8
Intégrales

1. On suppose connue l'intégrale des fonctions continues par morceaux sur un segment $[a, b]$ et on se propose d'étendre son domaine de définition.

I
Notion d'intégrale généralisée

2. Hypothèses et notations
On considèrera des fonctions à valeurs réelles ou complexes ($\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et continues par morceaux sur un intervalle I qui n'est pas nécessairement un segment.
La borne inférieure de l'intervalle I, notée a, est un réel ou $-\infty$; sa borne supérieure, notée b, est un réel ou $+\infty$. On supposera toujours que I n'est ni vide, ni réduit à un point : $a < b$.

3. Si la fonction f est continue sur morceaux sur l'intervalle I, alors elle est continue par morceaux sur chaque segment contenu dans I.

3.1 Quels que soient x et y dans I, on note

$$\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[x,y]} f(t)\,\mathrm{d}t$$

si $x \leqslant y$ et

$$\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{[y,x]} f(t)\,\mathrm{d}t$$

si $x \geqslant y$.

3.2 En particulier,

$$\forall\, x \in I, \quad \int_x^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

3.3 ✍ *On dit que l'intégrale de f sur I est* **convergente** *lorsque la limite*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t$$

existe (dans $\mathbb{K}$). Cette limite est appelée **intégrale généralisée de f sur** *I, est notée*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

4. ➙ *Soit f, une fonction continue par morceaux sur l'intervalle I.*

4.1 *Pour tout $x \in I$, l'application*

$$\left[y \mapsto \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

est continue sur I.

4.2 *Pour tout $y \in I$, l'application*

$$\left[x \mapsto \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

est continue sur I.

5. Discussion sur l'intervalle d'intégration
L'intervalle d'intégration I peut être de quatre types.

5.1 Lorsque l'intervalle d'intégration est un segment :

$$I = [a, b],$$

le théorème **[4]** montre que la définition de l'intégrale généralisée coïncide avec la définition de l'intégrale sur un segment : l'intégrale généralisée converge et sa valeur est égale à l'intégrale sur le segment $[a, b]$.

5.2 Lorsque l'intervalle d'intégration est semi-ouvert :

$$I = [a, b[\qquad \text{ou} \qquad I =]a, b],$$

le théorème **[4]** assure l'existence d'une des deux limites.

1. Si $I = [a, b[$, alors l'intégrale de f sur I est convergente si, et seulement si, l'intégrale

$$\int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t$$

(calculée sur le segment $[a, y] \subset I$) admet une limite (finie) lorsque y tend vers b et, dans ce cas,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{y\to b} \int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. Si $I =]a, b]$, alors l'intégrale de f sur I est convergente si, et seulement si, l'intégrale

$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

(calculée sur le segment $[x, b] \subset I$) admet une limite (finie) lorsque x tend vers a et, dans ce cas,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to a} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

5.3 C'est seulement dans le cas où l'intervalle d'intégration est ouvert : $I =]a, b[$ qu'il faut étudier la convergence de

$$\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t$$

(calculée sur le segment $[x, y] \subset I$) *à la fois* lorsque x tend vers a *et* lorsque y tend vers b.

5.4 Dans le cas où l'intervalle d'intégration I n'est pas ouvert (**[5.1]**, **[5.2]**), si l'intégrale de f sur I est convergente, alors l'intégrale de f sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ est aussi convergente et

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{]a,b[} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cela légitime l'usage de la notation

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

indépendamment de la nature de l'intervalle I et permet au besoin de supposer que l'intervalle d'intégration I est ouvert.

Entraînement

6. Questions pour réfléchir

1. La suite de terme général $u_n = \int_0^{2n\pi} \sin t\,\mathrm{d}t$ est convergente. L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \sin t\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?
2. Si f est continue par morceaux sur I, on pose

$$\forall\, x_0, x \in I, \quad F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2.a La fonction F_{x_0} est continue sur I.
2.b Pour tout segment $[A, B] \subset I$, la fonction F_{x_0} est lipschitzienne sur $[A, B]$.
2.c Condition pour que F_{x_0} soit lipschitzienne sur I.

II

Propriétés fondamentales

7. Les propriétés de linéarité, d'additivité et de positivité sont établies par passage à la limite à partir d'intégrales sur un segment.

II.1 Linéarité

8. ➙ *Si les intégrales de f et de g sur I sont convergentes, alors l'intégrale de $\lambda f + g$ sur I est aussi convergente et*

$$\forall\,\lambda\in\mathbb{R},\quad \int_I (\lambda f+g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\int_I f(t)\,\mathrm{d}t + \int_I g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Additivité

9. ➙ *Soit f, une fonction continue par morceaux sur $I =]a, b[$. Quel que soit $x_0 \in I$, l'intégrale de f sur I est convergente si, et seulement si, les intégrales de f sur $]a, x_0]$ et sur $[x_0, b[$ sont convergentes.*

10. On suppose que l'intégrale de f sur $I =]a, b[$ est convergente.

10.1 Pour tout sous-intervalle $J \subset I$, l'intégrale de f sur J est convergente et

$$\int_J f(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \mathbb{1}_J(t) f(t)\,\mathrm{d}t.$$

10.2 ➙ **Relation de Chasles**
Quels que soient $a \leqslant \alpha, \beta, \gamma \leqslant b$,

$$\int_\alpha^\gamma f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t + \int_\beta^\gamma f(t)\,\mathrm{d}t.$$

10.3

$$\lim_{x\to a}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

10.4

$$\lim_{x\to b}\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

II.2 Généralisation du théorème fondamental

11. Si f est continue sur l'intervalle $I =]a, b[$, alors l'intégrale de f sur I est convergente si, et seulement si, les primitives de f ont une limite finie au voisinage de a et au voisinage de b.

12. On suppose que l'intégrale de f sur $I =]a, b[$ est convergente.

12.1 ➙ *Si la fonction f est continue sur I, alors l'application*

$$\left[x\mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

est la primitive de f qui tend vers 0 au voisinage de a.

12.2 ➙ *Si f est continue sur I, alors l'application*

$$\left[x\mapsto \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

est la primitive de $-f$ qui tend vers 0 au voisinage de b.

II.3 Positivité

13. L'intégrale est un opérateur ***positif*** au sens où les inégalités sont conservées par intégration.

14. ➙ *Si les intégrales de f et de g sur I sont convergentes et si*

$$\forall\,t\in I,\quad 0\leqslant f(t)\leqslant g(t)$$

alors

$$0\leqslant \int_I f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_I g(t)\,\mathrm{d}t.$$

15. ▷ **Inégalité triangulaire**
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux sur un intervalle borné et s'il existe deux réels m et M tels que

$$\forall\,t\in I,\quad m\leqslant f(t)\leqslant M$$

alors l'intégrale de f sur I est convergente et

$$m|I| \leqslant \int_I f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M|I|$$

où $|I|$ est la longueur de l'intervalle I.

16. On suppose que f est positive sur I et que l'intégrale de f sur I est convergente.

16.1 Pour tout intervalle $J \subset I$,

$$\int_J f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_I f(t)\,\mathrm{d}t.$$

16.2 Quels que soient x et y dans I, l'intégrale

$$\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t$$

est du signe de $(y - x)$.

17. **Cas d'égalité**

17.1 Soit f, une fonction continue par morceaux sur un intervalle ouvert non vide $I =]a, b[$, dont l'intégrale sur I est convergente.
Si f est positive sur I et si l'intégrale de f sur I est nulle, alors les limites à gauche et à droite de f sont nulles en tout point :

$$\forall\,x\in]a,b[,\quad f(x+) = f(x-) = 0.$$

17.2 ➙ *Soit f, une fonction continue et positive sur un intervalle ouvert non vide $I =]a, b[$. On suppose que l'intégrale de f sur I est convergente. Alors*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

si, et seulement si, $f(t) = 0$ pour tout $t \in I$.

II.4 Changement de variable avec un intégrande continu

18. La formule de changement de variable dans une intégrale repose sur la formule de dérivation des fonctions composées via le Théorème fondamental qui relie les primitives aux intégrales. Pour cette raison, le théorème **[19]** se restreint aux intégrandes continus. →**[46.2]**

19. ➙ *Soient $f : I \to E$, une fonction continue et $\varphi : [a, b] \to I$, une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Alors*

$$\int_a^b f\big(\varphi(u)\big)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

20. **En pratique**
Le choix de la nouvelle variable

$$t = \varphi(u)$$

vise à simplifier l'expression de l'intégrale et conduit au nouvel élément différentiel

$$\mathrm{d}t = \varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Le changement de variable modifie en général les bornes de l'intégrale : lorsque l'ancienne variable u tend vers a (resp. vers b), la nouvelle variable t tend vers $\varphi(a+)$ (resp. vers $\varphi(b-)$).

II.5 Intégration par parties

21. ➙ *Soient f et g, deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I =]a, b[$. On suppose que l'intégrale de $f'g$ sur I est convergente.*
Alors l'intégrale de fg' sur I est convergente si, et seulement si, le produit fg admet des limites finies aux voisinages de a et de b.

Dans ce cas,

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \big[f(t)g(t)\big]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

où on note

$$\big[f(t)g(t)\big]_a^b = \lim_{t\to b} f(t)g(t) - \lim_{t\to a} f(t)g(t).$$

22. En pratique
L'intégration par parties permet, par dérivation, de faire disparaître un facteur transcendant dont la dérivée est rationnelle (comme ℓn, Arctan...) et d'abaisser le degré d'un facteur polynomial. Elle peut ainsi servir à établir une relation de récurrence ou à calculer un équivalent. →**[87]**

Exemples d'intégrales généralisées

23.1
$$\forall\,\lambda > 0,\quad \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}$$

23.2
$$\forall\,\alpha > 1,\quad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$$

23.3
$$\forall\,\alpha < 1,\quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$$

23.4
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \pi$$

23.5
$$\int_0^1 \ell\mathrm{n}\, t\,\mathrm{d}t = -1$$

23.6
$$\forall\,n\in\mathbb{N},\quad \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t = n!$$

24. Soit $n \geqslant 2$. L'application L définie par

$$\forall\,P\in\mathbb{R}_n[X],\ \forall\,x\in\mathbb{R},\quad L(P)(x) = e^{-x}\int_{-\infty}^x P(t)e^t\,\mathrm{d}t$$

est un endomorphisme non diagonalisable de $\mathbb{R}_n[X]$.

