_i \,|\, u_j \rangle| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |x_i|\,|x_j|\,\|u_i\|\,\|u_j\|. \qquad \text{(Schwarz dans } E)\end{aligned}$$

On reconnaît alors

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |x_i|\,|x_j|\,\|u_i\|\,\|u_j\| = \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_i|\,\|u_i\|\Big)^2$$

et on applique à nouveau l'inégalité de Schwarz, mais cette fois dans $\mathbb{R}^n$:

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} |x_i|\,\|u_i\|\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_i|^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} \|u_k\|^2\Big),$$

ce qui nous donne le résultat voulu.

Solution 14 pg23S4-a

Comme f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$, les fonctions f' et g' sont continues sur le segment $[0, 1]$ et par conséquent, l'intégrale est bien définie. Ainsi φ est bien une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

- Il est clair que φ est bilinéaire et symétrique.
- D'après l'inégalité de Schwarz,

$$\Big(\int_0^1 f'(t) \times 1 \, dt\Big)^2 \leqslant \int_0^1 \big[f'(t)\big]^2 \, dt \int_0^1 1^2 \, dt.$$

Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$, on déduit du Théorème fondamental de l'Analyse que

$$\big[f(1) - f(0)\big]^2 \leqslant \int_0^1 \big[f'(t)\big]^2 \, dt.$$

On peut alors conclure : quelle que soit la fonction $f \in E$,

$$\begin{aligned}\varphi(f, f) &= \int_0^1 \big[f'(t)\big]^2 \, dt + 2f(0)f(1) \\ &\geqslant f(1)^2 + f(0)^2 - 2f(0)f(1) + 2f(0)f(1) \\ &\geqslant f(1)^2 + f(0)^2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

✍ *L'application ψ définie par*

$$\psi(f, g) = \int_0^1 f'(t)g'(t) \, dt - f(0)g(1) - f(1)g(0)$$

est bien une forme bilinéaire symétrique, mais elle n'est pas positive. En effet, avec

$$f = [t \mapsto 1 + t],$$

on obtient

$$\varphi(f, f) = \int_0^1 0 \, dt - 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = -4.$$

On trouve ce contre-exemple en se rappelant du cas d'égalité dans l'inégalité de Schwarz : ici, l'inégalité de Schwarz devient une égalité si, et seulement si, la dérivée f' et la fonction constante $[t \mapsto 1]$ sont proportionnelles, c'est-à-dire si $f(t) = t + K$.

- On vient de démontrer que

$$\forall f \in E, \quad \varphi(f, f) \geqslant f(1)^2 + f(0)^2.$$

Par suite, si $\varphi(f, f) = 0$, alors

$$f(1)^2 + f(0)^2 = 0,$$

donc $f(1) = f(0) = 0$ et par conséquent,

$$\varphi(f,f) = \int_0^1 \left[f'(t)\right]^2 dt = 0.$$

Or la fonction $(f')^2$ est continue et positive sur $[0,1]$, donc elle est identiquement nulle sur cet intervalle. La fonction f est donc constante et comme elle s'annule (en $t=0$ et en $t=1$), elle est identiquement nulle.

► L'application φ est bien un produit scalaire sur E.

Solution 15 **pg23S4-b**

1. Puisque $E = \mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique, la base canonique est une base orthonormée.

❧ Posons

$$a = (1,1,1,1), \quad b = (1,-1,1,-1) \quad \text{et} \quad u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4.$$

Comme $\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique, on déduit du système d'équations que

$$\forall\, u \in E, \qquad u \in F \iff \langle\, a \,|\, u \,\rangle = \langle\, b \,|\, u \,\rangle = 0$$

c'est-à-dire

$$F = (\mathbb{R}\cdot a)^\perp \cap (\mathbb{R}\cdot b)^\perp = \left[\mathrm{Vect}(a,b)\right]^\perp.$$

Et comme $\langle\, a \,|\, b \,\rangle = 1-1+1-1 = 0$, on connaît une base orthogonale de $F^\perp$.

D'après le cours, la projection orthogonale q sur $F^\perp$ s'exprime donc par

$$\forall\, u \in E, \quad q(u) = \frac{\langle\, a \,|\, u \,\rangle}{\|a\|^2}\cdot a + \frac{\langle\, b \,|\, u \,\rangle}{\|b\|^2}\cdot b$$

et la projection p sur F par

$$\forall\, u \in E, \quad p(u) = u - q(u).$$

Par conséquent, les coordonnées du vecteur $p(u)$ relatives à la base canonique sont

$$\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix} - \frac{x+y+z+t}{4}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{x-y+z-t}{4}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 2x & & -2z & \\ & 2y & & -2t\\ -2x & & 2z & \\ & -2y & & 2t\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}$$

donc

$$\mathfrak{Mat}_{\text{can}}(p) = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

✍ *Avant de conclure, il est judicieux de s'assurer*

— *que la matrice trouvée est bien symétrique (une projection orthogonale est un endomorphisme auto-adjoint et la base canonique est ici orthonormée, donc la matrice doit être symétrique) ;*

— *que son rang est égal à 2 (= la dimension de F) ;*

— *que sa trace est égale à 2 (la trace d'un projecteur est toujours égale à son rang)*

— *et que les colonnes de la matrice appartiennent bien au sous-espace F.*

2. D'après le cours,

$$d(c,F) = \|c - p(c)\| = \|q(c)\|$$

et d'après l'expression de q donnée plus haut

$$q(c) = \frac{6}{4}\cdot(1,1,1,1) - \frac{2}{4}\cdot(1,-1,1,-1) = (1,2,1,2).$$

Comme la base canonique est orthonormée,

$$d(c,F) = \sqrt{1^2+2^2+1^2+2^2} = \sqrt{10}.$$

Solution 16 pg23S4-c

Soient x et y, deux vecteurs de E ; $\lambda \in \mathbb{R}$, un scalaire. Développons

$$\left\|f(\lambda x + y) - \left[\lambda f(x) + f(y)\right]\right\|^2.$$

Par bilinéarité et symétrie du produit scalaire, on trouve

$$\begin{aligned}&\left\|f(\lambda x + y)\right\|^2 + \left\|\lambda f(x)\right\|^2 + \left\|f(y)\right\|^2 \\ &\qquad - 2\lambda \langle f(\lambda x + y) \,|\, f(x) \rangle - 2 \langle f(\lambda x + y) \,|\, f(y) \rangle + 2\lambda \langle f(x) \,|\, f(y) \rangle .\end{aligned}$$

Comme la norme est absolument homogène et que f conserve le produit scalaire (et donc aussi la norme), cette expression devient

$$\begin{aligned}&\|\lambda x + y\|^2 + \lambda^2 \|x\|^2 + \|y\|^2 \\ &\qquad - 2\lambda \langle \lambda x + y \,|\, x \rangle - 2 \langle \lambda x + y \,|\, y \rangle - 2\lambda \langle x \,|\, y \rangle\end{aligned}$$

et en finissant de développer, on finit par trouver que cette expression est nulle, ce qui nous inscrit dans la prestigieuse lignée du Savant Cosinus.

Bon, bref : on a démontré que le vecteur

$$f(\lambda x + y) - \left[\lambda f(x) + f(y)\right]$$

était nul (quels que soient x, y et λ) et donc que f était bien linéaire.

Solution 17 pg23S4-d

✍ *La condition signifie que l'angle formé par les vecteurs x_i et x_j est obtus.*

Il s'agit donc de démontrer que, dans un espace euclidien de dimension n, le cardinal d'une famille obtusangle *est inférieur à $(n+1)$.*

Nous allons procéder par récurrence sur la dimension de E.

❧ **Initialisation**

Si $\dim E = 1$, alors il existe un vecteur a *unitaire* tel que $E = \mathbb{R} \cdot a$ et il existe trois scalaires λ_1, λ_2 et λ_3 tels que

$$x_1 = \lambda_1 a, \quad x_2 = \lambda_2 a, \quad x_3 = \lambda_3 a.$$

Comme le vecteur a est unitaire,

$$\forall\, i \neq j, \quad \langle x_i \,|\, x_j \rangle = \lambda_i \lambda_j < 0.$$

Il n'y a que deux signes possibles pour un réel. Par conséquent, parmi les trois réels λ_1, λ_2 et λ_3, il y en a nécessairement deux de même signe, ce qui contredit l'hypothèse sur les produits scalaires.

❧ **HR**

On suppose qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que : dans un espace euclidien de dimension n, le cardinal d'une famille obtusangle est inférieur à $(n+1)$.

On vient de vérifier que l'hypothèse de récurrence était vraie pour $n = 1$.

❧ **Itération**

Supposons qu'il existe une famille obtusangle $(x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n+2}$ dans un espace euclidien E de dimension $(n+2)$.

En particulier, le vecteur x_{n+2} n'est pas nul (sinon $\langle y \,|\, x_{n+2} \rangle = 0$ quel que soit le vecteur $y \in E$). Nous pouvons donc définir

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n+1, \quad y_k = x_k - \frac{\langle x_k \,|\, x_{n+2} \rangle}{\|x_{n+2}\|^2} \cdot x_{n+2}.$$

La famille $(y_k)_{0 \leqslant k \leqslant n+1}$ est une famille de $(n+2)$ vecteurs appartenant tous au sous-espace

$$F = (\mathbb{R} \cdot x_{n+2})^{\perp},$$

qui est de dimension $\dim E - 1 = n$ (on aura reconnu l'expression de la projection orthogonale sur la droite $\mathbb{R} \cdot x_{n+2}$).

Quels que soient les indices $k \neq \ell$ entre 0 et $(n+1)$,

$$\langle y_k \,|\, y_\ell \rangle = \langle x_k \,|\, x_\ell \rangle - \frac{\langle x_k \,|\, x_{n+2} \rangle \langle x_\ell \,|\, x_{n+2} \rangle}{\|x_{n+2}\|^2}.$$

Or $\langle x_k \,|\, x_\ell \rangle < 0$, $\langle x_k \,|\, x_{n+2} \rangle < 0$ et $\langle x_\ell \,|\, x_{n+2} \rangle < 0$, donc

$$\langle y_k \,|\, y_\ell \rangle < 0$$

(en tant que somme de réels strictement négatifs).

Il existerait donc une famille obtusangle de $(n+2)$ vecteurs dans un espace de dimension n, ce qui est impossible par **HR**.

❧ On a ainsi démontré par récurrence que le cardinal d'une famille obtusangle dans un espace euclidien E est toujours majoré par $1 + \dim E$.

✍ *Les trois racines cubiques de l'unité donnent un exemple simple de famille obtusangle de cardinal $(n+1) = 3$ dans un espace euclidien de dimension $n = 2$.*

On peut s'en inspirer pour trouver une famille obtusangle de cardinal 4 dans un espace euclidien de dimension 3 (penser à une molécule de méthane — pardon, aux segments qui relient les sommets d'un tétraèdre régulier au centre de ce tétraèdre).

Solution 18 pg23S5-c

✍ *On note $f_*(A)$, l'image (directe) de l'ensemble A par l'application f :*

$$y \in f_*(A) \iff \exists\, x \in A, \quad y = f(x)$$

c'est-à-dire

$$f_*(A) = \big\{f(x),\ x \in A\big\}.$$

❧ Par hypothèse, F est un sous-espace de E et, d'après le cours, $F^\perp$ est aussi un sous-espace de E.

On sait que l'image d'un sous-espace de E par un endomorphisme de E est encore un sous-espace de E, donc $f_*(F^\perp)$ et $\big(f_*(F)\big)^\perp$ sont des sous-espaces de E.

❧ Comme E est un espace euclidien, on sait que

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp = \big(f_*(F)\big) \overset{\perp}{\oplus} \big(f_*(F)\big)^\perp$$

et en particulier que

$$\dim F^\perp = \operatorname{codim} F \quad \text{et} \quad \dim\big(f_*(F)\big)^\perp = \operatorname{codim} f_*(F).$$

❧ Pour tout endomorphisme f et tout sous-espace F de E,

$$\dim f_*(F) \leqslant \dim F$$

(puisque l'image par f d'une base de F est une famille génératrice de $f_*(F)$).

Si l'endomorphisme f est injectif, alors l'image d'une base de F est une famille libre (et toujours génératrice) de $f_*(F)$, donc

$$\dim f_*(F) = \dim F.$$

Comme une isométrie vectorielle est en particulier une application linéaire et injective, on sait donc que

$$\operatorname{codim} f_*(F) = \operatorname{codim} F$$

et aussi que

$$\dim f_*(F^\perp) = \dim F^\perp.$$

On en déduit que

$$\dim\big(f_*(F)\big)^\perp = \dim f_*(F^\perp).$$

❧ Pour prouver que les deux sous-espaces $f_*(F^\perp)$ et $\big(f_*(F)\big)^\perp$ sont égaux, il ne reste donc qu'à vérifier que l'un est contenu dans l'autre.

Considérons $x \in f_*(F^\perp)$: il existe donc un vecteur $u \in F^\perp$ tel que $x = f(u)$. Pour tout vecteur $y \in f_*(F)$, il existe un vecteur $v \in F$ tel que $y = f(v)$ et

$$\langle x \,|\, y \rangle = \big\langle f(u) \,\big|\, f(v) \big\rangle = \langle u \,|\, v \rangle$$

(puisque f est une isométrie vectorielle). Mais $u \in F^\perp$ et $v \in F$, donc

$$\langle x \,|\, y \rangle = \langle u \,|\, v \rangle = 0,$$

ce qui prouve que tout vecteur $x \in f_*(F^\perp)$ est orthogonal au sous-espace $f_*(F)$. Autrement dit,

$$f_*(F^\perp) \subset \big(f_*(F)\big)^\perp.$$

❧ On a ainsi démontré que

$$f_*(F^\perp) = \big(f_*(F)\big)^\perp.$$

Solution 19 **pg23S5-d**

1. Par bilinéarité et symétrie,

$$\langle u+v \,|\, u-v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2 = 0$$

puisque les deux vecteurs u et v ont même norme.

2. Soient x et y, deux vecteurs non nuls. Alors les vecteurs

$$u = \frac{x}{\|x\|} \quad \text{et} \quad v = \frac{y}{\|y\|}$$

sont unitaires. D'après la question précédente, les vecteurs $u+v$ et $u-v$ sont orthogonaux et, par hypothèse sur f, les vecteurs $f(u+v)$ et $f(u-v)$ sont orthogonaux.

