Estimation d'une somme partielle [Mines25-04-2]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} \quad \textit{et} \quad v_n = u_n - \frac{(\ln n)^2}{2}.$$

1. *En comparant une somme et une intégrale, déterminer un équivalent simple de u_n.*

2. *Étudier la suite de terme général v_n (variations, convergence).*

3. *On rappelle que*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$$

*où γ est un réel fixé (la **constante d'Euler**).*
Après avoir justifié la convergence de la série, démontrer que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = \gamma \ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2}.$$

1. La fonction f définie par

$$\forall\, t \geqslant 1, \quad f(t) = \frac{\ln t}{t}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\forall\, t \geqslant 1, \quad f'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2},$$

donc elle est décroissante sur $[e, +\infty[$.

❧ On trace la figure légendée habituelle pour obtenir

$$\forall\, n \geqslant 4, \qquad \sum_{k=4}^{n} \frac{\ln k}{k} \leqslant \int_3^n \frac{\ln t}{t}\, dt \leqslant \sum_{k=3}^{n-1} \frac{\ln k}{k}.$$

On en déduit comme d'habitude que

$$\forall\, n \geqslant 4, \quad \int_3^n \frac{\ln t}{t}\, dt + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln n}{n} \leqslant u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k} \leqslant \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \int_3^n \frac{\ln t}{t}\, dt. \tag{1}$$

✍ *Compte-tenu des variations de la fonction f, la comparaison entre la somme et l'intégrale ne peut se faire que sur le segment $[3, n]$ et donc pour $n \geqslant 4$. Même si c'est sans importance pour la suite du raisonnement, il faut veiller à ajouter les termes supplémentaires pour pouvoir encadrer correctement u_n.*

❧ On sait calculer l'intégrale :

$$\forall\, n \geqslant 4, \qquad \int_3^n \frac{\ln t}{t}\, dt = \left[\frac{(\ln t)^2}{2}\right]_3^n = \frac{(\ln n)^2 - (\ln 3)^2}{2}.$$

On peut alors déduire de (1) que

$$u_n - \frac{(\ln n)^2}{2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(1)$$

et donc, comme $(\ln n)^2$ tend vers $+\infty$,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(\ln n)^2}{2}.$$

✍ *On n'est pas surpris par l'équivalent trouvé, compte-tenu de la question qui suit !*
Il est clair que $1/n = o(u_n)$ et donc que la série $\sum u_n$ diverge (comparaison de séries de terme général positif). Il est donc normal de trouver un équivalent infiniment grand pour les sommes partielles.

2. Puisque l'étude des variations est suggérée, allons-y !

$$\begin{aligned}
v_n - v_{n-1} &= \frac{\ln n}{n} - \frac{[\ln n]^2 - [\ln(n-1)]^2}{2} \\
&= \frac{\ln n}{n} + \frac{[\ln(n-1) - \ln n][\ln(n-1) + \ln n]}{2} \\
&= \frac{\ln n}{n} + \ln\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) \cdot \ln n \cdot \Big[1 + \frac{\ln(1 - 1/n)}{\ln n}\Big] \\
&= \frac{\ln n}{n} + \ln n \cdot \ln\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) + \Big[\ln\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big]^2 \\
&= \Big[\frac{-\ln n}{2n^2} + \mathcal{O}\Big(\frac{\ln n}{n^3}\Big)\Big] + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big) = \frac{-\ln n}{2n^2} + o\Big(\frac{\ln n}{n^2}\Big).
\end{aligned}$$

On déduit de cet équivalent que la variation $v_n - v_{n-1}$ est négative à partir d'un certain rang et donc que la suite (v_n) est décroissante à partir d'un certain rang.

✍ *L'étude des variations de la suite (v_n) n'a aucun intérêt. C'est en fait une indication déguisée pour inciter à considérer v_n comme une somme partielle d'une série télescopique.*

On déduit du développement asymptotique précédent que

$$v_n - v_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-\ln n}{2n^2} = o\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big).$$

Par conséquent, la série télescopique $\sum(v_n - v_{n-1})$ est (absolument) convergente, ce qui prouve que la suite (v_n) est convergente.

✍ *On a ainsi amélioré le résultat démontré à la première question, puisqu'on sait maintenant qu'il existe une constante C (= la limite de la suite v) telle que*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(\ln n)^2}{2} + C + o(1).$$

3. On a démontré que la suite de terme général $\frac{\ln k}{k}$ était décroissante à partir d'un certain rang. Il est clair qu'elle tend vers 0. On peut donc invoquer le Critère spécial des séries alternées, qui nous assure que la série

$$\sum (-1)^k \frac{\ln k}{k}$$

est convergente.

❧ Ensuite, il faut penser à l'astuce habituelle ! Pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} &= 2\sum_{p=1}^{n} \frac{\ln(2p)}{2p} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln k}{k} \\
&= \ln 2 \cdot H_n + \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln p}{p} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln k}{k} \\
&= \ln 2 \cdot H_n - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln k}{k}
\end{aligned}$$

et, d'après le développement asymptotique bien connu (et rappelé par l'énoncé, merci !) :

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \gamma \ln 2 + \ln 2 \cdot \ln n - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln k}{k} + o(1). \tag{2}$$

C'est parti pour une nouvelle comparaison de somme et d'intégrale, cette fois sur le segment $[n, 2n]$, toujours en supposant $n \geqslant 3$ pour exploiter la monotonie de la fonction f.

✍ *Bien entendu, ce n'est pas une restriction puisque nous allons faire tendre n vers $+\infty$.*

On reprend la même figure en modifiant la légende et on obtient cette fois

$$\forall\, n \geqslant 3, \qquad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln k}{k} \leqslant \int_n^{2n} \frac{\ln t}{t}\, dt \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln k}{k} + \frac{\ln n}{n} - \frac{\ln(2n)}{2n}. \tag{3}$$

Comme plus haut, on peut facilement calculer l'intégrale :

$$\int_n^{2n} \frac{\ln t}{t}\, dt = \frac{(\ln 2n)^2 - (\ln n)^2}{2} = \ln 2 \cdot \ln n + \frac{(\ln 2)^2}{2}.$$

On déduit alors de (3) que

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln k}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln 2 \cdot \ln n + \frac{(\ln 2)^2}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n}\right) = \ln 2 \cdot \ln n + \frac{(\ln 2)^2}{2} + o(1)$$

et donc, en revenant à (2),

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \gamma \ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2} + o(1).$$