III

Fonctions intégrables

25. La notion de ***fonction intégrable*** a pour but de justifier aussi simplement que possible l'existence d'une intégrale généralisée, notamment à l'aide de critères de comparaison **[38]**.

26. Soit f, une fonction continue par morceaux sur I.
26.1 La fonction $|f|$ est continue par morceaux sur I.
26.2 L'expression

$$\int_x^y \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t$$

est une fonction croissante de y et décroissante de x.

26.3 ✍ *Une fonction f est* **intégrable sur** *I lorsqu'elle est continue par morceaux sur I et que l'intégrale de $|f|$ sur I est convergente.*
26.4 On dit parfois que l'intégrale de f sur I est ***absolument convergente*** pour signifier que f est intégrable sur I.

27. Cas des fonctions positives
Une fonction continue par morceaux et positive sur l'intervalle I est intégrable sur I si, et seulement si, son intégrale sur I est convergente.

28. De même que la sommabilité de la famille de vecteurs $(u_k)_{k\in I}$ est une propriété de la famille de réels positifs $(\|u_k\|)_{k\in I}$, l'intégrabilité de la fonction vectorielle f est en fait une propriété de la fonction positive $|f|$.

29. Comme la fonction $|f|$ est positive, la fonction f est intégrable sur I si, et seulement si, il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall\,[x,y]\subset I,\quad \int_x^y \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t \leqslant M$$

et, dans ce cas, l'intégrale généralisée apparaît comme une borne supérieure :

$$\int_I \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t = \sup_{[x,y]\subset I} \int_x^y \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t.$$

30. ✍ *Une fonction continue par morceaux f est* **de carré intégrable sur** *I lorsque la fonction $|f|^2$ est intégrable sur I.*

Intégrale d'une fonction intégrable

31. ➙ *Soient f et g, deux fonctions continues par morceaux sur I, telles que*

$$\forall\,t\in I,\quad 0\leqslant\big|f(t)\big|\leqslant\big|g(t)\big|.$$

Si g est intégrable sur I, alors f est intégrable sur I.

32. Soit f, une fonction intégrable sur I.
32.1 Si f est une fonction à valeurs réelles, alors f^+ et f^- sont intégrables sur I.
32.2 Si f est une fonction à valeurs complexes, alors $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont intégrables sur I.
32.3 ➙ *Si f est intégrable sur I, alors l'intégrale de f sur I est convergente.*

33.1 Si l'intégrale de f sur I est convergente bien que f ne soit pas intégrable sur I, on dit que

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$$

est une ***intégrale impropre***.
33.2 Dans la formule d'intégration par parties **[21]**, l'une des intégrales peut être impropre sans que l'autre le soit aussi. Cette formule est donc un moyen de prouver qu'une intégrale impropre est convergente. →**[40]**, **[51.5]**

Fonctions localement intégrables

34. Soit f, une fonction continue par morceaux sur l'intervalle I.
34.1 ✍ *La fonction f est* **intégrable au voisinage de** *a lorsqu'il existe un intervalle $]a,\alpha]\subset I$ sur lequel f est intégrable.*
34.2 ✍ *La fonction f est* **intégrable au voisinage de** *b lorsqu'il existe un intervalle $[\beta,b[\,\subset I$ sur lequel f est intégrable.*

35. En pratique
35.1 Une fonction continue par morceaux sur $I =]a,b[$ est intégrable sur I si, et seulement si, elle est intégrable au voisinage de a et au voisinage de b.
35.2 Une fonction continue par morceaux sur $I = [a,b[$ est intégrable sur I si, et seulement si, elle est intégrable au voisinage de b.
35.3 Une fonction continue par morceaux sur $I =]a,b]$ est intégrable sur I si, et seulement si, elle est intégrable au voisinage de a.

Fonctions intégrables de référence

36.1 Une fonction constante est intégrable sur tout intervalle borné.
36.2 La fonction
$$\left[t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}\right]$$
est intégrable au voisinage de $+\infty$ si, et seulement si, $\alpha > 1$.
36.3 La fonction
$$\left[t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}\right]$$
est intégrable au voisinage droit de 0 si, et seulement si, $\alpha < 1$.
36.4 *Suite de* [**47.2**] – Les fonctions
$$\left[t \mapsto \frac{1}{(t-t_0)^\alpha}\right] \quad \text{et} \quad \left[t \mapsto \frac{1}{(t_0-t)^\alpha}\right]$$
sont intégrables au voisinage de t_0 si, et seulement si, $\alpha < 1$.
36.5 La fonction ℓn est intégrable au voisinage de 0.
36.6 La fonction
$$\left[t \mapsto e^{-zt}\right]$$
est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si, et seulement si, $\mathfrak{Re}(z) > 0$.
36.7 Quel que soit le réel $\alpha > 0$, la fonction
$$\left[t \mapsto e^{-\alpha|t|}\right]$$
est intégrable sur $\mathbb{R}$. →[**48.1**]
36.8 La fonction continue
$$\left[t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right]$$
est intégrable sur $]-1,1[$.

Critères pratiques d'intégrabilité

37. Cas d'un intervalle borné
37.1 Si I est un segment, toute fonction continue par morceaux sur I est intégrable sur I.
37.2 Si I est un intervalle borné, toute fonction continue par morceaux et bornée sur I est intégrable sur I.
En particulier, si f admet une limite *finie* aux bornes de I, alors f est intégrable sur I.
38. Théorèmes de comparaison
On applique les théorèmes suivants en comparant la fonction f à l'une des fonctions de référence [**36**].
38.1 ➙ *Soit f, une fonction continue par morceaux. S'il existe une fonction g intégrable au voisinage de t_0 telle que*
$$f(t) \underset{t \to t_0}{=} \mathcal{O}\big(g(t)\big),$$
alors f est intégrable au voisinage de t_0.
38.2 ➙ *Soient f et g, deux fonctions continues par morceaux telles que*
$$f(t) \underset{t \to t_0}{\sim} g(t).$$
Alors f est intégrable au voisinage de t_0 si, et seulement si, g est intégrable au voisinage de t_0.
38.3 En pratique
Selon la régularité de f, on applique ces théorèmes à une seule extrémité ([**35.2**], [**35.3**]) ou aux deux extrémités de l'intervalle d'intégration [**35.1**].
39. Exemples usuels de fonctions intégrables
Les fonctions suivantes peuvent aussi être considérées comme des fonctions de référence.
39.1 La fonction continue
$$\left[t \mapsto \frac{1}{1+t^2}\right]$$
est intégrable sur $\mathbb{R}$.
39.2 Soit $a \neq 0$. La fonction
$$\left[t \mapsto t^{x-1}e^{-at}\right]$$
est intégrable au voisinage de $+\infty$ si, et seulement si, $a > 0$ (quel que soit $x \in \mathbb{R}$) et sur $]0,+\infty[$ si, et seulement si, $x > 0$ et $a > 0$.
39.3 *Suite de* [**47.1**] – Quels que soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, la fonction
$$\left[t \mapsto e^{-(t-m)^2/\sigma^2}\right]$$
est intégrable sur $\mathbb{R}$.
39.4 La fonction
$$\left[t \mapsto t^n e^{-xt^2}\right]$$
est intégrable sur $\mathbb{R}$ quels que soient $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$.
39.5 Les fonctions
$$\left[t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}\right] \quad \text{et} \quad \left[t \mapsto \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\right]$$
sont intégrables sur $]0,+\infty[$.
40. Exemples d'intégrales impropres [33.2]
40.1 L'intégrale impropre
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$
est convergente [**6.57**].
40.2 Les intégrales impropres
$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$
sont convergentes.

III.1 Opérations sur les fonctions intégrables

Produits

41. ➙ *Si la fonction f est intégrable sur I et si g est continue par morceaux et bornée sur I, alors le produit fg est intégrable sur I.*
42. ➙ **Inégalité de Schwarz**
Si f et g sont deux fonctions de carré intégrable sur I, alors le produit fg est intégrable sur I et
$$\int_I \big|f(t)g(t)\big|\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\int_I \big|f(t)\big|^2\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_I \big|g(t)\big|^2\,\mathrm{d}t}.$$

Combinaisons linéaires

43.1 ➙ *L'ensemble $\mathscr{L}^1(I)$ des fonctions intégrables sur I est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathscr{C}^{0,m}(I)$ des fonctions continues par morceaux sur I.*
43.2 Si f est à valeurs réelles, alors f est intégrable sur I si, et seulement si, f^+ et f^- sont intégrables sur I.
43.3 Si f est à valeurs complexes, alors f est intégrable sur I si, et seulement si, $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont intégrables sur I.
43.4 ➙ *L'ensemble $\mathscr{L}^1_c(I)$ des fonctions continues et intégrables sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}^1(I)$.*
43.5 ➙ *L'ensemble $\mathscr{L}^2(I)$ des fonctions de carré intégrable sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^{0,m}(I)$.*

Inégalité triangulaire

44.1 ➙ *Si f est intégrable sur I, alors*
$$\left|\int_I f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_I \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t$$
44.2 Avec l'écriture usuelle des intégrales, l'inégalité triangulaire s'écrit :
$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{]a\leftrightarrow b[} \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t.$$

44.3 ➞ **Cas d'un intervalle borné**
Si f est continue par morceaux et bornée par M sur un intervalle I :

$$\forall\, t \in I, \quad \big|f(t)\big| \leqslant M$$

alors

$$\forall \alpha, \beta \in I, \qquad \left| \int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant M|\beta - \alpha|.$$

45. Cas d'égalité
45.1 Soit $f : I \to \mathbb{C}$, une fonction intégrable sur I. Il existe $\rho \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \rho e^{i\theta} \quad \text{et que} \quad \left|\int_I f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_I \mathfrak{Re}\big[e^{-i\theta} f(t)\big]\,\mathrm{d}t.$$

45.2 ➞ *Si f est intégrable et continue sur un intervalle ouvert non vide I, alors*

$$\left|\int_I f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_I \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t$$

si, et seulement si, l'argument de $f(t)$ est constant sur I :

$$\exists\, \theta \in \mathbb{R},\ \forall\, t \in I, \quad f(t) = e^{i\theta}\big|f(t)\big|.$$

III.2 Changements de variable

46. Cas d'un intégrande continu par morceaux
46.1 Si φ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement monotone, alors $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ est continue par morceaux.
46.2 ➞ *Soient $f : I \to E$, une fonction continue par morceaux et $\varphi : J \to I$, une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de J sur I. Alors f est intégrable sur I si, et seulement si, $(f \circ \varphi)\varphi'$ est intégrable sur J et dans ce cas,*