❧ Par linéarité de f, par bilinéarité et symétrie du produit scalaire, on a donc

$$0 = \big\langle f(u+v) \,\big|\, f(u-v) \big\rangle = \big\|f(u)\big\|^2 - \big\|f(v)\big\|^2.$$

Comme $\|f(u)\|$ et $\|f(v)\|$ sont deux réels positifs, on en déduit que

$$\big\|f(u)\big\| = \big\|f(v)\big\|.$$

Par linéarité de f et absolue homogénéité de la norme,

$$\frac{\big\|f(x)\big\|}{\|x\|} = \frac{\big\|f(y)\big\|}{\|y\|}.$$

Cette égalité (= une relation de proportionnalité en fait) étant vraie quels que soient les vecteurs non nuls x et y, on en déduit qu'il existe un réel α (forcément positif !) tel que

$$\forall\, x \neq 0_E, \qquad \big\|f(x)\big\| = \alpha\,\|x\|.$$

❧ Par linéarité de f, il est clair que cette relation est encore vraie pour $x = 0_E$.

3. Si $\alpha = 0$, alors f est l'application nulle et on peut choisir $g = I_E$.

❧ Si $\alpha > 0$, alors l'endomorphisme $g = \frac{1}{\alpha} \cdot f$ est une isométrie vectorielle puisque

$$\forall\, x \in E, \quad \big\|g(x)\big\| = \left\|\frac{1}{\alpha} \cdot f(x)\right\| = \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha\|x\| = \|x\|$$

(par absolue homogénéité de la norme).

❧ Dans tous les cas, il existe bien une isométrie $g \in O(E)$ telle que $f = \alpha \cdot g$. (Mais seul le cas $f \neq \omega_E$ est vraiment intéressant d'un point de vue géométrique.)

Solution 20 **pg23S5-e**

Comme E est un espace vectoriel de dimension finie,

$$\dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Im} u = \dim E = \dim \operatorname{Ker} u^* + \dim \operatorname{Im} u^*$$

(Théorème du rang appliqué aux endomorphismes u et u^*) et d'autre part

$$\dim(\operatorname{Im} u)^\perp = \operatorname{codim} \operatorname{Im} u \quad \text{et} \quad \dim(\operatorname{Ker} u)^\perp = \operatorname{codim} \operatorname{Ker} u$$

puisque

$$E = \operatorname{Ker} u \overset{\perp}{\oplus} (\operatorname{Ker} u)^\perp = \operatorname{Im} u \overset{\perp}{\oplus} (\operatorname{Im} u)^\perp.$$

❧ Soient $x \in \operatorname{Ker} u^*$ et $y \in \operatorname{Im} u$: il existe $z \in E$ tel que $y = u(z)$ et

$$\langle x \,|\, y \rangle = \big\langle x \,\big|\, u(z) \big\rangle = \big\langle u^*(x) \,\big|\, z \big\rangle = \langle 0_E \,|\, z \rangle = 0.$$

Cela prouve que

$$\operatorname{Ker} u^* \subset (\operatorname{Im} u)^\perp.$$

Réciproquement, soit $x \in (\operatorname{Im} u)^\perp$. Alors

$$\forall\, y \in E, \quad \big\langle u^*(x) \,\big|\, y \big\rangle = \big\langle x \,\big|\, \underbrace{u(y)}_{\in \operatorname{Im} u} \big\rangle = 0.$$

Le seul vecteur de E orthogonal à tous les autres est le vecteur nul, donc $u^*(x) = 0_E$. On vient ainsi de démontrer que

$$(\operatorname{Im} u)^\perp \subset \operatorname{Ker} u^*$$

et donc (par double inclusion) que

$$(\operatorname{Im} u)^\perp = \operatorname{Ker} u^*.$$

❧ Puisque l'égalité précédente a été établie pour *tous* les endomorphismes de E, elle est en particulier vraie pour l'adjoint u^* :

$$\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker}(u^*)^* = (\operatorname{Im} u^*)^\perp$$

et comme E est un espace euclidien,

$$\operatorname{Im} u^* = \left[(\operatorname{Im} u^*)^\perp\right]^\perp = (\operatorname{Ker} u)^\perp.$$

✍ *Cette seconde propriété aurait aussi pu être démontrée par double inclusion.*
❧ *Si* $x \in \operatorname{Im} u^*$, *alors il existe* $y \in E$ *tel que* $x = u^*(y)$ *et*

$$\forall\, z \in \operatorname{Ker} u, \quad \langle\, x \,|\, z \,\rangle = \langle\, u^*(y) \,|\, z \,\rangle = \langle\, y \,|\, u(z) \,\rangle = \langle\, y \,|\, 0_E \,\rangle = 0$$

donc $\operatorname{Im} u^* \subset (\operatorname{Ker} u)^\perp$.
❧ *Réciproquement, quels que soient les sous-espaces vectoriels* A *et* B*,*

$$A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$$

et comme E *est un espace euclidien (dimension finie !), on en déduit que*

$$B^\perp \subset A^\perp \implies B = (B^\perp)^\perp \subset (A^\perp)^\perp = A.$$

Autrement dit, dans un espace euclidien (mais pas dans un espace préhilbertien de dimension quelconque),

$$A \subset B \iff B^\perp \subset A^\perp.$$

Nous allons donc démontrer que

$$(\operatorname{Ker} u)^\perp \subset \operatorname{Im} u^*$$

en vérifiant que

$$(\operatorname{Im} u^*)^\perp \subset \operatorname{Ker} u.$$

Quels que soient les vecteurs $x \in (\operatorname{Im} u^*)^\perp$ *et* $y \in E$*,*

$$0 = \langle\, x \,|\, \underbrace{u^*(y)}_{\in \operatorname{Im} u^*} \,\rangle = \langle\, u(x) \,|\, y \,\rangle.$$

Le vecteur $u(x)$ *est donc orthogonal à tous les vecteurs* $y \in E$*, donc* $u(x) = 0_E$*, c'est-à-dire* $x \in \operatorname{Ker} u$*.*

Solution 21 rl25S4-a

1.

✍ *Même s'il ne faut pas se servir systématiquement de cette formule (trop lourde pour être efficace en général !),* ***il faut savoir*** *que*

$$\langle\, A \,|\, B \,\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{i,j}.$$

On doit savoir que toute matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique en somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique :

$$M = \underbrace{\frac{1}{2}(M + M^\top)}_{\in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\frac{1}{2}(M - M^\top)}_{\in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})}.$$

✍ *On retrouve cette décomposition, ainsi que la preuve de l'unicité de cette décomposition, par analyse et synthèse : on suppose que* $M = S + A$*, on transpose (pour exploiter les hypothèses de symétrie/antisymétrie) et on résout le système d'inconnues* S *et* A*.*

Autrement dit,

$$\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R}).$$

Il reste à démontrer que ces deux sous-espaces vectoriels sont orthogonaux.

❧ Quelles que soient les matrices $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \langle S \,|\, A \rangle &= \mathrm{tr}(S^\top.A) = \mathrm{tr}(S.A) \\ &= \langle A \,|\, S \rangle && \text{(symétrie du produit scalaire)} \\ &= \mathrm{tr}(A^\top.S) = \mathrm{tr}(-A.S) = -\mathrm{tr}(A.S) \\ &= -\mathrm{tr}(S.A) && \text{(propriété bien connue de la trace)} \end{aligned}$$

et par conséquent $\langle S \,|\, A \rangle = 0$.

Ainsi,

$$\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$$

ce qui prouve que

$$\big[\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\big]^\perp = \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$$

et que

$$\big[\mathscr{A}_n(\mathbb{R})\big]^\perp = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

✍ *On sait que la transposition est une symétrie : c'est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et*

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad ({}^\top M^\top) = M.$$

De plus, quelles que soient les matrices A et B de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\langle A^\top \,|\, B \rangle = \mathrm{tr}(A.B) = \mathrm{tr}(B.A) = \langle B^\top \,|\, A \rangle = \langle A \,|\, B^\top \rangle$$

(en utilisant la propriété bien connue de la trace et la symétrie du produit scalaire).

Cela signifie que la transposition est un endomorphisme auto-adjoint et donc en fait une symétrie orthogonale.

Et c'est pour cette raison que ses deux sous-espaces propres sont supplémentaires et orthogonaux !

2. L'espace $D_n(\mathbb{R})$ des matrices diagonales est engendré par les matrices $E_{k,k}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$, donc

$$A \in [D_n(\mathbb{R})]^\perp \iff \forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \langle A \,|\, E_{k,k} \rangle = 0.$$

Or, quelle que soit la matrice A,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \langle A \,|\, E_{k,k} \rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}.(\delta_{i,k}\delta_{j,k}) = a_{k,k}$$

donc la matrice A est orthogonale au sous-espace $D_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, tous les coefficients diagonaux de A sont nuls.

3. D'après l'expression développée du produit scalaire,

$$\Phi(M) = \|A - M\|^2.$$

Par conséquent,

$$\inf_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \Phi(M) = d\big(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\big)$$

et on sait que le projeté orthogonal S_A de A sur le sous-espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est l'unique matrice $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\Phi(M) = d\big(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\big).$$

Autrement dit, cette borne inférieure est en fait un minimum et ce minimum est égal à $\Phi(S_A)$, c'est-à-dire à $\|A - S_A\|^2$.

La décomposition de S dans la somme directe orthogonale

$$\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$$

(rappelée plus haut) nous assure alors que

$$S_A = \frac{1}{2}(A + A^\top)$$

et donc que

$$A - S_A = \frac{1}{2}(A - A^\top).$$

Finalement,

$$\min_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \Phi(M) = \frac{1}{4}\left\|A - A^\top\right\|^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{i,j} - a_{j,i})^2.$$

Solution 22 **rl25S4-b**

1.

✍ *Le sous-espace F est défini à l'aide de deux formes linéaires non proportionnelles. C'est donc l'intersection de deux hyperplans distincts et comme c'est un sous-espace d'un espace de dimension 4, la dimension de F est égale à 2.*

Si on n'apprécie pas ce type de raisonnement, on peut aussi considérer que F est l'ensemble des solutions d'un système linéaire de deux équations en quatre inconnues ; résoudre ce système (en introduisant deux paramètres) et en déduire une base de F (constituée de deux vecteurs).

Comme ce système est triangulaire, la résolution est très rapide.

Le quadruplet (x_1, x_2, x_3, x_4) est une solution du système

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ \phantom{x_1 +{}} 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

si, et seulement si, il existe deux paramètres réels s et t tels que

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 = s \\ x_4 = t \end{cases}$$

c'est-à-dire tels que

$$\begin{cases} x_1 = -4s - 2t \\ x_2 = s \\ x_3 = -2s - t \\ x_4 = t. \end{cases}$$

Une base de F est donc constituée (par exemple) des vecteurs

$$e_1 = (-4, 1, -2, 0), \qquad e_2 = (-2, 0, -1, 1).$$

D'après le cours, pour calculer la distance du vecteur y au plan F, il faut déterminer le projeté orthogonal x de y sur F et en déduire

$$d(y, F) = \|y - x\| = \sqrt{\langle\, y \,|\, y - x \,\rangle}.$$

D'après le cours, le projeté orthogonal x est l'unique vecteur $x \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$x \in F \qquad \text{et} \qquad (y - x) \in F^\perp.$$

La représentation cartésienne de F nous dit que

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in F \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ \phantom{x_1 +{}} 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

et la connaissance d'une base (e_1, e_2) de F nous dit que

$$(y - x) \in F^\perp \iff \begin{cases} \langle\, x \,|\, e_1 \,\rangle = \langle\, y \,|\, e_1 \,\rangle \\ \langle\, x \,|\, e_2 \,\rangle = \langle\, y \,|\, e_2 \,\rangle, \end{cases}$$

ce système étant équivalent au système

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 - 2x_3 \phantom{{}+ x_4} = -5 \\ -2x_1 \phantom{{}+ x_2} - x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$$

Il nous reste alors à résoudre le système suivant.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -4x_1 + x_2 - 2x_3 = -5 \\ -2x_1 - x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$$

On trouve

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{13}(12, -5, 6, 4)$$

donc

$$y - x = \frac{1}{13}(1, 18, 7, 9)$$

et finalement

$$d(y, F) = \sqrt{\langle y \,|\, y - x \rangle} = \sqrt{\frac{35}{13}}.$$

✍ *Il vaut mieux éviter de terminer le calcul de manière naïve ! En effet,*

$$d(y, F) = \|y - x\| = \frac{\sqrt{455}}{13},$$

ce qui résulte d'un calcul plus compliqué et qui n'est pas clairement simplifiable...

✍ *Variante un peu plus savante et moins pénible (pas de système 4x4 à résoudre).*

Les deux équations qui caractérisent le sous-espace F peuvent s'interpréter comme des produits scalaires (nuls). Elles nous donnent deux vecteurs

$$e_3 = (1, 2, -1, 1) \quad \textit{et} \quad e_4 = (0, 2, 1, 1)$$

qui sont orthogonaux à F. Ce sont deux vecteurs non proportionnels de $F^\perp$ et comme $F^\perp$ est un plan, ces deux vecteurs constituent une base de $F^\perp$.

La condition $(y - x) \in F^\perp$ se traduit alors par l'existence de deux scalaires α et β tels que

$$y - x = \alpha \cdot e_3 + \beta \cdot e_4$$

et donc tels que

$$x = y - \alpha \cdot e_3 - \beta \cdot e_4 = (1 - \alpha, 1 - 2\alpha - 2\beta, 1 + \alpha - \beta, 1 - \alpha - \beta).$$

On peut alors déterminer les valeurs de α et β au moyen des équations qui caractérisent F (le vecteur x doit appartenir à F) :

$$\begin{cases} 3 - 7\alpha - 4\beta = 0 \\ 4 - 4\alpha - 6\beta = 0. \end{cases}$$

On trouve $\alpha = {}^1\!/_{13}$ et $\beta = {}^8\!/_{13}$, donc

$$y - x = \frac{1}{13} \cdot e_3 + \frac{8}{13} \cdot e_4 = \frac{1}{13}(1, 18, 7, 9)$$

et on retrouve bien que

$$d(y, F) = \sqrt{\frac{35}{13}}.$$

2. Pour trouver une base orthonormée de F, on commence par calculer une base orthogonale qu'il suffira de normaliser pour conclure.