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_J f\big(\varphi(u)\big)\,\big|\varphi'(u)\big|\,\mathrm{d}u.$$

46.3 En notant a et b, les bornes inférieure et supérieure de J (qu'elles soient finies ou infinies), la formule de changement de variable devient :

$$\int_{\varphi(a+)}^{\varphi(b-)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f\big(\varphi(u)\big)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

que la fonction φ soit croissante ou décroissante.
46.4 Le théorème **[46.2]** est un moyen de démontrer qu'une fonction est (resp. n'est pas) intégrable sur un intervalle donné en se ramenant à une fonction dont l'intégrabilité (resp. la non-intégrabilité) est bien connue. →**[51.5]**

Changements de variable affines

47. Les changements de variable les plus simples sont les changements de variables affines :

$$t = \alpha u + \beta$$

avec $\alpha \neq 0$.
47.1 ➞ *Soit φ, un changement de variable affine réalisant une bijection de J sur I. Une fonction f est intégrable sur I si, et seulement si, $f \circ \varphi$ est intégrable sur J. Dans ce cas,*

$$\forall\, x, y \in J, \quad \int_x^y f(\alpha u + \beta)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha x + \beta}^{\alpha y + \beta} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

47.2 ➞ *La fonction $[t \mapsto f(t)]$ est intégrable au voisinage de $t = t_0$ si, et seulement si, la fonction $[h \mapsto f(t_0 + h)]$ est intégrable au voisinage de $h = 0$.*
47.3 La fonction $\ell\mathrm{n}(1+t)$ est intégrable sur $]-1, 1[$.
47.4 Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-x_0)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

48. Fonctions paires ou impaires
48.1 Si la fonction f est paire ou impaire, alors elle est intégrable au voisinage de $-\infty$ si, et seulement si, elle est intégrable au voisinage de $+\infty$.
48.2 Si f est paire et intégrable sur $\mathbb{R}$, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

48.3 Si f est impaire et intégrable sur $\mathbb{R}$, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

48.4

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{1 + t^2 + t^4} = 0$$

49. Moyenne d'une fonction périodique
Soit f, une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et périodique, de période T.
49.1

$$\forall\, a > 0, \quad \frac{a}{T}\int_0^{T/a} f(at)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$$

49.2 ✍ *La* **moyenne** *d'une fonction continue par morceaux et périodique f, de période T, est égale à*

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.$$

49.3 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n = [t \mapsto f(nt)]$ est périodique et la moyenne de f_n est égale à la moyenne de f.
50. Autres exemples de changements de variable affines
50.1

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$$

50.2

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 - t + t^2} = \frac{4\sqrt{3}\pi}{9}$$

50.3

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 - \sqrt{2}t + t^2} = \frac{3\sqrt{2}\pi}{4}$$

50.4 *Suite de* **[51.6]** –

$$\forall\, a > 0, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ell\mathrm{n}\, t}{a^2 + t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\,\frac{\ell\mathrm{n}\, a}{a}.$$

50.5 La seule valeur de $\alpha \in \mathbb{R}_+$ pour laquelle l'intégrale

$$\int_0^a \frac{t^\alpha\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t^3 + a^3}}$$

est indépendante de $a \in \mathbb{R}_+^*$ est $\alpha = 1/2$. →**[141]**
50.6 Pour $a < b$,

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(b-t)(t-a)}} = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \pi.$$

50.7 Pour tout $0 < a < 1$,

$$\int_a^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)(x-a)}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(1-a)u + a}\,\sqrt{u(1-u)}}.$$

50.8 **Une astuce**
Si f est intégrable sur $]0,1[$, alors $[x \mapsto xf(x)]$ est intégrable sur $]0,1[$ et si $f(x) = f(1-x)$ pour tout $x \in\,]0,1[$, alors

$$\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

50.9 **Intégrales d'Euler**

$$\int_0^{\pi/2} \ell\mathrm{n}(\cos t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ell\mathrm{n}(\sin t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}\,\ell\mathrm{n}\, 2$$

Autres changements de variable usuels

51. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, la fonction $[t \mapsto t^\alpha]$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $I =]0, +\infty[$ sur I, dont la réciproque est aussi une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de I sur I.

51.1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{dt}{\sqrt{t}}$$

51.2 Pour tout $a > 0$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-a\sqrt{t}}\,dt = 2\int_0^{+\infty} xe^{-ax}\,dx.$$

51.3 *Suite de* [**50.2**] –

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3} = \int_0^{+\infty} \frac{t\,dt}{1+t^3} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$$

51.4 *Suite de* [**50.3**] –

1.
$$\int_0^{+\infty} \frac{t\,dt}{1+t^4} = \frac{\pi}{4}$$

2.
$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2\,dt}{1+t^4} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$$

51.5 **Intégrales de Fresnel**
Les intégrales impropres

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,dt$$

sont convergentes [**40.2**], alors que les fonctions $[t \mapsto \cos(t^2)]$ et $[t \mapsto \sin(t^2)]$ ne sont pas intégrables sur $\mathbb{R}_+$. →[**105**]

51.6 Avec $\alpha = -1$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ell n\, t}{1+t^2}\,dt = 0.$$

51.7 Pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^a)} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^{-a})} = \frac{\pi}{4}.$$

52. La fonction cos réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $I_1 =]0, \pi[$ sur $I_0 =]-1, 1[$ et la fonction sin réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $I_2 =]-\pi/2, \pi/2[$ sur I_0. Les deux bijections réciproques sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I_0.

52.1 Pour toute fonction f continue sur $[-1, 1]$,

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^\pi f(\cos t)\,dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\sin t)\,dt.$$

52.2 Pour tous $a < b$,

$$\int_a^b \sqrt{(b-x)(x-a)}\,dx = \frac{\pi(b-a)^2}{8}.$$

53. **Intégrale de Dirichlet**

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$$

Entraînement

54. **Questions pour réfléchir**

1. Si f est intégrable sur I, alors $\overline{f}$ est intégrable sur I.
2. *Suite de* [**36**] – Quelles sont, parmi les fonctions de référence, celles qui sont de carré intégrable ?
3. Une fonction constante est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?
4. La fonction $[x \mapsto 1/x]$ n'est intégrable ni sur l'intervalle $]0, 1]$, ni sur l'intervalle $[1, +\infty[$.
5. Existe-t-il un réel a tel que la fonction $[x \mapsto 1/x^a]$ soit intégrable sur $]0, +\infty[$?

6.a Si f est continue par morceaux sur $[a, b[$, alors f est intégrable au voisinage de a.
6.b Si f est continue par morceaux sur $]a, b]$, alors f est intégrable au voisinage de b.
7. Si f est continue par morceaux sur un intervalle borné I et admet des limites finies en chacune des bornes de I, alors f est intégrable sur I.
8. Une fonction continue qui tend vers une limite $\ell \neq 0$ au voisinage de $+\infty$ n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$.
9. On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$.
9.a Si f est continue, alors toutes les primitives de f sont bornées sur $\mathbb{R}$.
9.b La réciproque est-elle vraie ?
9.c On suppose que, pour toute primitive F de f, il existe $x_F \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{x_F}^x f(t)\,dt.$$

La fonction f est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$?
10. Si φ est lipschitzienne et nulle en 0 et si f est intégrable sur I, alors $\varphi \circ f$ est intégrable sur I.
11.a Si les hypothèses du théorème [**31**] sont vérifiées, alors on peut appliquer le théorème [**38.1**] au voisinage de a et au voisinage de b.
11.b Pourquoi le théorème [**38.1**] est-il plus utile en pratique ?
12. Si f est intégrable sur I et si J est un intervalle contenu dans I, alors le produit $\mathbb{1}_J f$ est intégrable sur I.
13. Si f et g sont intégrables sur I, alors les deux fonctions $\min\{f, g\}$ et $\max\{f, g\}$ sont intégrables sur I.
14. Condition sur I pour qu'une fonction intégrable soit aussi une fonction de carré intégrable ?
15. Condition sur I pour qu'une fonction de carré intégrable soit aussi une fonction intégrable ?
16. Condition pour que

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

17. *Suite de* [**44.3**] – Cas d'égalité ?
18. Soit $\varphi : I \to J$, une bijection strictement monotone.
18.a L'intervalle J est ouvert (resp. fermé) si, et seulement si, l'intervalle I est ouvert (resp. fermé).
18.b Exprimer les bornes de J en fonction des bornes de I.
19. *Suite de* [**52.2**] – Retrouver la valeur de l'intégrale sans aucun calcul.

55. Soient f, une fonction continue par morceaux et positive sur $I =]a, b[$ et $x_0 \in I$.

1. Si f n'est pas intégrable au voisinage de b, alors

$$\lim_{x \to b} \int_{x_0}^x f(t)\,dt = +\infty.$$

2. Si f n'est pas intégrable au voisinage de a, alors

$$\lim_{x \to a} \int_{x_0}^x f(t)\,dt = -\infty.$$

56. Condition sur $a \in \mathbb{R}$ pour que la fonction

$$\left[t \mapsto \frac{t - \sin t}{t^a}\right]$$

soit intégrable sur $]0, +\infty[$.

57. Intégrabilité de

$$\frac{\cos t}{\sqrt{t}}$$

sur les intervalles $]0, 1]$, $[1, +\infty[$ et $]0, +\infty[$.

58. Intégrabilité de
$$\frac{\ell n^n t}{t^m}$$
aux voisinages de 0, de 1 et de $+\infty$ selon m et n.

59. Intégrabilité sur $]0,+\infty[$ de
$$\frac{t^a}{1+t^b} \quad \text{et de} \quad \frac{t^a e^{-t}}{1+t^b}$$
en fonction des réels a et b.