❧ **Première méthode.**

On connaît déjà une base de F : (e_1, e_2) et il vaut mieux partir de la base

$$(e_1', e_2) = (e_1 - 2e_2, e_2) = \big((0, 1, 0, -2),\ (-2, 0, -1, 1)\big)$$

qui est plus simple. Il reste alors à suivre la méthode de Gram & Schmidt en cherchant un vecteur

$$e_2' = e_2 + t \cdot e_1' = (-2, t, -1, 1 - 2t) \in F$$

qui soit orthogonal au vecteur e'_1 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ t \\ -1 \\ 1-2t \end{pmatrix} = 5t - 2 = 0$$

donc $t = 2/5$ et

$$e'_2 = \frac{1}{5} \cdot (-10, 2, -5, 1).$$

❧ **Deuxième méthode.**

On part d'un vecteur de F, par exemple e'_1 (qu'il est facile de deviner sur les équations cartésiennes) et on cherche un vecteur de F (deux équations cartésiennes à vérifier) qui soit orthogonal à e'_1 (une troisième équation cartésienne). Il s'agit alors de résoudre le système linéaire suivant.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ \phantom{x_1 +{}} 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \phantom{x_1 + 2{}} x_2 \phantom{{}+ x_3} - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

En s'armant de courage, on trouve

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4 \cdot (-10, 2, -5, 1).$$

❧ Quelle que soit la méthode retenue, une base orthonormée de F est donc par exemple constituée des vecteurs

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (0, 1, 0, -2) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{130}} \cdot (10, -2, 5, -1).$$

Solution 23 **Off2017-94b**

1. Comme $v \neq 0_E$, il existe une base $\mathscr{B}$ de E de la forme

$$\mathscr{B} = (v, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$$

(Théorème de la base incomplète appliqué à la famille libre (v)).

De même, comme la colonne

$$C_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

n'est pas la colonne nulle, il existe une matrice inversible Q de la forme

$$Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \star \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_n & \cdots & \star \end{pmatrix}.$$

Comme la matrice Q est inversible, il existe une base $\mathscr{C} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que

$$\mathfrak{Mat}(\mathscr{B} \to \mathscr{C}) = Q^{-1} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mathfrak{Mat}(\mathscr{C} \to \mathscr{B}) = Q.$$

Par définition de la matrice de passage, la première colonne de Q donne les coordonnées du premier vecteur de $\mathscr{B}$ dans la base $\mathscr{C}$, donc

$$v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k.$$

2. D'après le Théorème de la base orthonormée incomplète, on peut supposer dans ce qui précède que les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont des bases orthogonales : les familles libres (v) et (C_1) étant orthogonales, on peut les compléter en bases orthogonales.

❧ Si on exige que la base $\mathscr{C}$ soit une base orthonormée, il faut alors que

$$\|v\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2.$$

Cette condition nécessaire est aussi une condition suffisante : en effet, si

$$\|v\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2,$$

alors les familles
$$\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{C_1}{\|v\|}\right)$$
sont des familles orthonormées et le Théorème de la base orthonormée incomplète nous assure qu'il existe une base orthonormée de la forme
$$\mathscr{B}' = \left(\frac{v}{\|v\|}, \varepsilon_2', \dots, \varepsilon_n'\right)$$
et une matrice orthogonale de la forme
$$Q = \begin{pmatrix} \lambda_1/\|v\| & \cdots & \star \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_n/\|v\| & \cdots & \star \end{pmatrix}.$$
Comme la matrice Q est orthogonale et que la base $\mathscr{B}'$ est orthonormée, il existe donc une base orthonormée $\mathscr{C}' = (e_k')_{1\leqslant k\leqslant n}$ telle que
$$\mathfrak{Mat}(\mathscr{B}' \to \mathscr{C}') = Q^{-1} = Q^\top \in O_n(\mathbb{R}).$$
Comme plus haut, on en déduit que
$$\frac{v}{\|v\|} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\|v\|} \cdot e_k'$$
et donc que
$$v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot e_k'.$$

Solution 24 **Off2017-100b**

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. S'il existe deux polynômes P et Q tels que
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad P(\cos x) = \cos nx = Q(\cos x),$$
alors
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (P - Q)(\cos x) = 0.$$
Comme cos est une surjection de $\mathbb{R}$ sur $[-1, 1]$, on en déduit que
$$\forall\, u \in [-1, 1], \quad (P - Q)(u) = 0.$$
Comme le polynôme $P - Q$ admet une infinité de racines, on en déduit que $P = Q$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe donc *au plus un* polynôme T_n tel que
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos x) = \cos nx.$$

❧ Il est clair que $T_0 = 1$ et $T_1 = X$ conviennent :
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \cos 0x = 1 \quad \text{et} \quad \cos 1x = \cos x.$$

Supposons que, pour un entier $n \geqslant 1$, il existe deux polynômes T_n et T_{n-1} tels que
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos x) = \cos nx \quad \text{et} \quad T_{n-1}(\cos x) = \cos(n-1)x.$$
D'après les formules d'addition, quel que soit $x \in \mathbb{R}$,
$$2\cos x \cos nx = \cos(n+1)x + \cos(n-1)x$$
donc
$$\cos(n+1)x = 2\cos x\, T_n(\cos x) - T_{n-1}(\cos x).$$
Cela prouve que le polynôme
$$T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$$
vérifie bien
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad T_{n+1}(\cos x) = \cos(n+1)x.$$

On a ainsi démontré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un (unique !) polynôme T_n tel que
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos x) = \cos nx.$$

On a en particulier établi la relation de récurrence suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}.$$

❧ On sait déjà que $\deg T_0 = 0$ et que $\deg T_1 = 1$.

En supposant que $\deg T_n = n$ et $\deg T_{n-1} = n-1$ pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$, on déduit de la relation de récurrence que

$$T_{n+1} = \underbrace{2XT_n}_{n+1} - \underbrace{T_{n-1}}_{n-1}$$

et donc que

$$\deg T_{n+1} = n+1.$$

On a démontré par récurrence que $\deg T_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

✍ *On aura reconnu les polynômes de Tchebychev.*

2. La fonction

$$f_0 = \left[t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right]$$

est continue sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$. En tant que dérivée de la fonction Arcsin, qui est continue sur le segment $[-1,1]$, la fonction f_0 admet une primitive qui tend vers une limite finie aussi bien au voisinage de -1 qu'au voisinage de 1. Par conséquent, l'intégrale généralisée

$$\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

est convergente.

Comme la fonction f_0 est positive sur $]-1,1[$, on en déduit que f_0 est intégrable sur $]-1,1[$.

Le produit PQ est continu sur le segment $[-1,1]$ (fonction polynomiale !), donc il est borné.

En tant que produit d'une fonction intégrable par une fonction continue et bornée, l'expression

$$\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$$

est intégrable sur $]-1,1[$, donc $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ est bien une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

❧ Il est clair que l'application $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ est bilinéaire, symétrique et positive (intégration bornes croissantes d'une fonction positive).

Si $\langle\, P \,|\, P \,\rangle = 0$, alors

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = 0.$$

On intègre ici une fonction *positive* et *continue* sur $]-1,1[$, et l'intégrale est nulle, donc

$$\forall\, t \in\,]-1,1[, \quad \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} = 0.$$

On en déduit que $P(t) = 0$ pour tout $t \in\,]-1,1[$ et donc que $P = 0_E$ (seul le polynôme nul admet une infinité de racines).

Donc $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ est bien un produit scalaire sur E.

3. Tout d'abord, la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$ puisqu'elle est échelonnée en degré au sens où

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \deg T_n = n.$$

❧ On sait que la fonction $\varphi = \text{Arccos}$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ (et décroissante) de l'intervalle $]0,\pi[$ sur l'intervalle $]-1,1[$, que

$$\forall\, t \in\,]-1,1[, \quad \cos\varphi(t) = \cos \text{Arccos}\, t = t$$

et que

$$\forall\, t \in\,]-1,1[, \quad \text{Arccos}'(t) = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

❧ Soient P et Q, deux polynômes fixés. On sait que la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} = P\big(\cos\underbrace{[\varphi(t)]}_{\theta}\big)Q\big(\cos[\varphi(t)]\big)\cdot\big|\varphi'(t)\big|\right]$$

est intégrable sur $]-1,1[$. On déduit du Théorème de changement de variable que la fonction

$$[\theta \mapsto P(\cos\theta)Q(\cos\theta)]$$

est intégrable sur $]0,\pi[$ (ce n'est pas une surprise : il s'agit ici d'une fonction continue sur le segment $[0,\pi]$!) et que

$$\int_{]0,\pi[} P(\cos\theta)Q(\cos\theta)\,d\theta = \int_{]-1,1[} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

Autrement dit, quels que soient les polynômes P et Q,

$$\langle\, P \,|\, Q \,\rangle = \int_0^\pi P(\cos\theta)Q(\cos\theta)\,d\theta.$$

❧ En particulier, pour $0 \leqslant m < n$,

$$\langle\, T_m \,|\, T_n \,\rangle = \int_0^\pi \cos m\theta \cos n\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta\,d\theta = 0$$

puisque les pulsations $(n+m)$ et $(n-m)$ sont strictement positives.

Cela prouve que la base $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une base orthogonale.

❧ Pour $m = n \geqslant 1$, on a cette fois

$$\langle\, T_n \,|\, T_n \,\rangle = \frac{1}{2}\int_0^\pi 1 + \cos 2n\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2}$$

et

$$\langle\, T_0 \,|\, T_0 \,\rangle = \int_0^\pi d\theta = \pi.$$

Donc la base $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une base orthonormée.

Solution 25 **Off2017-191**

1. On suppose que, quel que soit le vecteur $y \in E$,

$$\lim_{n\to+\infty} \langle\, x_n - \ell_1 \,|\, y \,\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle\, x_n - \ell_2 \,|\, y \,\rangle = 0.$$

Par linéarité à gauche,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \langle\, x_n - \ell_1 \,|\, y \,\rangle - \langle\, x_n - \ell_2 \,|\, y \,\rangle = \langle\, \ell_2 - \ell_1 \,|\, y \,\rangle$$

et donc

$$\forall\, y \in E, \quad \langle\, \ell_2 - \ell_1 \,|\, y \,\rangle = 0.$$

Dans un espace préhilbertien, le seul vecteur orthogonal à tous les autres est le vecteur nul, donc $\ell_2 = \ell_1$.

2. On suppose que

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - \ell\| = 0.$$

D'après l'inégalité de Schwarz,

$$\forall\, y \in E,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \big|\langle\, x_n - \ell \,|\, y \,\rangle\big| \leqslant \|x_n - \ell\|\,\|y\|$$

donc, par encadrement,

$$\forall\, y \in E, \quad \lim_{n\to+\infty} \langle\, x_n - \ell \,|\, y \,\rangle = 0.$$

3. Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers ℓ, on vient de prouver qu'elle converge aussi faiblement vers ℓ et le cours nous dit que

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - \ell\| = 0.$$

❧ Réciproquement, supposons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers ℓ. Alors, pour $y = \ell \in E$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \langle\, x_n - \ell \,|\, \ell \,\rangle = 0$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty} \langle\, x_n \,|\, \ell \,\rangle = \|\ell\|^2.$$

Par ailleurs, si $\|x_n\|$ converge vers $\|\ell\|$, alors

$$\|\ell - x_n\|^2 = \|\ell\|^2 + \|x_n\|^2 - 2\,\langle\,\ell\,|\,x_n\,\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|\ell\|^2 + \|\ell\|^2 - 2\|\ell\|^2 = 0$$

ce qui signifie que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers ℓ.

4. Si E est un espace euclidien, il admet une base orthonormée $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant d}$.
Si la suite de vecteurs $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $\ell \in E$, alors en particulier

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant d, \quad \lim_{n\to+\infty} \langle\, x_n - \ell\,|\, e_k\,\rangle = 0.$$

Mais puisque la base $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant d}$ est ORTHONORMÉE,

$$\|x_n - \ell\|^2 = \sum_{k=1}^{d} \langle\, x_n - \ell\,|\, e_k\,\rangle^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers ℓ.

Il n'y a donc pas de différence entre *convergence forte* et *convergence faible* en dimension finie.

✍ *Si $E = \mathbb{R}[X]$ est muni d'un produit scalaire, on peut considérer la base orthonormée $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ déduite de la base canonique par l'algorithme de Gram-Schmidt.*

L'inégalité de Bessel (variante moderne du Théorème de Pythagore) nous dit que

$$\forall\, x \in E,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \langle\, x\,|\, e_k\,\rangle^2 \leqslant \|x\|^2$$

et en particulier que

$$\forall\, x \in E, \quad \lim_{n\to+\infty} \langle\, x\,|\, e_k\,\rangle = 0.$$

Cela signifie que la suite $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers le vecteur nul.

Comme il s'agit d'une suite de vecteurs unitaires *et que le vecteur nul n'est pas unitaire, la suite $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge pas fortement vers le vecteur nul. Nous venons ainsi de prouver que les deux notions de convergence diffèrent en dimension infinie.*

(Autre bizarrerie : la suite $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ n'a aucune valeur d'adhérence, alors même qu'elle est bornée...)

Solution 26 — Off2017-201a

1. On peut se contenter de remarquer que

$$\forall\, P \in E, \quad \varphi(P) = \int_{-1}^{1} 1 \cdot P(t)\,dt = \langle\, 1\,|\, P\,\rangle.$$

Cela prouve que φ est bien une application de E dans $\mathbb{R}$ et, par bilinéarité du produit scalaire, φ est une forme linéaire sur E.

❧ En particulier, $\varphi(1) = 2 \neq 0$, donc la forme linéaire φ n'est pas identiquement nulle. Par conséquent, elle est surjective :

$$\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}, \qquad \operatorname{rg}\varphi = 1$$

et son noyau est un hyperplan de E.

Puisque nous avons déjà, de fait, appliqué le Théorème de représentation de Riesz, il est clair que

$$\operatorname{Ker}\varphi = (\mathbb{R}\cdot 1)^{\perp}.$$

Comme E est un espace de dimension **finie**,

$$(\operatorname{Ker}\varphi)^{\perp} = \mathbb{R}\cdot 1 = \mathbb{R}_0[X].$$

2. Comme φ est une forme linéaire, on peut considérer que φ est à valeurs dans le sous-espace $\mathbb{R}_0[X]$ des polynômes constants et donc aussi à valeurs dans E.

Dans ces conditions,

$$f_a = I_E + 2a\varphi$$

est un endomorphisme de E (en tant que combinaison linéaire de deux endomorphismes).

❧ Quels que soient les polynômes P et Q, par bilinéarité du produit scalaire,

$$\begin{aligned}\left\langle g_a(P) \,\middle|\, Q \right\rangle &= \langle P \mid Q \rangle + 2a\varphi(P) \langle 1 \mid Q \rangle \\ &= \langle P \mid Q \rangle + 2a\varphi(P)\varphi(Q) \\ &= \left\langle P \,\middle|\, Q + 2a\varphi(Q) \right\rangle = \left\langle P \,\middle|\, g_a(Q) \right\rangle\end{aligned}$$

donc g_a est un endomorphisme auto-adjoint.

3. Dans le cas particulier $n = 3$,

$$\varphi(1) = 2, \quad \varphi(X) = 0, \quad \varphi(X^2) = 2/3, \quad \varphi(X^3) = 0$$

donc

$$\mathfrak{Mat}_{\text{can}}(g_a) = \begin{pmatrix} 1+4a & 0 & 4a/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice est triangulaire supérieure, donc elle est inversible si, et seulement si, ses coefficients diagonaux sont tous différents de 0. Ainsi, l'endomorphisme g_a est inversible si, et seulement si, $a \neq -1/4$.

✍ *Dans le cas général ($n \in \mathbb{N}^*$), comme g_a est un endomorphisme de E, espace vectoriel* ***de dimension finie****, g_a est inversible si, et seulement si, il est injectif.*

Il est clair que le noyau de g_a est contenu dans $\mathbb{R}_0[X]$:

$$g_a(P) = P + 2a\varphi(P) = 0 \implies P = -2a\varphi(P) \in \mathbb{R}_0[X].$$

Comme $g_a(1) = 1 + 4a$, la condition est la même : l'endomorphisme g_a est inversible si, et seulement si, $a \neq -1/4$.

✍ *On ne doit pas s'étonner que la matrice de g_a ne soit pas symétrique alors que l'endomorphisme g_a est auto-adjoint. En effet, le lien entre les endomorphismes auto-adjoints et les matrices symétriques n'existe* QUE DANS LES BASES ORTHONORMÉES *et la base canonique n'est pas une base orthonormée, même pas une base orthogonale :*

$$\langle 1 \mid X^2 \rangle = 2/3, \quad \langle X \mid X^3 \rangle = 2/5.$$

4. Comme φ est une forme linéaire, l'application

$$[P \mapsto 2a\varphi(P) \cdot X]$$

est une application linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}_1[X]$. Comme $n \geqslant 1$, l'application f_a est donc bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pas seulement pour $n = 3$).

❧ D'après les calculs précédents,

$$\mathfrak{Mat}_{\text{can}}(f_a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4a & 1 & 4a/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

❧ On reconnaît une matrice triangulaire par blocs :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \star & \star \\ 4a & 1 & \star & \star \\ & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc f_a est inversible si, et seulement si, les deux blocs diagonaux sont inversibles.

Comme les deux blocs diagonaux sont triangulaires et que leurs coefficients diagonaux sont tous différents de 0, c'est bien le cas : l'endomorphisme f_a est inversible.

❧ Comme on l'a remarqué plus haut, il ne suffit pas de constater que la matrice de g_a n'est pas symétrique pour en déduire que l'endomorphisme g_a n'est pas auto-adjoint (puisque la base canonique *n'est pas* une base orthonormée).

Quels que soient P et Q,

$$\begin{aligned}\left\langle f_a(P) \,\middle|\, Q \right\rangle &= \langle P \mid Q \rangle + 2a \langle 1 \mid P \rangle \langle X \mid Q \rangle \\ &\overset{?}{=} \langle P \mid Q \rangle + 2a \langle X \mid P \rangle \langle 1 \mid Q \rangle = \left\langle P \,\middle|\, f_a(Q) \right\rangle.\end{aligned}$$

Si f_a est auto-adjoint, alors en particulier (pour $P = 1$ et $Q = X$) :

$$2a\langle 1\,|\,1\rangle\,\langle X\,|\,X\rangle = 2a\langle 1\,|\,X\rangle\,\langle 1\,|\,X\rangle.$$

Si $a = 0$, alors $g_a = I_E$ est évidemment auto-adjoint !
Si $a \neq 0$, alors il faut que

$$\left|\langle 1\,|\,X\rangle\right| = \|1\|\,\|X\|$$

et donc que les vecteurs 1 et X soient colinéaires (cas d'égalité dans l'inégalité de Schwarz), ce qui est faux !

L'endomorphisme f_a est donc auto-adjoint si, et seulement si, $a = 0$.

✍ *On peut répondre de manière plus savante...*

Comme la matrice canonique est triangulaire par blocs et que les blocs diagonaux sont eux-mêmes triangulaires, les valeurs propres de f_a sont les coefficients diagonaux de la matrice. Le spectre de f_a est donc réduit à $\{1\}$.

D'après le Théorème spectral, si f_a est auto-adjoint, alors cet endomorphisme est diagonalisable.

Mais un endomorphisme diagonalisable qui n'a qu'une seule valeur propre est une homothétie, donc : si f_a est auto-adjoint, alors $f_a = I_E$ et donc $a = 0$.

Solution 27 **Off2017-207b**

1. Comme P et Q sont des polynômes, on peut les assimiler à des applications de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc $\langle P\,|\,Q\rangle$ est bien défini.

Il est clair que $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire et symétrique sur E.

Quel que soit le polynôme P,

$$\langle P\,|\,P\rangle = \sum_{k=0}^{n}\left(P^{(k)}(1)\right)^2 \geqslant 0$$

en tant que somme de réels positifs et donc

$$\langle P\,|\,P\rangle = 0 \iff \forall\, 0 \leqslant k \leqslant n,\quad P^{(k)}(1) = 0.$$

D'après la formule de Taylor pour les polynômes de degré inférieur à n,

$$\forall\, P \in E,\qquad P = \sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(1)}{k!}\cdot(X-1)^k.$$

Donc $\langle P\,|\,P\rangle = 0$ équivaut à $P = 0$. La forme bilinéaire $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ est donc définie positive.

Autrement dit, $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.

2. On peut remarquer que

$$P \in F \iff \langle P\,|\,1\rangle = 0.$$

En effet, avec $Q = 1$, on a $Q^{(0)}(1) = 1$ et $Q^{(k)}(1) = 0$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$.

L'ensemble F est donc un sous-espace de E en tant que noyau de l'application linéaire

$$[P \mapsto \langle P\,|\,1\rangle].$$

Plus précisément, comme cette application linéaire est une forme linéaire non identiquement nulle (puisque $\langle 1\,|\,1\rangle = 1 \neq 0$), le sous-espace F est un hyperplan de E et donc

$$\dim F = \dim E - 1 = n.$$

3. Comme E est un espace euclidien (dimension FINIE !), on déduit de la question précédente que

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp = F \overset{\perp}{\oplus} (\mathbb{R}\cdot 1).$$

Comme le projeté orthogonal du monôme 1 sur le sous-espace F est le vecteur nul, le cours nous dit que

$$d(1, F) = \|1 - 0\| = \|1\| = 1.$$

✍ *Pour un polynôme quelconque $P \in E$, le projeté orthogonal de P sur la droite $F^\perp$ est le polynôme constant*

$$\frac{\langle P\,|\,1\rangle}{\langle 1\,|\,1\rangle}\cdot 1 = P(1),$$

donc

$$P = \underbrace{\big(P - P(1)\big)}_{\in F} + \underbrace{P(1)}_{\in F^\perp}.$$

Dans ce cas,

$$d(P, F) = \|P(1)\| = |P(1)|\,\|1\| = |P(1)|.$$

Solution 28 **Off2017-220a**

✍ *Comme $\mathbb{R}^3$ est un espace euclidien, la projection orthogonale sur un sous-espace quelconque de $\mathbb{R}^3$ est bien définie.*

Comme $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique, le vecteur

$$\mathbf{u} = (1, -2, 1)$$

est un vecteur orthogonal au plan H :

$$\mathbf{x} = (x, y, z) \in H \iff \langle \mathbf{x} \,|\, \mathbf{u} \rangle = 0$$

et par conséquent

$$\mathbb{R}^3 = H \overset{\perp}{\oplus} (\mathbb{R} \cdot \mathbf{u})^\perp.$$

D'après le cours, le projeté orthogonal du vecteur $\mathbf{x} = (x, y, z)$ sur la droite $\mathbb{R} \cdot \mathbf{u}$ est le vecteur

$$\frac{\langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{u} \rangle} \cdot \mathbf{u} = \frac{x - 2y + z}{6} \cdot (1, -2, 1)$$

et le projeté orthogonal du vecteur $\mathbf{x}$ sur le plan H est donc le vecteur

$$p(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{x - 2y + z}{6} \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{6} \cdot (5x + 2y - z,\ 2x + 2y + 2z,\ -x + 2y + 5z).$$

La matrice relative à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur H est donc

$$\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

✍ *On remarque que cette matrice est symétrique, ce qui est normal (une projection orthogonale est un endomorphisme auto-adjoint et, ici, la base dans laquelle on le représente est bien une base orthonormée).*

On constate également que la trace de la matrice est égale à 2, ce qui est bien la dimension du sous-espace H sur lequel on projette.

Il est un peu plus long de vérifier que les colonnes appartiennent au sous-espace H et que le vecteur $\mathbf{u}$ appartient au noyau (puisque $C_1 - 2C_2 + C_3 = 0$).

Ces vérifications simples servent à nous donner confiance dans le résultat des calculs (ou éventuellement à détecter une erreur de calcul).

Solution 29 **Off2017-228a**

1. Pour tout réel α, la fonction

$$f_\alpha = \big[t \mapsto t^\alpha e^{-t}\big]$$

est continue sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$.

Lorsque t tend vers 0,

$$f_\alpha(t) \sim t^\alpha.$$

On sait que la fonction $[t \mapsto t^\alpha]$ est intégrable au voisinage de 0 si, et seulement si, $\alpha > -1$. Donc f_α est intégrable au voisinage de 0 si, et seulement si, $\alpha > -1$.

Lorsque t tend vers $+\infty$,

$$f_\alpha(t) = t^\alpha e^{-t/2} \cdot e^{-t/2} = o(e^{-t/2}).$$

On sait que la fonction $\big[t \mapsto e^{-t/2}\big]$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, donc la fonction f_α est intégrable au voisinage de $+\infty$ quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Par conséquent, f_α est intégrable sur $]0,+\infty[$ si, et seulement si, $\alpha > -1$ (et en particulier pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$).

2. Les expressions
$$f'(t)g(t) = (n+1)t^n \cdot (-e^{-t}) \quad \text{et} \quad f(t)g'(t) = t^{n+1} \cdot e^{-t}$$
sont intégrables sur $]0,+\infty[$ et le produit
$$f(t)g(t) = t^{n+1} \cdot (-e^{-t})$$
tend vers une limite finie (nulle !) lorsque t tend vers 0 et lorsque t tend vers $+\infty$.

✍ *Si on est vraiment décidé à bien travailler, il n'est pas difficile de vérifier avec soin et rigueur les conditions d'application de la formule d'intégration par parties : il suffit de prendre le temps de poser les calculs au brouillon...*

D'après la formule d'intégration par parties,
$$\int_0^{+\infty} (n+1)t^n \cdot (-e^{-t})\,dt = \lim_{t\to+\infty} t^{n+1} \cdot (-e^{-t}) - \lim_{t\to 0} t^{n+1} \cdot (-e^{-t}) - \int_0^{+\infty} t^{n+1} \cdot e^{-t}\,dt$$
c'est-à-dire
$$-(n+1)I_n = -I_{n+1}.$$
Comme
$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1,$$
on en déduit par récurrence que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad I_n = n!.$$

3. Quels que soient les polynômes P et Q dans E, la fonction
$$\big[t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}\big]$$
est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$. De plus, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que
$$P(t)Q(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}(t^n)$$
donc, d'après la première question, l'intégrale généralisée
$$\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,dt$$
est (absolument) convergente.

L'application $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ est donc bien définie sur $E \times E$. Il est clair qu'il s'agit d'une forme bilinéaire et symétrique.

Quel que soit le polynôme $P \in E$,
$$\langle P\,|\,P\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)^2 e^{-t}\,dt \geqslant 0$$
(intégration bornes croissantes d'une fonction intégrable et positive).

Comme la fonction $\big[t \mapsto P(t)^2e^{-t}\big]$ est **continue** et positive, on en déduit que
$$\forall\, t \in [0,+\infty[, \quad P(t)^2e^{-t} = 0,$$
donc que
$$\forall\, t \in [0,+\infty[, \quad P(t) = 0$$
(puisque la fonction exp ne s'annule pas) et donc que P est bien le polynôme nul (le seul polynôme admettant une infinité de racines).

Donc $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ est bien un produit scalaire sur E.

4. Pour tout $P \in E$, il est clair que
$$\varphi(P) = XP'' + (1-X)P'$$
est un polynôme. On vérifie sans peine que, quels que soient les polynômes P et Q, quel que soit le scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + Q) &= X(\lambda P + Q)'' + (1-X)(\lambda P + Q)' \\ &= \lambda\big[XP'' + (1-X)P'\big] + \big[Q'' + (1-X)Q'\big] \\ &= \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)\end{aligned}$$
ce qui prouve que φ est bien un endomorphisme de E.

5. Nous allons à nouveau intégrer par parties. Toujours d'après la première question, les expressions

$$f'(t)g(t) = \big[tP''(t) + (1-t)P'(t)\big]e^{-t} \cdot Q(t)$$

et

$$f(t)g'(t) = \big[tP'(t)e^{-t}\big] \cdot Q'(t)$$

sont intégrables sur $[0, +\infty[$ et il est clair que le produit

$$f(t)g(t) = tP'(t)Q(t)e^{-t}$$

tend vers une limite finie (nulle...) lorsque t tend vers 0 et lorsque t tend vers $+\infty$.

Par conséquent,

$$\int_0^{+\infty} f'(t)g(t)\,dt = -\int_0^{+\infty} f(t)g'(t)\,dt$$

c'est-à-dire

$$\big\langle\, \varphi(P) \,\big|\, Q \,\big\rangle = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\,dt.$$

✍ *On a trouvé une expression* symétrique *en fonction de* P *et* Q.