60. La fonction $[t \mapsto e^{-(t+ix)^2}]$ est intégrable sur $]-\infty,+\infty[$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

61. La fonction
$$\Big[t \mapsto \frac{\sin t}{t^\alpha}\Big]$$
est intégrable sur $]0,+\infty[$ si, et seulement si, $1 < \alpha < 2$. $\to$**[40.1]**

62. Si la fonction f est intégrable sur l'intervalle I, on dit que l'intégrale $\int_I f(t)\,dt$ existe ***au sens propre***. $\to$**[33.1]**
Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ les intégrales suivantes existent-elles au sens propre ?
$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{e^t-1}\,dt \qquad \int_0^{\pi} \frac{t\sin t}{1-x\cos t}\,dt \qquad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt$$

63. Soit f, une fonction intégrable sur $[0,+\infty[$. Si φ et ψ sont deux fonctions positives, qui tendent vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$, alors l'intégrale
$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt$$
tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

64. Exemples d'intégrations par parties

64.1
$$\int_0^{+\infty} \ell n\Big(\frac{1+t^2}{t^2}\Big)\,dt = \pi$$

64.2
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, k > 0, \qquad \int_0^{+\infty} t^n e^{-kt}\,dt = \frac{n!}{k^{n+1}}$$

64.3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\frac{\pi}{2}.$$
(Il est aussi intéressant de poser $t = \tan\theta$.)

64.4 Quels que soient n et p dans $\mathbb{N}$,
$$\int_0^1 t^n\,\ell n^p\,t\,dt = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^{p+1}}.$$

65. *Suite de* **[51.4]** –
$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t}{t^{3/2}}\,dt = \sqrt{2}\pi$$

66. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction continue qui tend vers ℓ_- au voisinage de $-\infty$ et vers ℓ_+ au voisinage de $+\infty$. Alors
$$\forall\, a > 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+a) - f(t)\,dt = (\ell_+ - \ell_-)a.$$
S'agit-il d'une intégrale propre ou impropre ?

67. Pour tout $x > 0$,
$$\int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos t\,dt = \frac{x}{1+x^2}, \qquad \int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin t\,dt = \frac{1}{1+x^2}.$$

68.
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} te^{ixt-(t^2/2)}\,dt = ix\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt-(t^2/2)}\,dt$$

IV

Intégration des fonctions à valeurs vectorielles

69. On étend ici la théorie de l'intégrale aux fonctions qui prennent leurs valeurs dans un espace vectoriel vectoriel de dimension finie $(E, \|\cdot\|)$.

70. On considère une base $\mathscr{B} = (e_k)_{1\leqslant k\leqslant d}$ de E, ainsi que sa base duale $\mathscr{B}^* = (e_k^*)_{1\leqslant k\leqslant d}$.
Chaque fonction f à valeurs dans E peut donc être rapportée à ses composantes $f_k = e_k^* \circ f$:
$$f(t) = \sum_{k=1}^d f_k(t)\cdot e_k.$$

IV.1 Fonctions intégrables

71. Fonctions continues par morceaux

71.1 ✍ *La fonction f est une* **fonction en escalier sur** *I lorsque toutes ses composantes $f_1, \dots, f_d$ sont des fonctions en escalier sur I.*

71.2 ➙ *Si $f : I \to E$ est une fonction en escalier, alors $\|f\| : I \to \mathbb{R}$ est une fonction en escalier.*

71.3 Si f est une fonction en escalier sur $[a,b]$, alors il existe une subdivision $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_N = b$ et une famille $(x_k)_{0\leqslant k<N}$ de vecteurs de E tels que
$$\forall\, 0 \leqslant k < N,\ \forall\, t \in]\alpha_k, \alpha_{k+1}[, \quad f(t) = x_k.$$

71.4 ✍ *La fonction f est* **continue par morceaux sur** *I lorsque toutes ses composantes $f_1, \dots, f_d$ sont continues par morceaux sur I.*

71.5 ➙ *Si $f : I \to E$ est une fonction continue par morceaux, alors $\|f\| : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux.*

72. Fonctions intégrables

72.1 ✍ *La fonction $f : I \to E$ est* **intégrable sur** *I lorsque toutes ses composantes f_k, $1 \leqslant k \leqslant d$, sont intégrables sur I.*

72.2 On suppose que la fonction $f : I \to E$ est continue par morceaux sur I. La fonction f est intégrable sur I si, et seulement si, la fonction $\|f\| : I \to \mathbb{R}_+$ est intégrable sur I.

IV.2 Définition de l'intégrale

73. ✍ *Si $f : I \to E$ est intégrable sur I, son intégrale est définie par*
$$\int_I f(t)\,dt = \sum_{k=1}^d \Big(\int_I f_k(t)\,dt\Big)e_k.$$

74. Si $I =]a,b[$ et si $f : I \to E$ est intégrable, alors
$$\int_I f(t)\,dt = \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \int_x^y f(t)\,dt,$$
quelle que soit la norme $\|\cdot\|$ sur E.

75. Cohérence des définitions
Soit $f : I \to E$.

1. Certaines propriétés des composantes de f dépendent de la base de E choisie pour calculer ces composantes, d'autres propriétés ne dépendent pas de ce choix.

1.a Soit $f(t) = (e^t, 1+t^2) \in \mathbb{R}^2$. Les composantes de f dans la base canonique (e_1, e_2) sont positives. Les composantes de f dans la base $(-e_2, -e_1)$ ne sont pas positives.

1.b Un problème analogue se pose pour définir l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Q}$. Préciser ce problème et sa résolution.

2. Pour qu'une propriété des composantes de f soit une propriété de f, il faut que cette propriété soit indépendante du choix de la base.

2.a Soit $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d)$, une base de E. On pose
$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant d, \quad \varphi_k = \varepsilon_k^* \circ f.$$
Relier les composantes φ_k, $1 \leqslant k \leqslant d$, de f dans la base $\mathscr{C}$ aux composantes f_k, $1 \leqslant k \leqslant d$, de f dans la base $\mathscr{B}$.

2.b Les définitions **[71.1]**, **[71.4]**, **[72]** et **[73]** ont bien un sens.

Linéarité

76.1 Une combinaison linéaire de fonctions intégrables sur I est intégrable sur I et

$$\int_I (\lambda f + g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_I f(t)\,\mathrm{d}t + \int_I g(t)\,\mathrm{d}t,$$

quelles que soient les fonctions f et g intégrables sur I.

76.2 Relation de Chasles
Si $f : I \to E$ est intégrable sur I, alors

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t,$$

quels que soient les réels a, b et c dans I.

76.3 Si I est un voisinage de $+\infty$ et si $f : I \to E$ est intégrable sur I, alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_b^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

quels que soient a et b dans I.

76.4 ➙ *Soit $X : I \to \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, une fonction intégrable. Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, la fonction $AX : I \to \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est intégrable et*

$$\int_I AX_t\,\mathrm{d}t = A\Big(\int_I X_t\,\mathrm{d}t\Big).$$

76.5 ▷ *Si $f : I \to E$ est intégrable et si $\varphi : E \to F$ est linéaire, alors $\varphi \circ f : I \to F$ est intégrable et*

$$\int_I (\varphi \circ f)(t)\,\mathrm{d}t = \varphi\Big(\int_I f(t)\,\mathrm{d}t\Big).$$

76.6 ➙ *Soit $A : I \to \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, une fonction intégrable. Quelles que soient les matrices $Q \in \mathfrak{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $P \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, la fonction $QAP : I \to \mathfrak{M}_{m,q}(\mathbb{K})$ est intégrable et*

$$\int_I QA_tP\,\mathrm{d}t = Q\Big(\int_I A_t\,\mathrm{d}t\Big)P.$$

Positivité

77. L'espace vectoriel E n'est pas muni naturellement d'une relation d'ordre, à moins que $E = \mathbb{R}$. La conservation des inégalités par intégration n'a donc pas de sens pour des fonctions à valeurs vectorielles et seule subsiste l'***inégalité triangulaire***.

78. ➙ *Si $f : I \to E$ est intégrable sur I, alors*

$$\Big\| \int_I f(t)\,\mathrm{d}t \Big\| \leqslant \int_I \|f(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

79. Théorème fondamental

79.1 ✍ *Soit $f : I \to E$. Une application $F : I \to E$ est une* **primitive** *de f lorsque F est dérivable et que sa dérivée est f :*

$$F' = f.$$

79.2 ➙ *Si la fonction $f : I \to E$ est continue, alors l'application*

$$F_{x_0} = \Big[x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t\Big]$$

est une primitive de f pour tout $x_0 \in I$.

79.3 Si la fonction $f : I \to E$ est continue et intégrable sur l'intervalle $I =]a,b[$, alors

$$F_a = \Big[x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\Big] \quad \text{et} \quad F_b = \Big[x \mapsto -\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\Big]$$

sont des primitives de f.

80. Intégration par parties

80.1 ➙ *On suppose que E et F sont deux espaces vectoriels normés de dimension finie.*
Soient $f : I \to E$ et $g : I \to F$, deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et $B : E \times F \to G$, une application bilinéaire. Alors

$$\int_a^b B\big(f'(t), g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \big[B\big(f(t), g(t)\big)\big]_a^b - \int_a^b B\big(f(t), g'(t)\big)\,\mathrm{d}t,$$

quels que soient a et b dans I.

80.2 Si $A : I \to \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, alors

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}A_t}{\mathrm{d}t} B_t\,\mathrm{d}t = \big[A_tB_t\big]_a^b - \int_a^b A_t \frac{\mathrm{d}B_t}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$$

quels que soient a et b dans I.

IV.3 Accroissements finis

81. On parle d'***accroissements finis*** pour désigner les variations

$$f(y) - f(x)$$

par opposition aux *accroissements infiniment petits*

$$f(x_0 + \delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\delta x$$

qui apparaissent quand on relie une fonction et sa dérivée.

81.1 ➙ **Égalité des accroissements finis**
Si une fonction f à valeurs réelles est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $a < c < b$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(c).$$

81.2 Le théorème **[81.1]** repose sur le ***théorème de Rolle*** et en particulier sur le fait qu'une fonction à valeurs *réelles* admette un extremum sur tout segment.

81.3 La fonction définie par $f(t) = (\cos t, \sin t)$ pour tout réel t est dérivable et, bien que $f(0) = f(2\pi)$, sa dérivée n'est jamais nulle.

81.4 À défaut pouvoir généraliser l'*égalité* des accroissements finis aux fonctions à valeurs vectorielles, on peut leur étendre l'inégalité des accroissements finis **[81.5]** qui rend en définitive les mêmes services que **[81.1]**. →**[82]**

81.5 ➙ *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable, alors f est lipschitzienne sur I si, et seulement si, sa dérivée est bornée sur I.*

82. Inégalité des accroissements finis
Le théorème des accroissements finis peut être démontré sous des hypothèses moins restrictives que celles du théorème suivant. →**[149]**

82.1 ➙ *Soit f, une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans un espace vectoriel de dimension finie E.*
S'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\forall\, t \in I, \quad \|f'(t)\| \leqslant K,$$

alors f est K-lipschitzienne sur I.

82.2 *Suite de* **[81.5]** –

$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |e^{iy} - e^{ix}| \leqslant |x - y|$$

83. Caractérisation des applications constantes

83.1 ➙ *Soient I, un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to E$, une fonction dérivable sur I. Si*

$$\forall\, t \in I, \quad f'(t) = 0_E,$$

alors f est constante sur I.

83.2 ➙ *Si $f : I \to E$ est continue sur l'intervalle I, dérivable sur son intérieur I° et si*

$$\forall\, t \in I^\circ, \quad f'(t) = 0_E$$

alors f est constante sur I.

84. Primitives

84.1 ➙ *Soient I, un intervalle de $\mathbb{R}$; f, une application de I dans E ; F_1 et F_2, deux primitives de f sur I. Alors la différence $F_1 - F_2$ est constante sur I.*

Entraînement

85. Questions pour réfléchir

1. Les réciproques de [**71**.2] et de [**71**.5] sont fausses.
2. Toute fonction en escalier $f : [a,b] \to E$ est intégrable sur $[a,b]$. Pour toute subdivision

$$a = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_N = b$$

telle que f soit constante sur chaque intervalle ouvert $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{N-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \cdot x_k$$

où x_k est la valeur prise par f sur $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$. →[**75**]

3. Pourquoi n'est-il pas possible d'établir l'inégalité triangulaire [**78**] en raisonnant sur les composantes de f ?
4. La fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x \neq 0, \quad f(x) = \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} {}^1\!/_x$$

est dérivable, sa dérivée est identiquement nulle, mais f n'est pas constante.

V

Intégrales et ordres de grandeur

86. Exploitation de la positivité

86.1 Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$e^{-2\varepsilon}\,\ell\mathrm{n}\,2 \leqslant \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant e^{-\varepsilon}\,\ell\mathrm{n}\,2$$

et lorsque a tend vers $+\infty$, →[**87**.3]

$$\int_a^{2a} \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x = \Theta\Big(\frac{e^{-a}}{a}\Big).$$

86.2 Lorsque a tend vers $+\infty$,

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{(a-x)\sqrt{1-x^2}} \sim \frac{\pi}{a}.$$

86.3 Pour tout $n \geqslant 2$, lorsque x tend vers $+\infty$, →[**87**.4]

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^n}\,\mathrm{d}t = \mathcal{O}\Big(\frac{e^{-x^2}}{x^{n-1}}\Big).$$

86.4 L'intégrale

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(x^2+t^2)(1+t^2)}}$$

est définie pour tout $x > 0$.

1. Au voisinage de $+\infty$,

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^3}\Big).$$

2. Au voisinage de 0,

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+t^2}} + \mathcal{O}(1)$$

donc $f(x) \sim -\,\ell\mathrm{n}\,x$. →[**91**.5]

87. Par intégration par parties

87.1 Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 t^n \sin(\pi t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme

$$I_{n+2} = \frac{1}{\pi} - \frac{(n+1)(n+2)}{\pi^2}\,I_n,$$

alors $I_n \sim {}^{\pi}\!/_{n^2}$ et la série $\sum I_n$ converge absolument. →[**122**.5]

87.2 Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{n+t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^4}\Big).$$

87.3 Lorsque x tend vers $+\infty$,

$$\int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \sim \frac{e^{-x}}{x}.$$

87.4 *Suite de* [**86**.3] – Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$,

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^n}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-x^2}}{2x^{n+1}} - \frac{n+1}{2}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^{n+2}}\,\mathrm{d}t.$$

En particulier, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \sim \frac{e^{-x^2}}{2x}.$$

87.5 Lorsque x tend vers $+\infty$,

$$\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\sin xt\,\mathrm{d}t = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x}\Big).$$

Intégration des relations de comparaison

88. On approfondit l'analogie entre les intégrales et les séries avec les résultats suivants, qu'on comparera avec [**6**.**87**] dans le cas où la fonction de référence g est intégrable et avec [**6**.**90**] dans le cas contraire.

89. Cas intégrable

On considère une fonction de référence g, qu'on suppose positive et intégrable sur l'intervalle $I = [a,b[$.

89.1 Lorsque x tend vers b, l'intégrale

$$\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

est un infiniment petit.

89.2 Si f est continue par morceaux sur I et si $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ au voisinage de b, alors f est intégrable sur $[x,b[$ pour tout $x \in I$ et

$$F(x) = \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

tend vers 0 lorsque x tend vers b.

89.3 ➙ *Si $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ au voisinage de b, alors*

$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathcal{O}\Big(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\Big)$$

au voisinage de b.

89.4 ➙ *Si $f(x) = o(g(x))$ au voisinage de b, alors*

$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = o\Big(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\Big)$$

au voisinage de b.

89.5 ➙ *Si $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de b, alors*

$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \sim \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

au voisinage de b.

90. Lorsque la fonction g est positive et intégrable au voisinage de a et qu'on peut comparer $f(t)$ à $g(t)$ au voisinage de a, on peut comparer de la même manière les intégrales

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

lorsque x tend vers a.

91. Cas non intégrable
Cette fois, la fonction de référence g est encore supposée continue par morceaux et positive sur l'intervalle $I = [a, b[$, mais n'est plus intégrable sur I.
91.1 La fonction G définie par

$$\forall\, x \in I, \quad G(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

est croissante sur I et tend vers $+\infty$ au voisinage de b.
91.2 Soit f, une fonction continue par morceaux sur I. L'expression

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est définie pour tout $x \in I$.
91.3 ➞ *Si $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ au voisinage de b, alors*

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \mathcal{O}\Big(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\Big)$$

au voisinage de b.
91.4 ➞ *Si $f(x) = o(g(x))$ au voisinage de b, alors*

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = o\Big(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\Big)$$

au voisinage de b.
91.5 ➞ *Si $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de b, alors f n'est pas intégrable sur I et*

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \sim \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

au voisinage de b.
92. On suppose que f et g sont continues par morceaux sur l'intervalle $]a, b]$ et que g est une fonction positive.
Lorsqu'on peut comparer la fonction f à la fonction g au voisinage de a et que g n'est pas intégrable au voisinage de a, on peut comparer de la même manière les intégrales

$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

lorsque x tend vers a.
93. Exemples
93.1 Lorsque x tend vers 1,

$$\operatorname{Arccos} x = \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \sim \sqrt{2}\sqrt{1-x}.$$

93.2 Lorsque x tend vers 0,

$$\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t \sim \frac{1}{x}.$$

93.3 Pour tout $x > 0$, on pose

$$F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Alors $F(x) = o(e^{-x})$ au voisinage de $+\infty$ et $F(x) \sim -\ell\mathrm{n}\, x$ au voisinage de 0. →[99]
93.4 Lorsque x tend vers $+\infty$,

$$\int_0^x \frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\,\mathrm{d}t \sim \frac{\pi}{2}\,\ell\mathrm{n}\, x.$$

93.5

$$\int_a^{+\infty} \Big(\frac{\sin t}{t}\Big)^2\,\mathrm{d}t \underset{a\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2a}$$

Entraînement

94. Questions pour réfléchir
1. Sur quel intervalle l'intégration par parties

$$\int \frac{x^m}{\ell\mathrm{n}^n\, x}\,\mathrm{d}x = \frac{-x^{m+1}}{(n-1)\,\ell\mathrm{n}^{n-1}\, x} + \frac{m+1}{n-1}\int \frac{x^m}{\ell\mathrm{n}^{n-1}\, x}\,\mathrm{d}x$$

est-elle légitime ?
95. Soient f et g, deux fonctions continues sur $]0, 1]$. On suppose que g est positive et qu'elle n'est pas intégrable au voisinage de 0.
1. Si $f(t) \sim g(t)$ lorsque t tend vers 0, alors

$$\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t \sim \int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. Si la différence $g - f$ est intégrable au voisinage de 0, alors

$$\int_{x^2}^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to 0}{\sim} \int_{x^2}^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

96. *Suite de* **[93.3]** – La fonction F est intégrable sur $]0, +\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

en intégrant par parties.
97. *Suite de* **[93.3]** – Au voisinage de $+\infty$,

$$F(x) = \frac{e^{-x}}{x} + \mathcal{O}\Big(\frac{e^{-x}}{x^2}\Big).$$

98. *Suite de* **[93.3]** – Pour tout $x > 0$, on pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t+x}\,\mathrm{d}t.$$

Alors $f(x) = e^{x^2}F(x^2)$, donc $f(x) \sim -2e^{x^2}\,\ell\mathrm{n}\, x$ au voisinage de 0 et

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^4}\Big)$$

au voisinage de $+\infty$.
99. On considère la fonction h définie par

$$\forall\, x > 1, \quad h(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x\,\ell\mathrm{n}\, n}.$$

99.1 Pour tout $x > 1$ et tout $a \geqslant 2$,

$$\int_a^{+\infty} e^{-x\,\ell\mathrm{n}\, t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\ell\mathrm{n}\, t} = F\big((x-1)\,\ell\mathrm{n}\, a\big).$$

99.2 *Suite de* **[97]** – On a $h(x) \sim -\ell\mathrm{n}(x-1)$ au voisinage de 1 et

$$h(x) = \frac{1}{2^x\,\ell\mathrm{n}\, 2} + \mathcal{O}(3^{-x})$$

au voisinage de $+\infty$.
100. Lorsque x tend vers $+\infty$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^2}\Big).$$

101. Comme

$$\forall\, 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \sqrt{2} - \sqrt{1+t} \leqslant \frac{1-t}{2}$$

alors

$$\operatorname{Arccos}(1-x) = \int_{1-x}^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \sqrt{2x} + \mathcal{O}(x\sqrt{x})$$

lorsque $x \to 0^+$.
102. Répartition asymptotique de la loi normale [87.4]
Lorsque x tend vers $+\infty$,

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{e^{-x^2}}{4x^3} + \mathcal{O}\Big(\frac{e^{-x^2}}{x^5}\Big).$$

103. Approximation de la mesure de Dirac
Soit h, une fonction continue par morceaux sur $[0,1]$.

1. Il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|h(t)| \leqslant M$ pour tout $t \in [0,1]$.
2. Si h tend vers 0 au voisinage de 1, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \left| \int_0^1 (n+1)t^n h(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \varepsilon + M(1-\alpha)^{n+1}.$$

3. Si h est continue en 1, alors

$$n\int_0^1 t^n h(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} h(1).$$

104. Répartition asymptotique de la loi Γ
Pour tout $a > 0$, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$\int_x^{+\infty} t^{a-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \sim x^{a-1}e^{-x}$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$e^x \int_x^{+\infty} \Big(\frac{t}{x}\Big)^{a-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 + \frac{a-1}{x} + \frac{(a-1)(a-2)}{x^2} + \cdots + \frac{(a-1)\cdots(a-n)}{x^n} + o\Big(\frac{1}{x^n}\Big).$$

105. Vitesse de convergence des intégrales de Fresnel [51.5]
Pour tout $x > 0$,

$$\int_x^{+\infty} e^{it^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2i}\int_x^{+\infty} \frac{e^{it^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{e^{ix^2}}{2ix}$$

et lorsque x tend vers $+\infty$,

$$\int_x^{+\infty} e^{it^2}\,\mathrm{d}t = \frac{-e^{ix^2}}{2ix} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x^3}\Big).$$

106. *Suite de* **[95]** –

$$\int_0^1 \frac{t-1}{\ell\mathrm{n}\, t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to1}\int_0^x \frac{t-1}{\ell\mathrm{n}\, t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to1}\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}u}{\ell\mathrm{n}\, u} = \ell\mathrm{n}\, 2$$

VI

Les théorèmes lebesguiens

107. On considère ici des suites et des séries de fonctions, c'est-à-dire des suites et des séries dont les termes généraux dépendent d'un paramètre.