❧ Une nouvelle intégration par parties avec

$$f(t) = P(t) \quad \text{et} \quad g(t) = tQ'(t)e^{-t}$$

nous donne alors

$$\big\langle\, \varphi(P) \,\big|\, Q \,\big\rangle = (-1)^2 \big\langle\, P \,\big|\, \varphi(Q) \,\big\rangle.$$

✍ *Inutile d'entrer dans les détails : c'est essentiellement la même chose. Le simple fait d'expliciter les fonctions* f *et* g *montre qu'on sait parfaitement de quoi il retourne — et qu'on ne cherche pas à faire illusion.*

L'endomorphisme φ admet donc un adjoint, qui est égal à φ lui-même.

✍ *Dans un espace euclidien (dimension* finie*), tout endomorphisme admet un adjoint.*

En revanche, dans un espace préhilbertien de dimension infinie*, il n'est pas sûr qu'un endomorphisme admette un adjoint. C'est pour cette raison que je rédige ainsi la conclusion.*

Solution 30 **Off2019-175**

1. Si une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est à la fois symétrique et antisymétrique, alors

$$M = M^T = -M$$

donc $M = O_n$. Les sous-espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont donc en somme directe.

D'autre part, toute matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique :

$$M = \frac{M + M^T}{2} + \frac{M - M^T}{2} \tag{$\star$}$$

donc

$$\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R}).$$

Enfin, si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et si $B \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, alors

$$\langle\, A \,|\, B \,\rangle = \mathrm{tr}(A^T B) = \mathrm{tr}(AB)$$

(symétrie de A) cependant que

$$\begin{aligned} \langle\, A \,|\, B \,\rangle &= \langle\, B \,|\, A \,\rangle \\ &= \mathrm{tr}(B^T A) = \mathrm{tr}(-BA) = -\mathrm{tr}(AB) \end{aligned}$$

(symétrie du produit scalaire, antisymétrie de B et propriété de la trace). Par conséquent, $\langle\, A \,|\, B \,\rangle = 0$, donc ces deux sous-espaces sont orthogonaux et

$$\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathscr{A}_n(\mathbb{R}).$$

2. On applique la relation $(\star)$: $M = p(M) + q(M)$ où

$$p(M) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$$
$$q(M) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{A}_3(\mathbb{R}).$$

La distance de M à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est égale à

$$\begin{aligned}\|M - p(M)\| = \|q(M)\| &= \frac{1}{2}\sqrt{4 \times 3^2 + 2 \times 2^2} \\ &= \sqrt{11}.\end{aligned}$$

3. L'ensemble H est un hyperplan de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ en tant que noyau de la forme linéaire tr ou bien en tant qu'orthogonal de la droite $D = \mathbb{R} \cdot I_n$ puisque

$$\operatorname{tr}(M) = 0 \iff \langle I_n \,|\, M \rangle = 0.$$

Puisqu'on connaît une base orthogonale de D, on peut calculer facilement la décomposition de M dans $E = D \overset{\perp}{\oplus} H$: il s'agit de

$$M = \frac{\langle I_n \,|\, M \rangle}{\|I_n\|^2} I_n + \left(M - \frac{\langle I_n \,|\, M \rangle}{\|I_n\|^2} I_n\right).$$

La distance de M au sous-espace H est alors égale à

$$\left\| \frac{\langle I_n \,|\, M \rangle}{\|I_n\|^2} I_n \right\| = \frac{|\langle I_n \,|\, M \rangle|}{\|I_n\|}.$$

Dans le cas particulier où $M = I_n$, la décomposition est simplement

$$I_n = \underbrace{I_n}_{\in D} + \underbrace{0_n}_{\in H}$$

et la distance cherchée est égale à $\|I_n\| = \sqrt{n}$.

Solution 31 — Off2020-198b

1. Ces intégrales existent au sens propre : les intégrandes sont des fonctions continues sur l'intervalle borné $]0, 1]$ et tendent vers une limite finie (nulle, en fait !) au voisinage de 0 (par croissances comparées des puissances de t et des puissances de $\ell n\, t$).

❧ Comme $t^{n+1} \ell n\, t$ et $t^{n+1} \ell n^2\, t$ tendent vers 0 lorsque t tend vers 0, on peut intégrer par parties sur $]0, 1]$.

$$\int_0^1 t^n \ell n\, t \, dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \ell n\, t\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^n}{n+1} \, dt = \frac{-1}{(n+1)^2}$$
$$\int_0^1 t^n \ell n^2\, t \, dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \ell n^2\, t\right]_0^1 - \frac{2}{n+1}\int_0^1 t^n \ell n\, t \, dt = \frac{2}{(n+1)^3}$$

2. **Rappel —** Le projeté orthogonal de w sur F est l'unique vecteur $p(w) \in F$ tel que $w - p(x) \in F^{\perp}$.

❧ Notons $p(w)$, le projeté orthogonal de w sur F. Il existe deux réels a et b tels que

$$w = a \cdot u + b \cdot v$$

et comme

$$F = \operatorname{Vect}(u, v),$$

le vecteur $w - p(w)$ est orthogonal à F si, et seulement si,

$$\begin{cases} \langle w - p(w) \,|\, u \rangle = 0 \\ \langle w - p(w) \,|\, v \rangle = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} a \langle u|u \rangle + b \langle u|v \rangle = \langle w|u \rangle \\ a \langle u|v \rangle + b \langle v|v \rangle = \langle w|v \rangle. \end{cases}$$

❧ D'après la question précédente,

$$\langle u \,|\, u \rangle = 1/3, \quad \langle u \,|\, v \rangle = 1/4, \quad \langle v \,|\, v \rangle = 1/5, \quad \langle w \,|\, u \rangle = -1/16, \quad \langle w \,|\, v \rangle = -1/25.$$

On applique les formules de Cramer et on trouve

$$p(w) = \frac{-3}{5} \cdot u + \frac{11}{20} \cdot v.$$

3. On considère trois fonctions

$$u = [t \mapsto 1] \qquad v = [t \mapsto t] \qquad w = [t \mapsto t \ln t]$$

en convenant que $w(0) = 0$ pour que ces trois fonctions soient continues sur le segment $[0,1]$. On note E, le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ engendré par ces trois fonctions :

$$E = \text{Vect}(u, v, w)$$

qu'on munit du produit scalaire défini par

$$\forall\, f, g \in E, \quad \langle f \,|\, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\, t^2 \,dt.$$

✍ *Il faut prendre soin de démontrer qu'il s'agit bien d'un produit scalaire !*
❧ *Comme $E \subset \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, toutes les intégrales sont bien définies.*
❧ *Si $\langle f \,|\, f \rangle = 0$, alors $[f(t)]^2 = 0$ pour tout $t \in \,]0,1[$ (car $\big[t \mapsto t^2 f^2(t)\big]$ est une fonction continue et positive sur l'intervalle $]0,1[$ et que son intégrale est nulle). Comme f est continue sur le segment $[0,1]$, cela prouve que f est bien le vecteur nul de E.*

On considère alors le sous-espace

$$F = \text{Vect}(u, v).$$

Quels que soient les réels a et b, la fonction

$$[t \mapsto at + b] = a \cdot u + b \cdot v$$

est un vecteur de F et par conséquent

$$\int_0^1 (at + b - t \ln t)^2 t^2 \,dt = \|(a \cdot u + b \cdot v) - w\|^2.$$

❧ Il s'agit donc ici de calculer (le carré de) la distance du vecteur w au plan F. Plus précisément, la borne inférieure cherchée est égale à

$$\langle w \,|\, w - p_F(w) \rangle \tag{$\star$}$$

où $p_F(w)$ est le projeté orthogonal de w sur le sous-espace F.
❧ La borne inférieure

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (at + b - t \ln t)^2 t^2 \,dt$$

est égale à $\big[\, d(w, F) \big]^2$ et donc à

$$\begin{aligned} \langle w \,|\, w - p(w) \rangle &= \langle w \,|\, w \rangle - \big\langle w \,\big|\, a \cdot u + b \cdot v \big\rangle \\ &= \langle w \,|\, w \rangle - a \langle w \,|\, u \rangle - b \langle w \,|\, v \rangle \\ &= \frac{2}{125} - \frac{-3}{5} \cdot \frac{-1}{16} - \frac{11}{20} \cdot \frac{-1}{25} = \frac{1}{2\,000}. \end{aligned}$$

✍ *Une fois encore, il faut retarder autant que possible les applications numériques et choisir l'expression littérale qui donnera les calculs les plus simples !*
Si on ignore la formule ($\star$), on va devoir calculer

$$\big\|w - (a \cdot u + b \cdot v)\big\|^2.$$

En développant cette expression, on trouve

$$\langle w \,|\, w \rangle - a \langle w \,|\, u \rangle - b \langle v \,|\, w \rangle + \big[a^2 \|u\|^2 + 2ab \langle u \,|\, v \rangle + b^2 \|v\|^2 - a \langle w \,|\, u \rangle - b \langle w \,|\, v \rangle\big]$$

et les calculs (littéraux !) effectués précédemment nous assurent que la quantité entre crochets est nulle : comme ça ne saute pas aux yeux, il nous faudra donc calculer numériquement cette quantité (avec tous les risques d'erreur que cela comporte : on calcule ici sur des rationnels) pour trouver qu'elle est nulle.

Solution 32 **rms130-525**

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et on va traiter la matrice M comme un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$: quitte à identifier le vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ à la colonne X qui le représente dans la base canonique (orthonormée !) de $\mathbb{R}^n$, on identifie la colonne MX au vecteur Mx, image de x par l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice M.

✍ *(Toutes ces précautions pour légitimer les abus de notation qui vont suivre et qui, en fait, n'abusent personne.)*

❧ Soient $x \in \operatorname{Ker} M$ et $y \in \operatorname{Im} M$: il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = Mx_0$ et comme M est antisymétrique,

$$\langle\, y \,|\, x \,\rangle = \langle\, Mx_0 \,|\, x \,\rangle = (Mx_0)^\top.x = x_0^\top.(-Mx) = -\langle\, x \,|\, 0 \,\rangle = 0.$$

On en déduit que les deux sous-espaces $\operatorname{Ker} M$ et $\operatorname{Im} M$ sont orthogonaux. D'après le théorème du rang,

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} M \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im} M.$$

Cette décomposition en somme directe orthogonale est d'autant plus intéressante que les deux sous-espaces sont stables par M.

❧ En concaténant une base orthonormée $\mathscr{B}_0$ de $\operatorname{Ker} M$ et une base orthonormée $\mathscr{B}_1$ de $\operatorname{Im} M$, on obtient donc une base orthonormée $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^n$ et en notant Q, la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$, on obtient donc une matrice orthogonale (changement de base orthonormée) telle que

$$M' = Q^{-1}MQ = Q^\top.M.Q = \begin{pmatrix} 0_{n-r} & 0_{n-r,r} \\ 0_{r,n-r} & M_1 \end{pmatrix}$$

(formule du changement de base et décomposition en somme directe de sous-espaces stables).

❧ La matrice M_1 représente, dans la base orthonormée $\mathscr{B}_1$ de $\operatorname{Im} M$, l'endomorphisme v induit par restriction de M au sous-espace stable $\operatorname{Im} M$.

Du fait que M est antisymétrique, on déduit que le produit $Q^\top.M.Q$ est aussi antisymétrique et par conséquent la matrice $M_1 \in \mathfrak{M}_r(\mathbb{R})$ est elle aussi une matrice antisymétrique.

Si $v(x) = 0$, alors x appartient à la fois à $\operatorname{Im} M$ (= espace sur lequel v est défini) et à $\operatorname{Ker} M$ (un vecteur du noyau de v est, par définition, un vecteur du noyau de M). Or $\operatorname{Ker} M$ et $\operatorname{Im} M$ sont en somme directe, donc $x = 0$ et par conséquent v est inversible (Théorème du rang, appliqué à un endomorphisme de $\operatorname{Im} M$, espace de dimension finie). La matrice M_1 est donc inversible.

Comme $M_1 \in \mathfrak{M}_r(\mathbb{R})$ est antisymétrique et inversible, on a donc

$$0 \neq \det M_1 = \det(M_1^\top) = \det(-M_1) = (-1)^r \det M_1,$$

ce qui prouve que l'entier r est pair. Or, par construction, $r = \dim \operatorname{Im} M$, donc $r = \operatorname{rg} M$.

Solution 33 **rms130-922**

1. Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ et ne s'annule pas, on a

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(t) & \mapsto & \langle\, f(t) \,|\, f(t) \,\rangle & \mapsto & \sqrt{\langle\, f(t) \,|\, f(t) \,\rangle} \end{array}$$

donc l'application $[t \mapsto \|f(t)\|]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ en tant que composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et d'après la Formule de Leibniz (dérivation d'un produit — ici d'un produit scalaire)

$$\frac{d}{dt}\big(\|f(t)\|\big) = \frac{\big\langle\, f(t) \,\big|\, f'(t) \,\big\rangle}{\|f(t)\|}.$$

❧ En tant que quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ (dont le dénominateur ne s'annule pas), la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{f'(t)}{\|f(t)\|} - \frac{f(t)}{\|f(t)\|^2} \cdot \frac{d}{dt}\big(\|f(t)\|\big) \\ &= \frac{f'(t)}{\|f(t)\|} - \frac{\langle\, f(t) \,|\, f'(t) \,\rangle \cdot f(t)}{\|f(t)\|^3}. \end{aligned}$$

Par hypothèse, le couple de vecteurs $\big(f(t), f'(t)\big)$ est une famille liée et le vecteur $f(t)$ n'est pas nul, donc il existe $\alpha(t) \in \mathbb{R}$ tel que

$$f'(t) = \alpha(t) \cdot f(t)$$

et par conséquent

$$g'(t) = \frac{\alpha(t)\cdot f(t)}{\|f(t)\|} - \frac{\alpha(t)\,\|f(t)\|^2\cdot f(t)}{\|f(t)\|^3} = 0.$$

2. La fonction g est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Il existe donc un vecteur $e = g(0)$ unitaire tel que

$$\forall\, t\in\mathbb{R},\qquad g(t) = e$$

et par conséquent

$$\forall\, t\in\mathbb{R},\qquad f(t) = \|f(t)\|\cdot e \in \mathbb{R}\cdot e.$$

✍ *Réciproquement,*

$$\forall\, t\in\mathbb{R},\qquad f'(t) = \frac{\langle\, f(t)\,|\,f'(t)\,\rangle}{\|f(t)\|}\cdot e\in\mathbb{R}\cdot e$$

donc les vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$ forment une famille liée.

3. Pour $t\geqslant 0$, on pose $f(t) = t^2\cdot e_1$ et pour $t\leqslant 0$, on pose $f(t) = t^2\cdot e_2$. Ces deux définitions sont cohérentes, car $f(0) = 0$ dans les deux cas.