VI.1 Modes de convergence d'une suite de fonctions

108. Il y a plusieurs notions de convergence pour les suites de fonctions : convergence simple, convergence uniforme, convergence dominée, convergence normale... Il faut donc toujours prendre soin de répondre à deux questions :

Comment ? en précisant le *mode* de convergence : la série converge simplement, uniformément, normalement...

Où ? en précisant le *domaine* de convergence : sur tout l'intervalle I, sur tout segment contenu dans l'intervalle I, sur l'intervalle $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$...

Convergence simple

109. Convergence simple d'une suite de fonctions
109.1 ✍ *Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies sur I,* **converge simplement sur** *I vers la fonction f lorsque*

$$\forall\, t \in I, \quad f(t) = \lim_{n\to+\infty} f_n(t).$$

La fonction f est appelée la **limite simple** *de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
109.2 La suite des fonctions $f_n = \big[t \mapsto e^{-nt}\sin(nt)\big]$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction nulle.
109.3 La suite des fonctions $f_n = [t \mapsto t^n]$ converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction nulle. Cette suite converge simplement sur $[0,1]$, mais sa limite n'est pas continue sur $[0,1]$.
109.4 La suite des fonctions $f_n = \big[t \mapsto nte^{-nt}\big]$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction nulle.

110. Convergence simple d'une série de fonctions
110.1 ✍ *Une série de fonctions $\sum u_n$, définies sur I,* **converge simplement sur** *I lorsque, pour tout $t \in I$, la série numérique $\sum u_n(t)$ converge.*
La fonction S définie sur I par

$$\forall\, t \in I, \quad S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$$

est appelée la **somme** *de la série de fonctions $\sum u_n$.*
110.2 Les séries de fonctions

$$\sum \frac{1}{n^t} \quad \text{et} \quad \sum \frac{(-1)^n}{n^t}$$

convergent simplement sur $]1,+\infty[$ et sur $]0,+\infty[$ respectivement.
110.3 La série de fonctions $\sum t^n$ converge simplement sur $[0,1[$ et sa somme est continue.
110.4 La série de fonctions $\sum e^{-nt}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ et sa somme est continue.
110.5 La série de fonctions $\sum t^n\,\ell\mathrm{n}\, t$ converge simplement sur $]0,1]$ et sa somme est continue sur $]0,1[$.

Convergence dominée

111.1 ✍ *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions qui converge simplement sur I vers une fonction f. La convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* **dominée sur** *I lorsqu'il existe une fonction g intégrable sur I telle que*

$$\forall\, t \in I,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \big|f_n(t)\big| \leqslant g(t).$$

111.2 Méthode
Pour montrer que la convergence d'une suite de fonctions est dominée sur I, on vérifie d'abord que la suite de fonctions converge simplement sur I, puis on cherche un *majorant* de $\big|f_n(t)\big|$ sur I qui soit *indépendant* de $n \in \mathbb{N}$ et qui soit *intégrable sur I* en tant fonction de t.

112. ✍ *Soit $\sum u_n$, une série de fonctions qui converge simplement sur I. La convergence de la série $\sum u_n$ est* **dominée sur** *I lorsque la convergence de la suite des sommes partielles est dominée sur I.*

$$\exists\, g \in \mathscr{L}^1(I),\ \forall\, t \in I,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \Big|\sum_{k=0}^{n} u_k(t)\Big| \leqslant g(t).$$

113. ➙ *Si la suite de fonctions continues par morceaux $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction continue par morceaux f et si la convergence est dominée sur I, alors les fonctions f_n et la fonction f sont intégrables sur I.*

114. Convergence en moyenne
114.1 ✍ *Soient $f \in \mathscr{L}^1(I)$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions intégrables sur I. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$* **converge en moyenne sur** *I* **vers** *f lorsque*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_I \big|f(t) - f_n(t)\big|\,\mathrm{d}t = 0.$$

114.2✍ *Pour toute fonction $f \in \mathscr{L}^1(I)$, on pose*

$$\|f\|_1 = \int_I |f(t)|\,dt.$$

114.3➙ *Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne sur I vers f, alors*

$$\int_I f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\,dt.$$

115. Convergence en moyenne quadratique

115.1✍ *Soient $f \in \mathscr{L}^2(I)$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions de carré intégrable sur I. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$* **converge en moyenne quadratique sur** *I* **vers** *f lorsque*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I |f(t) - f_n(t)|^2\,dt = 0.$$

115.2✍ *Pour toute fonction $f \in \mathscr{L}^2(I)$, on pose*

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_I |f(t)|^2\,dt}.$$

VI.2 Théorème de convergence dominée

116. La conclusion du théorème de convergence dominée peut s'écrire :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\,dt = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt.$$

Ce théorème, que nous admettons, énonce donc une condition suffisante pour justifier un **passage à la limite sous le signe $\int$**.

116.1➙ *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions intégrables sur I qui converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I. Si la convergence est dominée sur I, alors f est intégrable sur I et*

$$\int_I f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\,dt.$$

116.2▷ *Sous les hypothèses du théorème* **[116.1]**, *la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne sur I vers f.*

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - f_n\|_1 = 0$$

116.3➙ *Soient $(f_\lambda)_{\lambda\in]a,b[}$, une famille de fonctions intégrables sur I et $\mu \in [a,b]$.*
S'il existe une fonction g intégrable sur I telle que

$$\forall\,\lambda \in]a,b[,\ \forall\,t \in I, \quad |f_\lambda(t)| \leqslant g(t)$$

et si la fonction φ définie par

$$\forall\,t \in I, \quad \varphi(t) = \lim_{\lambda\to\mu} f_\lambda(t)$$

est continue par morceaux sur I, alors φ est intégrable sur I et

$$\int_I \varphi(t)\,dt = \lim_{\lambda\to\mu} \int_I f_\lambda(t)\,dt.$$

117. Exemples d'application

117.1 Si g est une fonction intégrable sur $]0,1[$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t^n g(t)\,dt = 0.$$

117.2

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 e^{-t^n+it^n}\,dt = 1$$

117.3 La suite de terme général

$$J_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^{n+1}}$$

tend vers 0. →**[136]**

117.4 Si f est intégrable sur $[0,+\infty[$, alors

$$n\int_0^1 \frac{f(nt)}{1+t}\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f(x)\,dx.$$

117.5 Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\int_0^n \sqrt{1+(1-{}^t\!/_n)^n}\,dt \sim n.$$

117.6 Si f est intégrable sur $]0,+\infty[$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n}\int_0^{x_n} t f(t)\,dt = 0$$

pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$.

117.7 Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} {}^t\!/_n}{t+t^3}\,dt \sim \frac{\pi}{2n}.$$

117.8 Les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^n}{t^{2n}+1}\,dt \qquad \int_0^{+\infty} e^{-t}|\sin^n t|\,dt \qquad \int_0^{+\infty} \frac{|\sin^n t|}{t^2}\,dt$$

tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

117.9 Par convexité de la fonction exp,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \Big(1+\frac{t}{n}\Big)^n e^{-2t}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1.$$

117.10

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(1+\frac{t^2}{n}\Big)^{-n}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$$

117.11 Limite continue par morceaux

Lorsque n tend vers $+\infty$, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^n+e^t}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{t^{n+2}+1}\,dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2+t^n e^{-t}}$$

tendent respectivement vers $1-{}^1\!/_e$, 1 et ${}^\pi\!/_4$.

117.12 Majorant défini par morceaux

La suite de terme général

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin nt}{nt+t^2}\,dt$$

tend vers 0.

117.13 *Suite de* **[50.7]** –

$$\lim_{a\to1} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(x-a)}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

118. Théorème de convergence bornée

118.1➙ *On suppose que I est un intervalle borné. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions intégrables sur I qui converge simplement sur I vers une fonction continue par morceaux f et s'il existe un réel M tel que*

$$\forall\,t \in I,\ \forall\,n \in \mathbb{N}, \quad |f_n(t)| \leqslant M$$

alors f est intégrable sur I et

$$\int_I f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\,dt.$$

118.2 Soient K, une fonction intégrable sur I et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions continues par morceaux sur I qui converge simplement sur I vers une fonction continue par morceaux f. S'il existe un réel M tel que

$$\forall\,t \in I,\ \forall\,n \in \mathbb{N}, \quad |f_n(t)| \leqslant M$$

alors le produit fK est intégrable sur I et

$$\int_I f(t)K(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)K(t)\,dt.$$

118.3

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/4}\tan^n t\,\mathrm{d}t = 0$$

118.4

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{N\to+\infty}\int_0^1\frac{1-(-t)^N}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ell\mathrm{n}\,2$$

118.5 La fonction

$$F = \left[x\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right]$$

tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

118.6 La fonction

$$F = \left[x\mapsto\int_0^1\frac{(t-1)t^x}{\ell\mathrm{n}\,t}\,\mathrm{d}t\right]$$

tend vers 0 au voisinage de $+\infty$. →[**9.36**]

119. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de

$$f_0(t) = \left|\begin{array}{ll}\sin t & \text{pour } t\in[0,\pi],\\ 0 & \text{pour } t\notin[0,\pi]\end{array}\right.$$

et la relation :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \forall\, t\in\mathbb{R},\quad f_n(t) = f(t-n).$$

119.1 La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

119.2 Comme la convergence n'est pas dominée, si une fonction g vérifie

$$\forall\, t\in\mathbb{R},\ \forall\, n\in\mathbb{R},\quad \big|f_n(t)\big| \leqslant g(t)$$

alors g n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

VI.3 Théorème d'intégration terme à terme (version lebesguienne)

120.1 Si les fonctions $u_1, \dots, u_n$ sont intégrables sur I, alors

$$\int_I\sum_{k=1}^n u_k(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^n\int_I u_k(t)\,\mathrm{d}t$$

par [**8**].
Comme la conclusion du théorème [**121.1**] peut s'écrire

$$\int_I\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I u_n(t)\,\mathrm{d}t,$$

il faut retenir qu'il énonce une condition suffisante pour **intégrer terme à terme** la somme d'une famille *infinie* de fonctions intégrables. Nous admettrons ce théorème.