Il est clair que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ avec

$$\forall\, t>0,\quad f'(t) = 2t\cdot e_1 \quad\text{et}\quad \forall\, t<0,\quad f'(t) = 2t\cdot e_2.$$

De plus, $f(t) = \mathcal{O}(t^2)$ lorsque t tend vers 0, donc f est en fait dérivable en $t=0$ avec $f'(0)=0$. Les expressions de $f'(t)$ pour $t\neq 0$ montrent alors que f' est bien continue sur $\mathbb{R}$.

Donc f est une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, t\neq 0,\quad f'(t) = \frac{2}{t}\cdot f(t)\quad\text{et}\quad f'(0)=0$$

donc le couple $\big(f(t), f'(t)\big)$ est une famille liée pour tout $t\in\mathbb{R}$.

✍ *Interprétation cinématique : si le vecteur position $f(t)$ et le vecteur vitesse sont proportionnels, alors le mouvement est rectiligne tant que le vecteur position ne s'annule pas ; si le vecteur position et le vecteur vitesse s'annulent simultanément, alors on peut changer de direction lors du passage par l'origine...*

Solution 34 rms130-981

Comme U est supposé ouvert, il y a un sens à supposer que f soit de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et comme U est supposé convexe :

$$\forall\,(a,b)\in U\times U,\ \forall\, t\in[0,1],\quad (1-t)a+tb\in U$$

et il y a donc un sens à supposer que f soit convexe sur U.

❧ On suppose que f est convexe sur U et on fixe deux points $a\neq b$ dans U :

$$\forall\, t\in[0,1],\quad f\big((1-t)a+tb\big)\leqslant(1-t)f(a)+tf(b).$$

L'application $g\ :\ [0,1]\to\mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x\in[0,1],\quad g(x) = f\big((1-x)a+xb\big)$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ (comme composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$).

Quels que soient $0\leqslant x<y\leqslant 1$ et $t\in[0,1]$, on pose

$$z = (1-t)x+ty\in[0,1]$$

et (par associativité du barycentre)

$$(1-z)a+zb = (1-t)\big[(1-x)a+xb\big]+t\big[(1-y)a+yb\big]$$

donc (par convexité de f)

$$g(z)\leqslant(1-t)g(x)+tg(y)$$

ce qui prouve que g est convexe sur $[0,1]$.

En particulier, la dérivée de g est une fonction croissante et donc

$$\frac{g(1)-g(0)}{1-0} \geqslant g'(0)$$

c'est-à-dire

$$f(b)-f(a) \geqslant df(a)(b-a) = \left\langle \nabla f(a) \,\middle|\, b-a \right\rangle.$$

❧ Réciproquement, on suppose que

$$\boxed{\forall\,(u,v)\in U\times U,} \quad f(u) \geqslant f(v) + \left\langle \nabla f(v) \,\middle|\, u-v \right\rangle$$

et on considère trois points de U :

$$a, \quad b \quad \text{et} \quad c=(1-t)a+tb$$

(où $t \in [0,1]$).

Par hypothèse,

$$\begin{aligned} f(a) &\geqslant f(c) + \left\langle \nabla f(c) \,\middle|\, a-c \right\rangle,\\ f(b) &\geqslant f(c) + \left\langle \nabla f(c) \,\middle|\, b-c \right\rangle. \end{aligned}$$

Or $a-c = t(a-b)$ et $b-c=(1-t)(b-a)$, donc

$$\begin{aligned} f(a) &\geqslant f(c) - t\left\langle \nabla f(c) \,\middle|\, b-a \right\rangle,\\ f(b) &\geqslant f(c) + (1-t)\left\langle \nabla f(c) \,\middle|\, b-a \right\rangle \end{aligned}$$

donc

$$t\big[f(b)-f(c)\big] \geqslant t(1-t)\left\langle \nabla f(c) \,\middle|\, b-a \right\rangle \geqslant (1-t)\big[f(c)-f(a)\big]$$

et finalement

$$f(c) \leqslant (1-t)f(a)+tf(b),$$

ce qui prouve que f est bien convexe sur U.

Solution 35 rms130-1142

1. Comme le produit fg est une fonction <u>continue</u> sur le <u>segment</u> $[-1,1]$, l'intégrale $\langle f \mid g \rangle$ est bien définie. Donc $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

Cette application est évidemment symétrique et elle est bilinéaire (par linéarité de l'intégrale).

Si $f=g$, alors la fonction intégrande f^2 est positive. Comme les bornes de l'intégrale sont dans l'ordre croissant, l'intégrale $\langle f \mid f \rangle$ est positive.

Si $\langle f \mid f \rangle = 0$, alors on a une fonction <u>continue</u> et <u>positive</u> dont l'intégrale sur $[-1,1]$ est nulle. Donc $f^2(t)=0$ pour tout $t\in[-1,1]$ et par conséquent $f=0_E$.

L'application $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est donc un produit scalaire sur E.

2. a. Le sous-espace F est engendré par deux vecteurs, donc sa dimension est inférieure à 2.

Ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels, donc ils forment une famille libre et par conséquent $\dim F = 2$.

2. b. Comme $f_0 f_1$ est une fonction continue et impaire, son intégrale sur le segment $[-1,1]$ est nulle (ce segment admet l'origine pour centre de symétrie).

Les deux vecteurs f_0 et f_1 sont donc orthogonaux.

3. Toute fonction $f \in F$ est une fonction affine. En particulier, sa dérivée seconde est nulle. Comme la dérivée seconde de g n'est pas nulle, $g \notin F$.

4. Puisqu'on connaît une base orthog<u>onale</u> de F, le projeté de g sur F est le vecteur h défini par

$$h = \frac{\langle g \mid f_0 \rangle}{\|f_0\|^2}\cdot f_0 + \frac{\langle g \mid f_1 \rangle}{\|f_1\|^2}\cdot f_1.$$

Or

$$\|f_0\|^2 = 2, \quad \|f_1\|^2 = \frac{2}{3}, \quad \langle g \mid f_0 \rangle = e - e^{-1}, \quad \langle g \mid f_1 \rangle = 2e^{-1}$$

puisque

$$\int^x te^t\,dt = [te^t]^x - \int^x e^t\,dt = (x-1)e^x.$$

Ainsi, pour tout $t \in [-1,1]$,

$$h(t) = \frac{e-e^{-1}}{2} + 3e^{-1}t.$$

5. Il s'agit de calculer le minimum de
$$\left\|g-(af_0+bf_1)\right\|^2.$$
On sait que ce minimum existe, qu'il est atteint seulement pour $af_0+bf_1=h$ et qu'il est égal à
$$\langle\, g-h\,|\,g\,\rangle=\|g\|^2-\frac{e-e^{-1}}{2}\langle\, g\,|\,f_0\,\rangle-3e^{-1}\langle\, g\,|\,f_1\,\rangle=\frac{e^2-e^{-2}}{2}-\frac{(e-e^{-1})^2}{2}-6e^{-2}=1-7e^{-2}.$$

Solution 36 **rms130-1144**

1. L'application $[x\mapsto k\langle\, x\,|\,a\,\rangle\cdot a]$ est linéaire (par linéarité à gauche du produit scalaire) et c'est une application de E dans E. Comme l'identité $[x\mapsto x]$ est aussi un endomorphisme de E, on en déduit que f est un endomorphisme de E.
2. Soient x et y dans E.
Comme $k\langle\, x\,|\,a\,\rangle\in\mathbb{R}$ et que le produit scalaire est linéaire à gauche,
$$\langle\, f(x)\,|\,y\,\rangle=\langle\, x\,|\,y\,\rangle+k\langle\, x\,|\,a\,\rangle\langle\, a\,|\,y\,\rangle.$$
De même, par linéarité à droite du produit scalaire,
$$\langle\, x\,|\,f(y)\,\rangle=\langle\, x\,|\,y\,\rangle+k\langle\, y\,|\,a\,\rangle\langle\, x\,|\,a\,\rangle.$$
Par symétrie du produit scalaire,
$$k\langle\, y\,|\,a\,\rangle\langle\, x\,|\,a\,\rangle=k\langle\, a\,|\,y\,\rangle\langle\, x\,|\,a\,\rangle=k\langle\, x\,|\,a\,\rangle\langle\, a\,|\,y\,\rangle,$$
ce qui prouve que l'endomorphisme f est bien auto-adjoint.
3. Comme f est un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie, le Théorème du rang nous assure que f est inversible si, et seulement si, son noyau est réduit au vecteur nul.
Si $x\in\operatorname{Ker} f$, alors
$$f(x)=x+k\langle\, x\,|\,a\,\rangle\cdot a=0_E$$
donc $x=-k\langle\, x\,|\,a\,\rangle\cdot a$. On en déduit que le vecteur x est nécessairement colinéaire au vecteur a et donc que $\operatorname{Ker} f\subset\mathbb{R}\cdot a$.
Or $f(a)=(1+k\|a\|^2)\cdot a=(1+k)\cdot a$ puisque a est un vecteur unitaire.
Deux cas se présentent :
— si $k=-1$, alors $a\in\operatorname{Ker} f$ et donc $\operatorname{Ker} f=\mathbb{R}\cdot a\neq\{0_E\}$;
— si $k\neq-1$, alors $a\notin\operatorname{Ker} f$ et donc $\operatorname{Ker} f=\{0_E\}$.
Par conséquent, l'endomorphisme f est inversible si, et seulement si, $k\neq-1$.
4. Pour tout $x\in E$,
$$\begin{aligned}(f\circ f)(x)&=f\big(x+k\langle\, x\,|\,a\,\rangle\cdot a\big)\\&=f(x)+k\langle\, x\,|\,a\,\rangle\cdot f(a)\\&=f(x)+(1+k)\big[k\langle\, x\,|\,a\,\rangle\cdot a\big]\\&=f(x)+(1+k)\big[f(x)-x\big]=(2+k)\cdot f(x)-(1+k)\cdot x.\end{aligned}$$

✍ *On déduit de cette relation que le polynôme*
$$X^2-(2+k)X+(1+k)=(X-1)(X-1-k)$$
est un polynôme annulateur de f.

5. Comme f est symétrique, il est diagonalisable (Théorème spectral) et ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.
On a déjà remarqué que $f(a)=(1+k)\cdot a$, donc a est un vecteur propre (unitaire, donc *non nul*) associé à la valeur propre $(1+k)$.
Si x est orthogonal à a, alors $f(x)=x=1\cdot x$, donc 1 est aussi une valeur propre de f. On distingue à nouveau deux cas.
— Si $k=0$, alors $f=\mathrm{Id}$ et $\mathrm{Sp}(f)=\{1\}$.
— Si $k\neq0$, alors $\mathrm{Sp}(f)=\{1,1+k\}$ et les sous-espaces propres associés à 1 et à $(1+k)$ sont respectivement la droite $\mathbb{R}\cdot a$ et l'hyperplan $(\mathbb{R}\cdot a)^\perp$.

✍ *Un endomorphisme est inversible si, et seulement si, son spectre ne contient pas* 0. *On a ainsi retrouvé le fait que* f *était inversible si, et seulement si,* $k\neq-1$.

✍ *Comme* f *est diagonalisable et qu'il admet* 1 *et* $1+k$ *pour valeurs propres, on en déduit que, si* $k\neq0$, *alors son polynôme minimal est égal à* $(X-1)(X-1-k)$.
Pour $k=0$, *son polynôme minimal est évidemment* $X-1$.

Solution 37 rms130-1145

1. Il est clair que l'application

$$[(x, y) \mapsto \langle f(x) \,|\, y \rangle]$$

est une forme bilinéaire symétrique sur E.

Appliquons le Théorème spectral à l'endomorphisme f, qui est supposé symétrique : il existe une base orthonormée

$$\mathscr{B} = (\varepsilon_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$$

de E constituée de vecteurs propres pour f.

Pour tout vecteur $x \in E$, il existe une famille de scalaires $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ telle que

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \varepsilon_k.$$

Comme $\mathscr{B}$ est une base orthonormée, on déduit du Théorème de Pythagore que

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

En notant α_k la valeur propre de f associée au vecteur propre ε_k, on a aussi

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \cdot \varepsilon_k$$

et comme $\mathscr{B}$ est une base orthonormée (bis !),

$$\langle f(x) \,|\, x \rangle = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\alpha_k}_{>0} \underbrace{x_k^2}_{\geqslant 0}.$$

Il est maintenant clair que

$$\forall\, x \in E, \quad \langle f(x) \,|\, x \rangle \geqslant 0.$$

Si une somme de termes positifs est nulle, c'est que tous ses termes sont nuls. Comme les α_k sont strictement positifs, si $\langle f(x) \,|\, x \rangle = 0$, c'est que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad x_k = 0$$

et donc que $x = x_1 \cdot \varepsilon_1 + \cdots + x_n \cdot \varepsilon_n = 0_E$.

Donc $[(x, y) \mapsto \langle f(x) \,|\, y \rangle]$ est bien un produit scalaire.

2. Soit $A = \operatorname{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Comme les α_k sont strictement positifs, il existe un unique endomorphisme g de E tel que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \operatorname{Diag}(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n})$$

et les valeurs propres $\sqrt{\alpha_k}$ de cet endomorphisme g sont strictement positives elles aussi.

La matrice de g dans la base $\mathscr{B}$ est symétrique (réelle) et $\mathscr{B}$ est une base orthonormée, donc l'endomorphisme g est bien symétrique.

Enfin,

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(g^2) = \operatorname{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$$

donc $g^2 = f$.

Solution 38 rms130-1320

1. Prenons $x = e_j$: comme e_j est unitaire,

$$1 = \|e_j\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle e_j \,|\, e_i \rangle^2 = \|e_j\|^4 + \sum_{i \neq j} \langle e_j \,|\, e_i \rangle^2$$

et donc

$$\sum_{i \neq j} \langle e_j \,|\, e_i \rangle^2 = 0.$$

Une somme de réels positifs est nulle si, et seulement si, chaque terme est nul, donc

$$\forall\, i \neq j, \quad \langle e_j \,|\, e_i \rangle = 0.$$

La famille $(e_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ est donc orthogonale.

2. Si x est orthogonal au sous-espace $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)$, alors en particulier

$$\forall\, 1\leqslant i\leqslant n,\quad \langle\, x \,|\, e_i\,\rangle = 0$$

et donc

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle\, x \,|\, e_i\,\rangle^2 = 0.$$

Par conséquent $x = 0_E$.