120.2→ Théorème de Fubini-Tonelli
Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une série de fonctions positives et intégrables sur I qui converge simplement sur I. Si la somme Σ définie par

$$\forall\, t\in I,\quad \Sigma(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}v_n(t)$$

est continue par morceaux sur I, alors Σ est intégrable sur I si, et seulement si, la série de terme général positif

$$\sum\int_I v_n(t)\,\mathrm{d}t$$

est convergente.

121.1→ Théorème de Fubini
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions intégrables sur I.
On suppose que :

- *la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I ;*
- *sa somme S est continue par morceaux sur I*
- *et la série de terme général $\int_I\big|u_n(t)\big|\,\mathrm{d}t$ est convergente.*

Dans ces conditions,

- *la fonction S est intégrable sur I ;*
- *la série de terme général $\int_I u_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument*
- *et sa somme est l'intégrale de S sur I.*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I u_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I S(t)\,\mathrm{d}t$$

121.2 ▷ Théorème de convergence croissante
Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite croissante de fonctions positives et intégrables sur I qui converge simplement sur I vers une fonction continue par morceaux W.
La fonction W est intégrable sur I si, et seulement si, la suite de terme général

$$\int_I w_n(t)\,\mathrm{d}t$$

est convergente et, dans ce cas,

$$\int_I W(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_I w_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

122. Exemples

122.1 *Suite de* [**64.2**] –

$$\int_0^{+\infty}\frac{t\,\mathrm{d}t}{e^t-1} = \sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}te^{-kt}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

122.2 *Suite de* [**64.4**] *et de* [**6.37**] –

1.

$$\int_0^1\frac{\ell\mathrm{n}\,t}{1-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1 t^k\,\ell\mathrm{n}\,t\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{-\pi^2}{6}$$

2.

$$\int_0^1\frac{\ell\mathrm{n}\,t}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{-\pi^2}{12}$$

3.

$$\int_0^1\frac{\ell\mathrm{n}\,t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-t^2)^n\,\ell\mathrm{n}\,t\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$$

122.3

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{ke^k} = \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+e^t} = \ell\mathrm{n}\Big(1+\frac{1}{e}\Big)$$

122.4 D'après [**67**], pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{e^t-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n^2+x^2}.$$

122.5 *Suite de* [**87.1**] –

$$\sum_{n=0}^{+\infty}I_n = \int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

Comparaison des théorèmes lebesguiens

123. On considère une série $\sum u_n$ de fonctions intégrables sur l'intervalle I, qui converge simplement sur I et dont la somme S est continue par morceaux sur I.

123.1 Lorsque la série numérique

$$\sum \int_I \big|u_n(t)\big| \,dt$$

est divergente, on ne peut appliquer le théorème **[121.1]** d'intégration terme à terme.

123.2 On peut cependant essayer d'appliquer le théorème de convergence dominée **[116.1]** en cherchant un majorant de

$$\Big|\sum_{n=0}^{N} u_n(t)\Big|$$

qui soit à la fois indépendant de $N \in \mathbb{N}$ et intégrable comme fonction de $t \in I$.

123.3

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+e^t} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^k t^k \,dt = \ell n\, 2$$

123.4

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+pk} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^p}.$$

123.5

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} (-1)^k e^{-kt} \,dt = \ell n\, \frac{1}{2}$$

123.6

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 t^n \sin \pi t \,dt = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} \,dt$$

Entraînement

124. Questions pour réfléchir

1. La suite des fonctions $g_n = \big[t \mapsto ne^{-nt}\big]$ converge-t-elle simplement sur $[0, +\infty[$?

2. Soit $\sum u_n$, une série de fonctions qui converge simplement sur I.

2.a La suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des restes est une suite de fonctions qui converge simplement sur I vers la fonction nulle.

2.b Si la convergence de la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée, la convergence de la série $\sum u_n$ est-elle dominée ?

3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions intégrables sur I qui converge en moyenne sur I vers f et vers g. Comparer les fonctions f et g.

4. *Suite de* **[117]** – À quels exemples peut-on appliquer le théorème de convergence bornée ?

5. Soit $\sum u_n$, une série de fonctions positives et intégrables sur I, qui converge simplement sur I et dont la somme S est continue par morceaux sur I. La convergence de la série $\sum u_n$ est dominée sur I si, et seulement si, la série numérique

$$\sum \int_I u_n(t) \,dt$$

est convergente.

125. La fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+x^3+t^3}$$

est décroissante et positive sur $[0, +\infty[$. Elle tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

126. *Suite de* **[99]** – On *admet* la continuité de h. Par **[121.1]** et **[6.180]**, la fonction h est intégrable sur $]1, +\infty[$ et

$$\int_1^{+\infty} h(x) \,dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\,\ell n^2\, n}.$$

127. Approximation de la transformée de Laplace
Pour tout $n \geqslant 1$, on considère la fonction $u_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad u_n(t) = \Big(1 - \frac{t}{n}\Big)^n \mathbb{1}_{[0,n]}(t).$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0, n]$,

$$\big|u_n(t)\big| \leqslant [e^{-t/n}]^n = e^{-t}.$$

2. Si $\big[t \mapsto e^{-t}g(t)\big]$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \Big(1 - \frac{t}{n}\Big)^n g(t) \,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} g(t) \,dt.$$

128. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, une fonction continue et bornée. On pose

$$\forall\, x > 0, \quad F(x) = \int_0^x f(t) \,dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} \,dt.$$

1. Il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\forall\, x > 0, \quad \big|F(x)\big| \leqslant Kx.$$

2. Si f tend vers 1 au voisinage de $+\infty$, alors $F(x) \sim x$ au voisinage de $+\infty$ et comme

$$\forall\, x > 0, \quad xg(x) = \int_0^{+\infty} xF\Big(\frac{u}{x}\Big) e^{-u} \,du,$$

alors $g(x) \sim {}^1\!/_x$ au voisinage de 0.

Questions, exercices & problèmes

Perfectionnement

129. Exemples et contre-exemples

1. Pour tout intervalle I, l'indicatrice $\mathbb{1}_I$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction $[x \mapsto \lfloor x \rfloor]$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
3. Exemple de fonction continue par morceaux sur un segment qui n'a ni maximum, ni minimum.
4. Exemple de fonction f, non continue par morceaux sur I, mais telle que $|f|$ soit continue par morceaux sur I.
5. Exemple de fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.
6. Exemple de fonction continue et intégrable sur I qui n'est pas bornée sur I.
7. Exemple de fonction continue sur $\mathbb{R}$, qui tend vers 0 aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$ mais qui n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.
8. Exemple de fonction intégrable au voisinage de $+\infty$ mais qui ne tend pas vers 0 au voisinage de $+\infty$.
9. Exemple de deux fonctions intégrables sur I dont le produit n'est pas intégrable sur I.
10. Exemple de fonctions continues par morceaux f et g telles que $f+g$ soit intégrable, tandis que ni $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$, ni $\int_I g(t)\,\mathrm{d}t$ n'existent (que ce soit au sens propre ou en tant qu'intégrales impropres convergentes).
11. Exemple de fonction non continue qui vérifie la condition de Dirichlet [**146**].
12. Exemple de changement de variable $\varphi : J \to I$ et de fonction $f \in \mathscr{L}^1(I)$ tels que $f \circ \varphi$ ne soit pas intégrable sur J.
13. Exemple d'une suite de fonctions intégrables sur I qui converge simplement sur I vers la fonction nulle ω alors qu'elle ne converge pas en moyenne sur I vers ω.
14. Exemple d'une suite de fonctions intégrables sur I qui converge en moyenne sur I vers la fonction nulle ω alors qu'elle ne converge pas simplement sur I vers ω.

130. Méthodes

1. Comment démontrer qu'une fonction n'est pas intégrable sur un intervalle donné ?
2. Comment démontrer qu'une intégrale est strictement positive ?
3. Comment démontrer qu'une intégrale impropre est convergente ?
4. Soit $\sum u_n$, une série de fonctions qui converge simplement sur I. Comment s'assurer que la somme de cette série de fonctions est continue par morceaux sur I ?
5. Comment caractériser les applications constantes à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie sans utiliser le théorème [**83.1**] ?
6. Une fonction f est ***fonction affine*** de $\mathbb{R}$ dans E lorsqu'il existe deux vecteurs a et b de E tels que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = t \cdot a + b.$$

Comment caractériser les fonctions affines de $\mathbb{R}$ dans E ?

131. Questions pour réfléchir

1. Comparer la notion de fonction intégrable avec la notion de série absolument convergente.
2. Une fonction continue, périodique et intégrable sur $\mathbb{R}$ est nulle.
3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions intégrables sur I qui converge en moyenne vers une fonction intégrable f.

3.a La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle simplement vers f ?

3.b Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f, la convergence est-elle dominée ?

4. Soient f et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, des fonctions de $\mathscr{L}^1(I) \cap \mathscr{L}^2(I)$.

4.a Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne sur I vers f, converge-t-elle aussi en moyenne quadratique sur I vers f ?

4.b Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique sur I vers f, converge-t-elle aussi en moyenne sur I vers f ?

Approfondissement

132. *Suite de* [**118.6**] – Comme

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-u} - e^{-2u}}{u}\,\mathrm{d}u = \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u,$$

alors $F(0) = \ell n\, 2$.