3. On sait maintenant que $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille orthonormée, et donc libre.
Notons $F = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)$. Comme E est un espace euclidien, on sait que

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$$

et on a démontré que $F^{\perp} = \{0_E\}$. Par conséquent, $E = F$, ce qui prouve que la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est aussi une famille génératrice de E.

Finalement, la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de E.

✍ *On a démontré en particulier que* $\dim E = n$.

Solution 39 rms132-455

1. Supposons que H soit un hyperplan de E. Par définition, il existe une droite D telle que

$$E = H \oplus D$$

et comme D est une droite, il existe un vecteur u (non nul !) tel que $D = \mathbb{K}\cdot u$. Pour tout vecteur $x \in E$, il existe donc un unique couple

$$\big(y, \ell(x)\big) \in H \times \mathbb{K} \quad \text{tel que} \quad x = y + \ell(x)\cdot u. \tag{3}$$

On a ainsi défini une application $\ell : E \to \mathbb{K}$.

► Étant donnés deux vecteurs x_1 et x_2 dans E, il existe donc deux vecteurs y_1 et y_2 dans H et deux scalaires $\ell(x_1)$ et $\ell(x_2)$ tels que

$$x_1 = y_1 + \ell(x_1)\cdot u \quad \text{et} \quad x_2 = y_2 + \ell(x_2)\cdot u.$$

Pour tout scalaire α, on a donc

$$\alpha\cdot x_1 + x_2 = (\alpha\cdot y_1 + y_2) + \big[\alpha\ell(x_1) + \ell(x_2)\big]\cdot u.$$

Mais en appliquant (3) au vecteur $\alpha\cdot x_1 + x_2$, on a aussi

$$\alpha\cdot x_1 + x_2 = \underbrace{z_1}_{\in H} + \ell(\alpha\cdot x_1 + x_2)\cdot u$$

et l'unicité de la décomposition (3) permet d'identifier terme à terme :

$$\forall\, x_1, x_2 \in E,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{K},\quad \ell(\alpha\cdot x_1 + x_2) = \alpha\ell(x_1) + \ell(x_2),$$

ce qui prouve que ℓ est bien une forme linéaire sur E.

► Comme $u = 0_E + 1\cdot u$ avec $0_E \in H$ et $1 \in \mathbb{K}$, l'unicité de la décomposition (3) nous dit que $\ell(u) = 1$, donc la forme linéaire ℓ n'est pas identiquement nulle.

► Si $\ell(x) = 0$, alors $x = y + \ell(x)\cdot u = y \in H$.

Réciproquement, si $x \in H$, alors $x = x + 0\cdot u$ avec $x \in H$ et $0 \in \mathbb{K}$. À nouveau, l'unicité de la décomposition (3) nous donne $\ell(x) = 0$.

L'hyperplan H est donc bien le noyau de la forme linéaire ℓ.

❧ Réciproquement, si H est le noyau d'une forme linéaire ℓ non identiquement nulle, alors il existe un vecteur u tel que $\ell(u) \neq 0$. Par linéarité de ℓ, ce vecteur u ne peut être nul et

$$\forall\, x \in H,\quad \ell(x) = \frac{\ell(x)}{\ell(u)}\cdot \ell(u) = \ell\Big(\frac{\ell(x)}{\ell(u)}\cdot u\Big),$$

donc la différence

$$x - \frac{\ell(x)}{\ell(u)}\cdot u$$

appartient à $\operatorname{Ker} \ell = H$ (principe de superposition).

Chaque vecteur $x \in E$ admet donc une décomposition

$$\underbrace{\left[x - \frac{\ell(x)}{\ell(u)} \cdot u\right]}_{\in H} + \underbrace{\frac{\ell(x)}{\ell(u)} \cdot u}_{\in \mathbb{K} \cdot u},$$

ce qui prouve que $E = H + \mathbb{K} \cdot u$.

Enfin, comme $\ell(u) \neq 0$, le vecteur u n'appartient pas à H et la droite dirigée par $\mathbb{K} \cdot u$ est donc en somme directe avec H.

On a ainsi démontré que $E = H \oplus D$ et donc que H est un hyperplan.

✍ *Il est utile de retenir une vision géométrique de ce résultat, plus évident qu'il n'y paraît.*

Considérons un espace E de dimension 3 et un plan $P \subset E$: il existe une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de ce plan et on peut la compléter en une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E. À cette base correspondent des formes coordonnées ε_1^*, ε_2^*, ε_3^* telles que

$$\forall\, u \in E, \qquad u = \varepsilon_1^*(u) \cdot \varepsilon_1 + \varepsilon_2^*(u) \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_3^*(u) \cdot \varepsilon_3$$

et on voit qu'ici le plan P est le noyau de la forme coordonnée ε_3^* :

$$u \in P \iff \varepsilon_3^*(u) = 0.$$

Plus concrètement encore, quelle que soit la base choisie dans E, le plan P peut être représenté par une équation cartésienne, au sens où

$$u : (x, y, z) \in P \iff ax + by + cz = 0$$

avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Le plan P apparaît donc comme le noyau de la forme linéaire ℓ définie par

$$\forall\, u : (x, y, z) \in E, \qquad \ell(u) = ax + by + cz.$$

On s'est contenté de démontrer que ce cas très particulier était en fait le cas général !

2. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Par bilinéarité du produit matriciel et par linéarité de la trace, il est clair que l'application

$$\Phi(A) = [M \mapsto \operatorname{tr}(AM)]$$

est une application linéaire de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire une forme linéaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. L'application Φ est donc bien une application de $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ dans l'espace dual $E^* = L\big(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}\big)$ des formes linéaires sur E.

❧ Soient A et B, deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et λ, un scalaire. Alors

$$\begin{aligned}\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad \operatorname{tr}\big[(\lambda A + B)M\big] &= \operatorname{tr}(\lambda AM + BM) \\ &= \lambda \operatorname{tr}(AM) + \operatorname{tr}(BM) \\ &= \lambda\Phi(A)(M) + \Phi(B)(M).\end{aligned}$$

Cette relation étant vraie pour toute matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on en déduit que

$$\Phi(\lambda A + B) = \lambda\Phi(A) + \Phi(B)$$

et donc que Φ est une application *linéaire* de E dans E^*.

✍ *On sait que $\dim \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$ et que $\dim L\big(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}\big) = n^2 \times 1 = n^2$, c'est-à-dire que l'espace de départ et l'espace d'arrivée sont deux espaces de même dimension (finie !). D'après le Théorème du rang, il suffit que Φ soit injective pour que Φ soit un isomorphisme.*

Soit $A \in \operatorname{Ker} \Phi$. Cela signifie que $\operatorname{tr}(AM) = 0$ pour *toute* matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Avec les notations habituelles,

$$\operatorname{tr}(AM) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} m_{j,i}.$$

Par conséquent, en faisant varier M dans la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant n, \quad \operatorname{tr}(AE_{i,j}) = a_{i,j} = 0,$$

ce qui prouve que A est la matrice nulle.

On a ainsi démontré que Φ était un isomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sur son dual.

✍ *Avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut donner une interprétation euclidienne de ces calculs : comme*

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi(A)(M) = \langle\, A^\top \,|\, M \,\rangle,$$

on n'a fait que redémontrer le Théorème de représentation de Riesz.

3. La matrice C est obtenue en permutant les colonnes de la matrice I_n, donc elles ont même rang : la matrice C est bien inversible.

❧ Multiplier à gauche par J_r revient à annuler les $(n-r)$ dernières lignes de la matrice C. Par conséquent,

$$\forall\, 1 \leqslant r \leqslant n, \quad \mathrm{tr}(J_r C) = 0.$$

4. Soit H, un hyperplan de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe donc une forme linéaire *non nulle* ℓ telle que $H = \mathrm{Ker}\,\ell$ (première question) et une matrice A *non nulle* telle que

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \qquad \ell(M) = \mathrm{tr}(AM).$$

Comme A n'est pas nulle, son rang r est compris entre 1 et n et il existe deux matrices inversibles P et Q telles que

$$Q^{-1}AP = J_r, \quad \text{soit} \quad A = QJ_rP^{-1}.$$

Donc

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad \ell(M) = \mathrm{tr}(Q.J_rP^{-1}M) = \mathrm{tr}(J_rP^{-1}M.Q)$$

En choisissant

$$M = PCQ^{-1},$$

on définit une matrice inversible (produit de trois matrices inversibles) et $\ell(M) = \mathrm{tr}(J_rC) = 0$ d'après la question précédente. Par conséquent, l'hyperplan H contient la matrice inversible PCQ^{-1}.

On a ainsi démontré que tout hyperplan de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

Solution 40 — rms132-636

1. Supposons que la matrice A soit antisymétrique.

En choisissant une **base orthonormée** de $\mathbb{R}^n$,

$$\langle\, Ax \,|\, x \,\rangle = (AX)^\top.X = X^\top.A^\top.X = -X^\top.A.X = -\langle\, x \,|\, Ax \,\rangle.$$

Par symétrie du produit scalaire, on en déduit que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad \langle\, Ax \,|\, x \,\rangle = 0.$$

❧ Réciproquement, supposons que $\langle\, Ax \,|\, x \,\rangle = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \langle\, A(x+y) \,|\, x+y \,\rangle = 0.$$

En développant, on en déduit que

$$\underbrace{\langle\, Ax \,|\, x \,\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle\, Ay \,|\, y \,\rangle}_{=0} + \langle\, Ax \,|\, y \,\rangle + \langle\, Ay \,|\, x \,\rangle = 0.$$

Par symétrie du produit scalaire,

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \langle\, y \,|\, Ax \,\rangle + \langle\, Ay \,|\, x \,\rangle = 0.$$

En choisissant à nouveau une **BON** de $\mathbb{R}^n$, on en déduit que

$$0 = Y^\top.(AX) + (AY)^\top.X = Y^\top.[(A + A^\top)X] = 0.$$

Cette propriété étant vraie quelles que soient les colonnes X et Y, on peut en déduire que

$$A + A^\top = 0_n$$

c'est-à-dire que A est antisymétrique.

2. Considérons maintenant la fonction définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \|X(t)\|^2 = \langle\, X(t) \,|\, X(t) \,\rangle$$

où X est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Le produit scalaire étant bilinéaire et symétrique, la fonction f est bien de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = 2\,\langle\, X'(t) \,|\, X(t) \,\rangle\,.$$

► Si X est une solution de l'équation différentielle, alors $X'(t) = A.X(t)$ et comme A est antisymétrique,

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = 2\,\langle\, AX(t) \,|\, X(t) \,\rangle = 0.$$

La dérivée de la fonction f étant identiquement nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$, on en déduit que f est constante et par conséquent que $\|X(t)\|$ ne dépend pas de t.

► Réciproquement, si f est constante pour chaque solution de l'équation différentielle, alors en particulier, quelle que soit la condition initiale $(t = 0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$,

$$0 = f'(0) = 2\,\langle\, AX(0) \,|\, X(0) \,\rangle = 2\,\langle\, Ax_0 \,|\, x_0 \,\rangle\,.$$

D'après le lemme initial, on en déduit que la matrice A est antisymétrique.

✍ *On peut aussi remarquer que la solution générale de l'équation différentielle peut s'écrire*

$$X(t) = \exp(tA).x_0$$

et donc, dans une base orthonormée,

$$\begin{aligned}\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \|X(t)\|^2 &= x_0^\top.[\exp(tA)]^\top.\exp(tA).x_0 \\ &= x_0^\top.\exp(tA^\top).\exp(tA).x_0 \\ &= x_0^\top.\exp(-tA).\exp(tA).x_0 = x_0^\top.x_0 = \|X(0)\|^2\end{aligned}$$

puisque $\exp(-M) = [\exp(M)]^{-1}$ *pour toute matrice* M.

Solution 41 rms135-1431

1. Si $(\varepsilon_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$ est une base **orthonormée** du sous-espace F, alors le projeté orthogonal $\pi(u)$ sur F du vecteur $u \in E$ est

$$\sum_{k=1}^{r} \langle\, \varepsilon_k \,|\, u \,\rangle \cdot \varepsilon_k.$$

✍ *Si* $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$ *est une base* ***orthogonale*** *de* F, *alors* $(e_k/\|e_k\|)_{1\leqslant k\leqslant r}$ *est une base orthonormée et par linéarité à droite du produit scalaire,*

$$\pi(x) = \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle\, e_k \,|\, u \,\rangle}{\|e_k\|^2} \cdot e_k.$$

2. Le sous-espace F représenté par le système $6x = 4y = z$ est la droite vectorielle dirigée par le vecteur $e_1 = (2, 3, 12)$.

✍ *La représentation* $6x = 4y = z$ *est une manière abrégée d'écrire le système*

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 6x & & & - z & = 0 \\ & & 4y & - z & = 0 \end{array}\right..$$

En résolvant ce système, on exprime x, y *et* z *en fonction d'un seul paramètre* t *et on constate que les solutions sont les vecteurs de* $\mathbb{R}^3$ *qui sont proportionnels au vecteur* $(2, 3, 12)$.

D'après la formule du cours (avec $r = 1$), avec $u = (x, y, z)$,

$$\pi(u) = \frac{\langle\, e_1 \,|\, u \,\rangle}{\|e_1\|^2} \cdot e_1 = \frac{2x + 3y + 12z}{4 + 9 + 144} \cdot (2, 3, 12)$$

et on en déduit que

$$\mathfrak{Mat}_{\text{can}}(\pi) = \frac{1}{157}\begin{pmatrix} 4 & 6 & 24 \\ 6 & 9 & 36 \\ 24 & 36 & 144 \end{pmatrix}.$$

✍ *La trace est égale à* 1 *et le rang est égal à* 1, *ce qui est normal puisqu'on projette sur un sous-espace de dimension* 1.

Pour la structure euclidienne canonique, la base canonique de $\mathbb{R}^3$ *est une base orthonormée. Il est donc normal que la matrice de la projection orthogonale soit une matrice symétrique.*

Solution 42 rms135-1432

1. L'intégrale est bien définie quelles que soient les fonctions f et g dans E (fonction continue sur un segment) ; de ce fait, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est clairement une forme bilinéaire et symétrique sur $E \times E$. Cette forme est positive (pour $f = g$, on intègre bornes croissantes une fonction positive).

En fait, cette forme est définie positive : si $\langle f | f \rangle = 0$, alors l'intégrale sur $[0, 2\pi]$ de la fonction continue et positive f^2 est nulle et comme $0 < 2\pi$, on peut en déduire que $f^2(t) = 0$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$ (Théorème de nullité de l'intégrale). Or $f \in E$ est, par hypothèse, 2π-périodique, donc en fait f est nulle sur $\mathbb{R}$ et $f = 0_E$.

Donc $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur E.

2. Nous allons calculer le projeté orthogonal de f de deux manières.

❧ **Version naïve**

Comme $\pi(f) \in G$, il existe deux réels a et b tels que $\pi(f) = ag_1 + bg_2$ et la contrainte $f - \pi(f) \in G^\perp$ se traduit par

$$\langle f - ag_1 - bg_2 | g_1 \rangle = \langle f - ag_1 - bg_2 | g_2 \rangle = 0$$

c'est-à-dire par

$$\begin{cases} a \langle g_1 | g_1 \rangle + b \langle g_1 | g_2 \rangle = \langle f | g_1 \rangle \\ a \langle g_1 | g_2 \rangle + b \langle g_2 | g_2 \rangle = \langle f | g_2 \rangle. \end{cases}$$

✍ *La matrice de ce système est la **matrice de Gram** de la base (g_1, g_2) de G.*

On calcule une nouvelle fois ces cinq intégrales très célèbres.

$$\begin{aligned} \langle f | g_1 \rangle &= \int_0^{2\pi} \sin^2 x \cos x \, dx = \left[\frac{\sin^3 x}{3}\right]_0^{2\pi} = 0 \\ \forall\, p \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 px \, dx &= \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2px}{2} \, dx = \pi \\ \langle g_1 | g_1 \rangle &= \langle g_2 | g_2 \rangle = \pi \\ \langle f | g_2 \rangle &= \int_0^{2\pi} \cos 2x \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{-1}{2} \langle g_2 | g_2 \rangle = \frac{-\pi}{2} \\ \langle g_1 | g_2 \rangle &= \int_0^{2\pi} \cos x \cos 2x \, dx = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3x + \cos x}{2} \, dx = 0. \end{aligned}$$

Le système posé devient donc $\{\pi a = 0, \ \pi b = {-\pi}/2\}$, donc $\pi(f) = {-g_2}/2$.

❧ **Version sioux (pour ceux qui connaissent vraiment la trigonométrie)**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on sait que

$$f(x) = \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} g_2(x)$$

et on sait (théorie des séries de Fourier) que la famille $(g_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale pour le produit scalaire considéré ici, donc

$$f = \underbrace{\frac{1}{2} g_0}_{\in G^\perp} + \underbrace{\frac{-1}{2} g_2}_{\in G}$$

ce qui nous donne $\pi(f) = {-g_2}/2$.

✍ *La théorie des séries de Fourier n'est pas au programme, mais elle est une composante essentielle de la culture mathématique.*

Solution 43 rms135-1434

En deux opérations de pivot (lesquelles ?),

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \phantom{{}+y} + z = 0 \\ \phantom{x+{}} y \phantom{{}+z} = 0 \end{cases}$$

donc la droite D est dirigée par le vecteur $(1, 0, -1)$.

Pour la suite, il est commode de considérer le vecteur unitaire

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1, 0, -1) = \frac{e_1 - e_3}{\sqrt{2}}.$$

❧ Le vecteur
$$w = \frac{e_1 + e_3}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1, 0, 1)$$
est unitaire lui aussi et il est clairement orthogonal au vecteur u. Ce vecteur w est donc orthogonal à l'axe de la rotation. Par conséquent, le vecteur v défini par $r(v) = w$ est un vecteur unitaire et orthogonal à l'axe de la rotation.

✍ *Une rotation est un automorphisme, donc l'égalité $r(v) = w$ équivaut à $v = r^{-1}(w)$, c'est pourquoi le vecteur v est bien caractérisé par l'égalité $r(v) = w$.*

Une rotation est aussi une isométrie, donc l'égalité $r(v) = w$ implique en particulier $\|v\| = \|w\|$. Et comme une isométrie conserve les produits scalaires et que $r(u) = u$ (puisque u est sur l'axe de la rotation),
$$0 = \langle u \,|\, w \rangle = \langle r(u) \,|\, r(v) \rangle = \langle u \,|\, v \rangle ,$$
donc v est bien orthogonal à u.

Le choix $v = e_2$ est donc cohérent avec les propriétés des rotations.

❧ Il est facile de vérifier que la famille (u, v, w) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. La matrice de la rotation r dans cette base est donc une matrice orthogonale de déterminant $+1$. Comme $r(u) = u$ et que $r(v) = w$, cette matrice est donc de la forme
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \end{pmatrix}.$$
La troisième est orthogonale aux deux premières, c'est aussi un vecteur unitaire et le déterminant de la matrice est égal à $+1$, donc il n'y a qu'une seule possibilité :
$$\mathfrak{Mat}_{(u,v,w)}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

✍ *L'énoncé n'a pas précisé dans quelle base il fallait donner la matrice de r... Pourquoi ne pas choisir la base la plus simple ?*

❧ Les calculs précédents montrent que $r(w) = -v$. Comme (u, v, w) est une base orthonormée, on sait que
$$\forall\, X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad X = \langle u \,|\, X \rangle \cdot u + \langle v \,|\, X \rangle \cdot v + \langle w \,|\, X \rangle \cdot w$$
et donc, par linéarité de r,
$$\begin{aligned} \forall\, X \in \mathbb{R}^3, \quad r(X) &= \langle u \,|\, X \rangle \cdot r(u) + \langle v \,|\, X \rangle \cdot r(v) + \langle w \,|\, X \rangle \cdot r(w) \\ &= \langle u \,|\, X \rangle \cdot u + \langle v \,|\, X \rangle \cdot w - \langle w \,|\, X \rangle \cdot v. \end{aligned}$$
Comme la base canonique est aussi une base orthonormée,
$$\langle u \,|\, X \rangle = \frac{x - z}{\sqrt{2}}, \qquad \langle v \,|\, X \rangle = y, \qquad \langle w \,|\, X \rangle = \frac{x + z}{\sqrt{2}}$$
et par conséquent
$$\forall\, X \in \mathbb{R}^3, \quad r(X) = \frac{x - z}{2} \cdot (1, 0, -1) + \frac{y}{\sqrt{2}} \cdot (1, 0, 1) - \frac{x + z}{\sqrt{2}} \cdot (0, 1, 0).$$
La matrice de la rotation r relative à la base canonique est donc
$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & -1 \\ -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

✍ *Si on refuse de faire un peu de géométrie, il faut être prêt à faire du calcul matriciel. On a obtenu facilement la matrice de r relative à la base $\mathscr{B} = (u, v, w)$ et on cherche à en déduire la matrice relative à la base canonique $\mathscr{B}_0$.*

On connaît la matrice de passage :
$$P = \mathfrak{Mat}(\mathscr{B}_0 \to \mathscr{B}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Comme on passe d'une base orthonormée à une autre base orthonormée, cette matrice de passage est orthogonale et par conséquent $P^{-1} = P^{\top}$.

La formule du changement de base nous donne la matrice R relative à la base $\mathscr{B}_0$ de r en fonction de la matrice R' relative à la base $\mathscr{B}$:
$$R' = P^{-1} R P = P^{\top}.R.P \qquad \textit{d'où} \qquad R = P.R'.P^{\top}.$$

Solution 44 rms135-1438

1. D'après la formule du produit matriciel,

$$\operatorname{tr}(M^\top.N) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}n_{i,j}.$$

On vérifie que cette application est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive en menant les calculs tantôt sur l'expression "compacte" $\operatorname{tr}(M^\top.N)$, tantôt sur l'expression développée (notamment pour démontrer le caractère défini positif).

Cf cours pour les détails.

2. Par hypothèse, $M^\top.M = N^\top.N = I_n$. On déduit de l'inégalité de Schwarz que

$$\operatorname{tr}(M^\top.N) = \langle\, M \,|\, N \,\rangle \leqslant \|M\|\,\|N\| = \sqrt{\operatorname{tr}(M^\top.M)\operatorname{tr}(N^\top.N)} = \sqrt{n^2} = n.$$

3. a. Nous allons proposer plusieurs méthodes, plus ou moins astucieuses.

❧ **Première méthode**

On commence par remarquer que

$$\begin{aligned}\|AB\|^2 = \operatorname{tr}\big((AB)^\top.(AB)\big) &= \operatorname{tr}(BAAB) && (\text{car } A^\top = A,\ B^\top = B)\\ &= \operatorname{tr}(A^2B^2) && (\text{car } \operatorname{tr}(MN) = \operatorname{tr}(NM))\\ &\geqslant 0.\end{aligned}$$

Par symétrie,

$$\|BA\|^2 = \operatorname{tr}(B^2A^2) = \operatorname{tr}(A^2B^2) = \|AB\|^2. \qquad (\star)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\big((AB)^2\big) = \operatorname{tr}(ABAB) = \operatorname{tr}\big((BA)^\top.(AB)\big) = \langle\, BA \,|\, AB \,\rangle &\leqslant \|BA\|\,\|AB\| && (\text{inégalité de Schwarz})\\ &\leqslant \operatorname{tr}(A^2B^2). && (\text{avec } \star)\end{aligned}$$

✍ *Il y a égalité si, et seulement si, les deux matrices AB et BA sont colinéaires et de même sens (cas d'égalité dans l'inégalité de Schwarz).*

Si on est très savant, on peut en déduire que cela équivaut à $AB = BA$. (En effet, si on est très savant, on sait que les produits AB et BA ont même polynôme caractéristique, donc même spectre et dans ces conditions, la constante de proportionnalité est nécessairement égale à 1.)

❧ **Deuxième méthode**

Comme A et B sont symétriques,

$$\operatorname{tr}(A^2B^2) = \operatorname{tr}\big((BA)^\top.(BA)\big) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tr}[(AB)^2] = \operatorname{tr}\big((BA)^\top.(AB)\big).$$

Par conséquent, comme $AB = (BA)^\top$ (puisque A et B sont symétriques),

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(A^2B^2) - \operatorname{tr}[(AB)^2] &= \langle\, BA \,|\, BA - (BA)^\top \,\rangle\\ &= \langle\, M \,|\, M - M^\top \,\rangle && (\text{en posant } M = BA)\\ &= \left\langle \frac{M+M^\top}{2} + \frac{M-M^\top}{2} \,\middle|\, M - M^\top \right\rangle = \frac{1}{2}\|M - M^\top\|^2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

✍ *Pour le produit scalaire canonique sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, le sous-espace des matrices symétriques et le sous-espace des matrices antisymétriques sont orthogonaux.*

✍ *On retrouve le cas d'égalité sous une forme plus explicite : il y a égalité si, et seulement si, $M = AB$ est symétrique, ce qui revient à dire que A et B commutent.*

❧ **Troisième version**

Cette fois, on applique le Théorème spectral : on choisit une matrice orthogonale P telle que $A' = P^\top.A.P$. Comme P est orthogonale, la matrice $B' = P^\top.B.P$ est encore une matrice symétrique réelle et on vérifie sans peine que

$$\operatorname{tr}\big((AB)^2\big) = \operatorname{tr}\big((A'B')^2\big) \qquad \text{et que} \qquad \operatorname{tr}(A^2B^2) = \operatorname{tr}[(A')^2(B')^2].$$

Dans la suite, nous supposerons donc que la matrice A est diagonale :

$$A = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \qquad B = (\beta_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

❧ Dans ces conditions,

$$AB = (\alpha_i \beta_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

✍ *Multiplier B **à gauche** par une matrice diagonale revient à multiplier les lignes de B par les coefficients diagonaux de A.*
*De même, multiplier B **à droite** par une matrice diagonale revient à multiplier les colonnes de B par les coefficients diagonaux de A.*

$$BA = (\beta_{i,j}\alpha_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

En conservant à l'esprit l'interprétation matricielle des opérations de pivot, on peut éviter de poser certains produits matriciels simples.

Et par conséquent

$$(AB)^2 = (c_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \quad \text{avec} \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_i \beta_{i,k} \alpha_k \beta_{k,i}$$

d'où

$$\mathrm{tr}\big((AB)^2\big) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_i \alpha_k \beta_{i,k} \beta_{k,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_i \alpha_k \beta_{i,k}^2$$

puisque la matrice B est symétrique.

❧ De même,

$$A^2B^2 = (\alpha_i^2 d_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \quad \text{avec} \quad d_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \beta_{i,k}\beta_{k,j}$$

d'où

$$\mathrm{tr}(A^2B^2) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 d_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_i^2 \beta_{i,k}\beta_{k,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_i^2 \beta_{i,k}^2$$

puisque B est symétrique (bis).

❧ On en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(A^2B^2) - \mathrm{tr}\big((AB)^2\big) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_i(\alpha_i - \alpha_k)\beta_{i,k}^2 \\
&= 0 && \text{(on isole les termes pour lesquels } k = i) \\
&\quad + \sum_{1 \leqslant i < k \leqslant n} (\alpha_i^2 - \alpha_i\alpha_k + \alpha_k^2 - \alpha_k\alpha_i)\beta_{i,k}^2 && (\text{car } \beta_{i,k} = \beta_{k,i}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_k)^2 \beta_{i,k}^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

✍ *Cette fois, le cas d'égalité s'exprime par le fait que $\beta_{i,k} = 0$ si, et seulement si, $\alpha_i \neq \alpha_k$.*
En supposant que les valeurs propres de A sont rangées dans l'ordre croissant :

$$\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_n,$$

cela signifie que la matrice B est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux qui correspondent aux sous-espaces propres de A. En particulier, cela implique que A et B commutent !

3. b. On développe et on simplifie avec la propriété $\mathrm{tr}(MN) = \mathrm{tr}(NM)$:

$$\mathrm{tr}\big[(AB+BA)^2\big] = \mathrm{tr}(ABAB + ABBA + BAAB + BABA) = 2\big(\mathrm{tr}[(AB)^2] + \mathrm{tr}(A^2B^2)\big)$$

et on déduit de la question précédente que

$$\mathrm{tr}\big[(AB+BA)^2\big] \leqslant 4\,\mathrm{tr}(A^2B^2).$$

Comme les matrices A et B sont symétriques, on déduit de l'inégalité de Schwarz que

$$\mathrm{tr}(A^2B^2) = \langle A^2 \mid B^2 \rangle \leqslant \|A^2\|\,\|B^2\| = \sqrt{\mathrm{tr}(A^4)}\sqrt{\mathrm{tr}(B^2)}$$

et le résultat est démontré.