133. La fonction g définie par

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t}\,\mathrm{d}t = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

est la solution de l'équation différentielle

$$\forall\, x > 0, \quad g'(x) - g(x) = \frac{-1}{x}$$

qui tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et $g(x) \sim 1/x$ lorsque x tend vers $+\infty$.

134. La fonction F définie par

$$\forall\, x > 0, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x+t}\,\mathrm{d}t$$

est décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$. Comme

$$\forall\, x > 0, \quad F(x) = e^{x^2} \int_{x^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u,$$

la fonction F est une solution de l'équation différentielle

$$\forall\, x > 0, \quad 2xy(x) - y'(x) = \frac{2}{x}.$$

De plus $F(x) \sim 1/x^2$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $F(x) \sim -2\,\ell n\, x$ lorsque x tend vers 0.

135. Un calcul d'équivalent

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}.$$

1. La suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad I_{n+1} = \Big(1 - \frac{1}{2n}\Big) I_n.$$

2. On en déduit que la série $\sum(\ell n\, I_{n+1} - \ell n\, I_n)$ est divergente et que $\ell n\, I_n \sim \ell n\, 1/\sqrt{n}$.
3. On considère donc la suite de terme général $u_n = \sqrt{n} I_n$. Cette fois, la série $\sum(\ell n\, u_{n+1} - \ell n\, u_n)$ est absolument convergente, donc il existe une constante $K > 0$ telle que

$$I_n \sim \frac{K}{\sqrt{n}}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

136. *Suite de* [**117.3**] – Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$J_{n+1} = \frac{3n+2}{3n+3} J_n.$$

En posant $v_n = n^\alpha J_n$, la série $\sum(\ell n\, v_{n+1} - \ell n\, v_n)$ est absolument convergente si, et seulement si, $\alpha = 1/3$ et il existe $A > 0$ tel que

$$J_n \sim \frac{A}{\sqrt[3]{n}}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

137. On considère la fonction F définie sur $]-1,1[$ par

$$F(x) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-x^2t)}}.$$

1. La fonction F est paire et croissante sur $[0,1[$.
2. Pour tout $0 < \alpha < 1$,

$$\lim_{x\to 1} F(x) \geqslant \int_0^{1-\alpha} \frac{dt}{\sqrt{t}(1-t)}$$

donc F tend vers $+\infty$ au voisinage de 1. →[**1.14**]

3. Lorsque x tend vers 1,

$$F(x) \sim \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1-x^2t)}} = \frac{1}{x}\,\ell n \frac{1+x}{1-x} \sim -\ell n(1-x).$$

138. Pour tout entier n, on pose

$$a_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2}\, dt.$$

1. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 en décroissant.
2. *Suite de* [**6.33**] –

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} a_n.$$

3. La suite de terme général $(n+1)(n+2)(n+3)a_n a_{n+1}$ est constante et

$$a_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

4.a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \int_0^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\, dt = \frac{\pi}{2} + 1$$

4.b

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\, dt = \frac{\pi}{2} - 1$$

139. Sommes de Riemann
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad \alpha_k^n = a + \frac{k(b-a)}{n}.$$

Si f est continue sur $[a,b]$, alors la suite de fonctions en escalier f_n définies sur le segment $[a,b]$ par

$$f_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_k^n) \mathbb{1}_{[\alpha_k^n, \alpha_{k+1}^n[}$$

converge simplement sur $[a,b]$ vers f et la convergence est dominée, donc

$$\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a + \frac{k(b-a)}{n}\Big).$$

Pour aller plus loin

140. Questions pour réfléchir

1. Une fonction croissante de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ n'a que des ***discontinuités de première espèce*** : elle admet une limite à gauche finie en tout point de $[a,b[$ et une limite à droite finie en tout point de $]a,b]$. Est-elle nécessairement continue par morceaux sur $[a,b]$?
2. Si f est continue par morceaux sur un intervalle ouvert I, alors l'ensemble des points de discontinuité est fini ou dénombrable.
3. *Suite de* [**110**] – Pour quelles séries de fonctions la convergence est-elle uniforme ?
4. *Suite de* [**139**] – Peut-on étendre le résultat aux fonctions continues par morceaux sur le segment $[a,b]$?
5. *Suite de* [**139**] – Comment généraliser le résultat aux fonctions continues et intégrables sur $[0,+\infty[$?

141. *Suite de* [**50.5**] – Avec $\alpha = 1/2$,

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{t}\, dt}{\sqrt{t^3+1}} = \frac{2}{3}\,\ell n(1+\sqrt{2}).$$

142. Sommes de deux séries trigonométriques
Soit $t \in]0, 2\pi[$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $u \in [\pi \leftrightarrow t]$,

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} e^{iku}\Big| \leqslant \frac{1}{\sin(t/2)}.$$

2. Bien qu'on ne puisse pas appliquer le théorème de convergence dominée, on peut déduire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{int}}{n} = -\,\ell n\, 2 - i \int_\pi^t \frac{e^{iu}}{e^{iu}-1}\, du$$

de [**118.4**], c'est-à-dire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nt}{n} = \frac{\pi - t}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nt}{n} = -\,\ell n\Big(2\sin\frac{t}{2}\Big).$$

143. Soit $I =]a,b[$, un intervalle ouvert borné. Si f est intégrable sur I, alors la fonction

$$\Big[(x,y) \mapsto \int_x^y f(t)\, dt\Big]$$

est continue sur $[a,b] \times [a,b]$.

144. Composition des fonctions continues par morceaux

1. La fonction f définie par $f(0) = 1$ et par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = |x|$$

est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. La fonction $g = [x \mapsto 1/x]$ est continue sur $\mathbb{R}_+^* = f_*(\mathbb{R})$. La composée $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$, mais pas continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

2. Si f est continue par morceaux sur I et si g est continue sur l'adhérence de $f_*(I)$, alors $g \circ f$ est continue par morceaux sur I.

145. Intégrabilité et limite en $+\infty$

1. Soit f, de classe $\mathscr{C}^1$. Si f et f' sont intégrables au voisinage de $+\infty$, alors f tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.
2. Si une fonction est monotone et intégrable au voisinage de $+\infty$, alors elle tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.
3. Une fonction uniformément continue et intégrable sur un voisinage de $+\infty$ tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

146. Condition de Dirichlet [17.1]
Une fonction f continue par morceaux sur l'intervalle ouvert I vérifie la ***condition de Dirichlet*** lorsque, en chaque point, elle est égale à la moyenne des ses limites à droite et à gauche :

$$\forall\, x \in I, \quad f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

146.1 Toute fonction continue sur I vérifie la condition de Dirichlet.

146.2 On suppose que f est continue par morceaux, positive et d'intégrale nulle sur l'intervalle $]a,b[$.

1. Si f est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$, alors l'ensemble $[f(x) > 0]$ est fini (éventuellement vide).
2. Si f est continue par morceaux sur $]a,b[$, l'ensemble $[f(x) > 0]$ est-il fini ? dénombrable ?

146.3 Si de plus f vérifie la condition de Dirichlet sur l'intervalle ouvert non vide $I =]a, b[$, alors $f(t) = 0$ pour tout $t \in]a, b[$.
146.4 Le théorème [**45.2**] est vrai pour les fonctions intégrables qui vérifient la condition de Dirichlet.

147. Intégration par parties généralisée
On étend la formule d'intégration par parties à des fonctions qui ne sont pas de classe $\mathscr{C}^1$.
147.1 ✍ *Une fonction* $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ *est* **de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux** *lorsqu'il existe une subdivision*

$$a = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n = b$$

et, pour tout $0 \leqslant k < n$, *une application de classe* $\mathscr{C}^1$

$$\varphi_k : [\alpha_k, \alpha_{k+1}] \to \mathbb{C}$$

telles que

$$\forall\, 0 \leqslant k < n,\ \forall\, t \in]\alpha_k, \alpha_{k+1}[, \quad f(t) = \varphi_k(t).$$

147.2 On suppose que $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux et continue. Alors il existe une fonction $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$, continue par morceaux, telle que

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) = f(a) + \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Une telle fonction φ n'est pas unique.
147.3 On suppose que f et g sont deux applications de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux et continues sur $[a, b]$ et on considère deux fonctions continues par morceaux φ et ψ telles que

$$\forall\, x \in [a, b], \quad \begin{cases} f(x) = f(a) + \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t \\ g(x) = g(a) + \int_a^x \psi(t)\,\mathrm{d}t. \end{cases}$$

Alors

$$\int_a^b f(t)\psi(t)\,\mathrm{d}t = \big[f(t)g(t)\big]_a^b - \int_a^b \varphi(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

147.4 Peut-on étendre la formule d'intégration par parties aux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux qui ne sont pas continues ?

148. Une propriété de connexité
Les seules parties d'un intervalle I qui soient à la fois des fermés et des ouverts relatifs à I sont égaux à I.
148.1 Soient $A = [a, b]$, un segment et X, une partie fermée de A qui contient a. L'ensemble $A_X = \{x \in [a, b] : [a, x] \subset X\}$ a un plus grand élément M_X.
148.2 Si X est une partie fermée de $[a, b]$ qui contient a et telle que

$$\forall\, x_0 \in X,\ \exists\, \alpha > 0, \quad [x_0, x_0 + \alpha[\cap [a, b] \subset X,$$

alors $X = [a, b]$.

149. Inégalité des accroissements finis [148]
Soit $f : [A, B] \to E$, une application continue.
149.1 Si f est lipschitzienne sur $]A, B[$, alors f est lipschitzienne sur $[A, B]$.
149.2 Si f est dérivable sur $[a, b]$ et si

$$\exists\, K > 0,\ \forall\, t \in [a, b], \quad \big\|f'(t)\big\|_E \leqslant K$$

alors, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\big\{t \in [a, b] : \big\|f(t) - f(a)\big\|_E \leqslant (K + \varepsilon)(t - a)\big\} = [a, b].$$

149.3 ➞ *Soit* $f : I \to E$, *une fonction continue sur l'intervalle* I *et dérivable sur l'intérieur* I° *de cet intervalle. S'il existe une constante* $K \geqslant 0$ *telle que*

$$\forall\, t \in I^\circ, \quad \big\|f'(t)\big\|_E \leqslant K,$$

alors f *est* K*-lipschitzienne sur* I.
149.4 à quoi sert l'hypothèse sur la dimension de E dans la démonstration de [**149**] ?